

Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 41 (1916)

Artikel: Note sur la théorie analytique des corps solides cotés
Autor: Cailler, C.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-742629>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 05.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

NOTE SUR LA THÉORIE ANALYTIQUE
DES
CORPS SOLIDES COTÉS

PAR
C. CAILLER

(Suite et fin ¹⁾)

Les Stéréocouronnes des deux espèces

§ 25. Nous avons vu comment, en faisant tourner, d'un angle quelconque, un corps autour d'un axe fixe, on engendre la *couronne*, et comment, en faisant tourner ce même solide autour des droites d'un faisceau plan, on engendre le *couronoïde*, c'est-à-dire un système linéaire tel qu'entre quatre des corps qu'il contient règne l'équation homogène (58). Si on prétend construire un ensemble de quatre corps, concourants deux à deux, qui soient linéairement indépendants, il faut, c'est le seul moyen, soumettre un de ces corps à trois rotations arbitraires autour d'axes qui se rencontrent deux à deux sans former un faisceau plan. Or trois axes de cette espèce ne peuvent présenter que deux dispositions : tantôt ces axes se rencontrent en un seul point, sans être dans un plan, tantôt ils appartiennent à un même plan, sans être concourants.

Dans le premier cas les quatre corps ont un point commun ; il n'en ont pas dans le second. Ce dernier cas présente une disposition plus compliquée ; trois corps du système ont bien un point commun, mais celui-ci varie suivant le corps exclu, et peut d'ailleurs se trouver transporté à l'infini.

¹⁾ Voir *Archives*, t. XL, p. 361 et 457 ; t. XLI, p. 5.

Généralisons la dite construction afin d'engendrer des triséries de corps, deux à deux concourants, de telle manière que quatre corps empruntés à une semblable triserie soient, en général, linéairement indépendants. Suivant qu'on prend pour base de la construction une gerbe, ou un ensemble de droites coplanaires, on est conduit à deux types différents de *stéréocouronnes*.

1° Faisons pirouetter un corps autour d'un centre, les positions de ce corps forment la *stéréocouronne à centre*. Le centre peut aussi s'éloigner à l'infini, alors les axes de rotation forment l'ensemble des parallèles à une direction donnée, c'est autour de ces droites que le corps devra tourner pour engendrer la *stéréocouronne*.

2° Si on fait tourner, d'un angle quelconque, un corps A autour de toutes les droites d'un plan, les positions du corps mobile définissent encore une triserie qui est la *stéréocouronne à plan*.

Comme le corps A peut être choisi à volonté dans la *stéréocouronne* même, ce procédé général de construction redonne, quand on change le dit corps, ∞^3 fois la dite *stéréocouronne*. D'ailleurs par trois corps concourants quelconques passent deux *stéréocouronnes*, l'une à centre, l'autre à plan : si A, B, C sont ces corps, le centre de la première est leur point commun, le plan des axes de rotation menant A sur B et A sur C est le plan de la seconde *stéréocouronne*, quand on l'engendre par le moyen du solide A .

Si, se limitant à ce dernier cas, on considère 4 corps A, B, C, D de la *stéréocouronne à plan*, on constate facilement que les axes des 6 rotations de l'un de ces corps vers un autre quelconque forment un tétraèdre.

Je dis maintenant qu'entre 5 corps appartenant à une *stéréocouronne*, de l'un ou l'autre type, existe toujours une relation linéaire, comme

$$aA + bB + cC + dD + eE = 0 . \quad (65)$$

En effet, si on désigne par L, M, N, P les axes des rotations

menant A successivement sur les 4 autres corps, on a 4 formules analogues à la suivante

$$B\bar{A} = \cos u + L \sin u ; \quad (66)$$

or L, M, N, P sont des droites deux à deux concourantes, c'est-à-dire qui vérifient une équation linéaire homogène, telle que

$$lL + mM + nN + pP = 0 . \quad (67)$$

L'élimination des 4 lettres L, M, N, P entre les 5 formules (66) et (67) donne le résultat ; il est conforme à (65).

En outre, et par un raisonnement employé deux fois déjà, la réciproque est vraie : si 4 corps linéairement indépendants B, C, D, E se rencontrent deux à deux, la formule générale, aux coefficients arbitraires,

$$A = bB + cC + dD + eE \quad (68)$$

représente une stéréocouronne qui peut être de l'une ou l'autre espèce.

Passons à l'examen sommaire des propriétés des stéréocouronnes.

§ 26. 1° Deux stéréocouronnes qui ont 4 corps communs coïncident lorsque ces corps sont linéairement indépendants. Ceci est identique à la réciproque indiquée tout à l'heure.

2° Si une stéréocouronne passe par trois ou par deux corps, elle contient le couronoïde, ou la couronne, unissant les trois ou les deux corps. Evident, puisque les formules $bB + cC$, $bB + cC + dD$ sont contenues dans (68).

3° Dans une stéréocouronne à plan, les corps qui possèdent un point commun forment un couronoïde. Car, d'un côté, le couronoïde formé avec trois de ces corps appartient à la stéréocouronne ; en second lieu tous les corps de ce couronoïde possèdent le même point commun ; et enfin la stéréocouronne ne pourrait contenir un corps étranger au couronoïde et possédant le même centre, à moins d'être elle-même à centre, ce qui est contraire à l'hypothèse.

A cette occasion il faut remarquer que les centres des couronoïdes compris dans une stéréocouronne de seconde espèce occupent toutes les positions possibles de l'espace. Pour le montrer employons le raisonnement synthétique, plus commode ici, que les considérations analytiques.

Soient A le corps générateur, P le plan autour des droites duquel A est appelé à tourner. Désignons par O le point qui doit jouer le rôle de centre d'un couronoïde compris dans la stéréocouronne donnée. Par le point O menons trois plans qui recouperont P suivant les droites L, L', L'' ; prenons les symétriques de ces plans par rapport au plan fixe P , et désignons par O' le point du corps A où ces symétriques viennent se rencontrer. Il est clair que trois rotations autour des droites L, L', L'' et d'angles convenables, amèneront en O le point O' du corps A ; les trois positions finales B, C, D appartiennent à la stéréocouronne, tout en ayant un centre commun fixé à volonté.

4° Etant donnée une stéréocouronne $aA + bB + cC + dD$, de l'une ou l'autre espèce, cette stéréocouronne contient toujours ∞^2 corps qui rencontrent un corps P arbitraire, et ces corps forment un couronoïde. De même, il existe dans la stéréocouronne ∞^1 corps, formant une couronne, concourants avec deux corps P et Q ; et enfin il y a un corps unique de la stéréocouronne rencontrant trois corps P, Q, R choisis à volonté.

Cette propriété résulte immédiatement du fait que la condition de rencontre contient linéairement les coordonnées a, b, c, d d'un corps de la stéréocouronne; elle s'écrit en effet sous la forme

$$\begin{aligned} & (aA + bB + cC + dD, P)'' \\ &= a(AP)'' + b(BP)'' + c(CP)'' + d(DP)'' = 0. \end{aligned}$$

Il est clair aussi que si P, Q, R rencontrent un corps de la stéréocouronne, ce même corps rencontrera aussi tous ceux de la monosérie linéaire engendrée par P, Q, R : que si P, Q, R sont concourants deux à deux et engendrent un couronoïde, tous les corps du couronoïde et de la stéréocouronne seront, deux à deux, concourants. Et ainsi de suite.

5° Les stéréocouronnes des deux espèces ont, en Géométrie

réglée, leurs analogues dans les systèmes de droites deux à deux concourantes, systèmes qui présentent soit le type de la gerbe, soit celui de droites recouvrant un plan fixe. Il est évident que deux de ces systèmes de droites possèdent, en général, un rayon commun, ou aucun, selon qu'ils sont de même espèce ou d'espèce différente.

Dans la Géométrie des corps nous rencontrons une propriété précisément inverse : *deux stéréocouronnes de même espèce n'ont pas, en général, de corps commun, tandis que deux stéréocouronnes d'espèce contraire ont, en général, un seul corps commun.*

Soit une stéréocouronne, obtenue en faisant tourner un corps A autour du centre O , et une autre stéréocouronne engendrée par un corps B tournant autour des droites d'un certain plan P . Nommons O' le point qui, dans B , occupe la position homologue de O dans A ; joignons OO' , et par le milieu de cette droite menons un plan perpendiculaire à OO' , lequel vienne rencontrer le plan fixe P suivant la droite L . Il est clair qu'il existe une rotation autour de L , telle qu'en exécutant cette rotation, le point O' du corps B vienne se placer sur son homologue O ; la position de B , après la rotation, appartient à la fois aux deux stéréocouronnes. C'est d'ailleurs le seul corps commun, comme il est évident.

Le cas où la droite OO' serait à angle droit sur le plan P ne constitue pas une exception à la propriété précédente; la droite L est transportée à l'infini, la rotation dont elle est l'axe se change simplement en une translation perpendiculaire au plan P .

La seule exception véritable se présente lorsque $\overline{OO'}$ est non seulement perpendiculaire sur P , mais que le milieu de cette droite est contenu dans le plan. Dans ce cas, il existe ∞^2 rotations menant O' sur son homologue, et par suite, les deux stéréocouronnes ont pour intersection un certain couronoïde de centre O .

Soient, en second lieu, deux stéréocouronnes de la première espèce, engendrées l'une par la rotation du corps A autour du centre O , l'autre par la rotation du corps B autour du centre O' .

Marquons dans le second corps l'homologue Ω du point O : pour que les deux stéréocouronnes présentent un corps commun, il faut évidemment que les distances $\overline{OO'}$ et $\overline{O'\Omega}$ soient égales. Cette condition n'est pas toujours réalisée, donc *les deux stéréocouronnes n'ont pas en général de corps commun*; si elle a lieu, non seulement il existe un corps commun, mais encore toute une couronne, obtenue en faisant tourner ce corps autour de l'axe $\overline{OO'}$.

Prenons en dernier lieu deux stéréocouronnes à plans fixes : le résultat est conforme au précédent. Pour le montrer, partons d'un lemme préliminaire.

Une stéréocouronne à plan étant définie par un corps A et un plan P , je dis qu'en choisissant convenablement le corps A dans la stéréocouronne, on peut donner à P une position quelconque dans l'espace.

En effet, on sait que la stéréocouronne contient une infinité de couronoïdes, et que parmi ceux-ci, il en est dont le centre est placé à volonté dans l'espace. D'autre part, le centre étant donné, il est possible de choisir le corps générateur du couronoïde de manière que le plan correspondant soit l'un quelconque des plans passant par ce centre ⁽¹⁾. Il suffit ensuite de faire tourner ce corps générateur autour de toutes les droites du plan pour décrire la stéréocouronne; or, d'après sa construction, le dit plan occupe une position entièrement arbitraire.

Soient donc deux stéréocouronnes de même plan P , engendrées la première par le corps A , la seconde par le corps B . S'il existe un corps C commun aux deux stéréocouronnes, les rotations (AC) et (CB) s'exécutent autour de deux axes appartenant au plan P , les corps A et B ont un point commun, celui qui est à la rencontre des deux axes. Ici encore apparaît une condition de possibilité : *les deux stéréocouronnes ne peuvent avoir de corps commun, à moins que les corps générateurs ne soient concourants*.

Si cette condition nécessaire est satisfaite, il existe non seulement un corps commun, mais même une couronne de semblables corps; cette couronne s'obtient en décomposant la rotation

¹⁾ Cela résulte de la 4^me propriété du couronoïde vue ci-dessus.

(AB) en deux rotations (AC), (CB) dont les axes respectifs appartiennent au plan P ⁽¹⁾.

6° Le plan de toute stéréocouronne peut être pris arbitrairement. Il y a donc autant de stéréocouronnes à plan qu'on peut mettre de corps générateurs en présence d'un plan fixe, c'est-à-dire ∞^6 ; quand on déplacera le plan, la même stéréocouronne sera reproduite à ∞^3 exemplaires.

De même pour les stéréocouronnes à centre. Comme le centre peut être déplacé à volonté dans le corps et dans l'espace, ces stéréocouronnes sont au nombre de ∞^6 et chacune n'est engendrée qu'une seule fois.

IX. COMPOSITION ET RÉDUCTION DES SYSTÈMES DE CORPS MASSIFS

§ 27. Les pages précédentes ont mis en pleine clarté les analogies essentielles que présentent les deux Géométries des corps et des droites, cotés ou non cotés. En réalité, et à la lumière de ces analogies, la Géométrie réglée est apparue sous l'aspect d'un simple cas particulier, d'un chapitre détaché de la Géométrie des corps.

Or, la Géométrie réglée ne connaît pas seulement, comme élément d'espace, la droite indéfinie que nous avons considérée exclusivement jusqu'ici, elle a encore affaire au *vecteur*, c'est-à-dire, dans le sens le plus particulier du terme, à un segment limité, porté sur une certaine ligne d'action et doué d'une certaine *grandeur* ou *intensité*. On connaît le rôle capital de cette notion : la Cinématique et la Statique théoriques ne sont que l'histoire des systèmes de vecteurs, la théorie de leur réduction à des systèmes plus simples, par le moyen de la règle de la composition. Au terme de cette réduction se trouve la droite cotée, combinaison d'un certain vecteur avec un certain couple; la droite cotée intervient ici simplement à titre de forme canonique d'un système de vecteurs.

¹⁾ Je me dispense d'indiquer ici la solution très facile de ce problème.

Il y a lieu de se demander si les analogies si frappantes et si remarquables qui apparentent la Géométrie des corps et la Géométrie réglée s'étendent encore de manière à embrasser les faits que je viens de rappeler. Peut-on, autrement dit, généraliser la notion du corps solide, et définir une opération corrélative de la composition, de manière à imiter avec les systèmes de corps les théories classiques dont il vient d'être question? Qu'il en soit bien ainsi, c'est ce que l'ensemble des résultats antérieurs rend très vraisemblable. Je vais, en terminant ce long article, essayer de justifier l'exactitude de cette présomption.

Rappelons d'abord que, de même qu'une droite indéfinie possède deux sens et donne lieu à deux bivecteurs opposés $\pm L$, de même, un corps peut être affecté d'un sens suivant le signe du quaternion $\pm A$ qui sert à le représenter; une rotation d'une demi-circonférence change une droite en sa contraire, tandis qu'il faut un tour complet pour renverser le sens d'un corps.

Cela posé, donnons au corps A une *intensité*, ou une *masse* a . Cette masse a , qu'il faut bien se garder de confondre avec la cote, est comme cette dernière un coefficient *réel*, entrant comme facteur commun dans les coordonnées $\begin{Bmatrix} aA_k' \\ aA_k'' \end{Bmatrix}$, de manière qu'en faisant $B_k' = aA_k'$, $B_k'' = aA_k''$ on a toujours

$$(BB)'' = a^2(AA)'' = 0.$$

En revanche, au lieu que $(BB)' = 1$, nous aurons désormais, pour un corps de masse a ,

$$(BB)' = a^2(AA)' = a^2.$$

Il est clair que l'identité $aA = (-a)(-A)$ permet, en changeant le sens d'un corps, si besoin est, de ne considérer jamais que des masses *positives*; en outre, par une convention expresse, un corps de masse nulle doit être regardé comme inexistant, il peut être introduit ou supprimé en tout état de cause⁽¹⁾.

¹⁾ Dans ce qui suit, je désignerai par (A, a) un corps ordinaire doué de la masse a ; on a donc avec cette notation $(AA)' = 1$.

Règle de composition des Corps concourants

§ 28. Prenons deux corps de masses b et c , à savoir (B, b) et (C, c) , que nous supposons concourants, ou vérifiant la condition $(BC)'' = 0$.

Par définition, la *somme géométrique* ou la *résultante* de ces corps est le corps massif

$$A = bB + cC ; \quad (69)$$

il est clair, d'après cela, que dans la composition le *sens* des composants intervient pour une part; en revanche, la résultante est complètement indépendante du système d'axes coordonnés, elle est déterminée exclusivement par les corps composants.

La résultante est un corps appartenant à la couronne qui joint les composants B et C ; la masse de cette résultante se déduit de la relation

$$a^2 = (AA)' = b^2 + c^2 + 2bc(BC)' ,$$

et vaut ainsi

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \cos (BC)} , \quad (70)$$

formule où (BC) désigne l'intervalle qui, dans la couronne, sépare le corps B du corps C .

Pour formuler de la manière la plus claire l'idée de la composition telle qu'elle résulte des formules (69) et (70), le mieux sera de changer le système de repères de manière que B, C , et par suite A , soient des vecteurs; on a alors immédiatement l'énoncé suivant :

Sur un plan P sont tracés deux vecteurs massifs et leur résultante, tous trois rapportés à un certain axe polaire appartenant au même plan; si on fait tourner celui-ci sur lui-même, autour de l'origine commune, trois fois de suite, et que les angles des trois rotations soient égaux au double des angles polaires correspondant aux trois vecteurs, si en outre les masses des positions finales du plan sont égales aux masses respectives de ces vecteurs, la troisième de ces positions est la résultante des deux autres ⁽¹⁾.

¹⁾ Bien entendu, les vecteurs composants pourraient être parallèles au lieu de se rencontrer; rien de plus simple que de trouver les modifications de l'énoncé relatives à ce cas.

La composition des corps peut être répétée; par exemple, si un corps (D, d) en rencontre deux autres (B, b) , (C, c) également concourants, ce même corps rencontre aussi la résultante des deux premiers, soit $bB + cC$; il y a donc une résultante finale, qui est

$$A = (bB + cC) + dD = bB + cC + dD ;$$

autrement dit, la composition possède les propriétés associative et commutative.

En un mot, si plusieurs corps se rencontrent deux à deux, on peut obtenir d'un seul coup la résultante, laquelle est indépendante de l'ordre de la composition, comme suit :

$$A = bB + cC + dD + \dots$$

De même, pour prendre un cas général de décomposition : si 4 corps, linéairement indépendants B, C, D, E se rencontrent deux à deux, un cinquième corps massif qui rencontrerait tous les autres, ou ferait partie de leur stéréocouronne, peut, d'une seule manière, être décomposé suivant la formule

$$bB + cC + dD + eE ;$$

et si trois corps forment la base d'un couronoïde, tout corps massif appartenant au couronoïde admet la représentation

$$bB + cC + dD ,$$

laquelle est unique.

Systèmes de Corps. Equivalence et réduction.

§ 29. Il nous faut maintenant, pour transporter dans le nouveau domaine, les idées classiques de la Statique, considérer un, ou plusieurs systèmes, comprenant chacun divers corps (A, a) , (B, b) , ... distribués dans l'espace d'une manière quelconque. Seront déclarés *équivalents* deux systèmes semblables, lorsqu'on peut passer de l'un à l'autre par l'adjonction ou la suppression de corps de masse nulle, ainsi que par le moyen de la composition ou de la décomposition de corps concourants. Les deux procédés de transformation précédents sont dits *les opérations élémentaires*.

Il est clair qu'exécutées sur un système (A, a) , (B, b) , ces opérations élémentaires ne modifient pas la somme

$$\alpha = aA + bB + cC + \dots,$$

laquelle, en conséquence, sera la même pour deux systèmes équivalents.

Le quaternion α , auquel le système se trouve ainsi réduit, est identique à un corps à la fois massif et coté : en nommant m la masse, et ω la cote, nous avons

$$\begin{aligned} m^2 &= (\alpha\alpha)' = a^2 + b^2 + c^2 + \dots + 2ab(AB)' + \dots \\ 2m\omega &= (\alpha\alpha)'' = 2ab(AB)'' + 2ac(AC)'' + \dots \end{aligned}$$

Ceci suffit pour montrer qu'un système ne peut pas, sauf exceptions, être réduit à un corps massif unique par les opérations élémentaires ; pour la possibilité d'une pareille transformation, il faut qu'on ait $(\alpha\alpha)'' = 0$.

Nous avons démontré toute à l'heure que deux systèmes de corps massifs, équivalents entre eux, possèdent le même quaternion réduit α . Pour achever la théorie suivant le modèle connu, il faudrait encore prouver la réciproque, à savoir : *si deux systèmes S et S' possèdent le même quaternion α , ils sont réductibles l'un à l'autre par les opérations élémentaires.*

Qu'il en est bien ainsi, c'est ce qui nous reste à voir.

Pour cela je prends d'abord un système $\sigma = aA + bB + \dots$ et je considère un corps Ω relativement auquel σ possède un moment nul. L'équation de condition, qui exprime cette involution,

$$(\alpha\Omega)'' = a(A\Omega)'' + b(B\Omega)'' + \dots = 0, \quad (71)$$

peut évidemment toujours être satisfaite ; de plus, remarque essentielle, si deux systèmes présentent la même somme α , on peut pour l'un et l'autre employer le même corps Ω .

Faisons pirouetter le corps Ω autour de trois points formant un triangle, engendrant de la sorte trois stéréocouronnes S_1, S_2, S_3 ; prenons encore une quatrième stéréocouronne S_4 , également de la première espèce, mais à laquelle n'appartienne pas le corps Ω .

Soit (A, a) un corps appartenant à σ ; avec ce corps et trois autres, qui rencontrent le premier et qui se rencontrent mutuellement, formons une stéréocouronne à plan Σ ; il est clair que cela est possible d'une infinité de manières. Cette stéréocouronne Σ possède avec chacune des stéréocouronnes S_1, S_2, S_3, S_4 , qui sont du premier genre, un corps commun. Nommons S_1, S_2, S_3, S_4 les 4 corps communs; s'ils sont indépendants, c'est-à-dire, s'ils ne font pas partie d'un même couronoïde⁽¹⁾, ils peuvent être pris pour base de la stéréocouronne Σ .

Dès lors il est clair que, par la décomposition géométrique, le corps (A, a) peut être remplacé par les 4 corps massifs S , la formule algébrique correspondant à cette décomposition étant

$$aA = l_1 S_1 + l_2 S_2 + l_3 S_3 + l_4 S_4 .$$

En agissant semblablement avec chacun des corps $(B, b), (C, c), \dots$ qui composent σ , on aura une série de formules analogues

$$bB = l'_1 S'_1 + l'_2 S'_2 + l'_3 S'_3 + l'_4 S'_4 \dots ,$$

lesquelles donnent, par addition

$$\begin{aligned} \alpha = aA + bB + \dots = & (l_1 S_1 + l'_1 S'_1 + \dots) , \\ & + (l_2 S_2 + l'_2 S'_2 + \dots) , \\ & + (l_3 S_3 + l'_3 S'_3 + \dots) , \\ & + (l_4 S_4 + l'_4 S'_4 + \dots) . \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \alpha = aA + bB + \dots = \end{aligned}} \right\} (72)$$

Bien entendu, cette formule n'a pas simplement une signification algébrique; géométriquement, elle indique que le système σ peut être ramené, par la composition, à un ensemble de corps qui appartiennent tous à l'une des stéréocouronnes S_1, S_2, S_3, S_4 . Et comme les corps d'une même stéréocouronne sont concourants, chacune des parenthèses de la formule (72) peut être réduite à un seul terme, de sorte qu'on a, aussi bien algébriquement que géométriquement,

$$\alpha = aA + bB + \dots = l_1 S_1 + l_2 S_2 + l_3 S_3 + l_4 S_4 . \quad (73)$$

Faisant un pas de plus, nous allons voir que le dernier terme de (73) peut être supprimé; il nous faut, dans ce but, invoquer

¹⁾ Voir plus loin la remarque du § 31.

la construction particulière des stéréocouronnes S_k que nous n'avons pas encore utilisée, ainsi que la propriété (71) imposée au corps Ω . De cet ensemble de conditions résulte d'abord

$$(\alpha\Omega)'' = 0, \quad (S_1\Omega)'' = (S_2\Omega)'' = (S_3\Omega)'' = 0;$$

de là, et de l'équation (73), on tire $l_4 (S_4\Omega)'' = 0$. Si donc le dernier terme de (73) n'était pas nul, le corps S_4 serait concourant avec Ω ; poursuivons les conséquences de cette hypothèse qui est la plus compliquée.

Avec S_4 construisons une stéréocouronne à plan Σ' ; elle possède en commun avec S_1, S_2, S_3 les corps S_1', S_2', S_3' . Désignons par S_4' un quatrième corps appartenant à Σ' , lequel associé avec les trois précédents forme une base de la stéréocouronne Σ' , si du moins ces 4 corps sont indépendants les uns des autres⁽¹⁾. Il est clair, qu'ayant déjà $(S_1'\Omega)'' = (S_2'\Omega)'' = (S_3'\Omega)'' = 0$, nous ne pouvons avoir $(S_4'\Omega)'' = 0$, sans quoi Ω rencontrerait tous les corps de Σ' , et la stéréocouronne Σ' serait de première, et non de seconde espèce, contrairement à l'hypothèse.

Décomposons enfin le corps S_4 , qui appartient à Σ' , suivant les bases S_k' de cette stéréocouronne, et recomposons les corps S_1', S_2', S_3' , respectivement avec les corps S_1, S_2, S_3 qui sont deux à deux concourants; il est clair que le résultat final de cette double opération nous donnera

$$S_4 = l_1''S_1'' + l_2''S_2'' + l_3''S_3'' + l_4'S_4',$$

équation analogue à (73) en ce que S_1'', S_2'', S_3'' appartiennent toujours aux stéréocouronnes S_1, S_2, S_3 . Mais maintenant $(S_4'\Omega)$ étant différent de zéro, on aura, comme vu plus haut, $l_4' = 0$; par suite, *il est toujours possible de réduire par la composition géométrique le système σ à trois corps faisant respectivement partie des stéréocouronnes S_1, S_2, S_3 , de telle manière qu'on ait pour la somme α relative à σ la valeur*

$$\alpha = l_1S_1 + l_2S_2 + l_3S_3.$$

Cela étant, prenons deux systèmes σ, σ' de même somme α ; appliquons à tous deux la décomposition précédente: il résulte

¹⁾ Voir le § 31.

entre les éléments S_k, S'_k de la réduction relative à chacun, l'identité

$$l_1 S_1 + l_2 S_2 + l_3 S_3 = l'_1 S'_1 + l'_2 S'_2 + l'_3 S'_3 . \quad (74)$$

Pour passer du système σ à l'autre, décomposons $l_1 S'_1$ en deux corps de la stéréocouronne S_1 dont l'un soit $l'_1 S'_1$ et l'autre $l''_1 S''_1$, et ainsi des autres. Alors l'égalité supposée (74), entraîne la suivante

$$l''_1 S''_1 + l''_2 S''_2 + l''_3 S''_3 = 0 ; \quad (75)$$

je dis, et c'est la fin de la démonstration, que les corps S''_1, S''_2, S''_3 liés ensemble par cette relation se détruisent géométriquement par les opérations élémentaires.

La chose est évidente si dans (75) un des coefficients l'' est nul; s'ils sont tous trois différents de zéro, l'égalité $(S''_3 S''_3)'' = 0$, combinée avec (75), montre que $(S''_1 S''_2)'' = 0$, c'est-à-dire que les corps S''_1 et S''_2 sont concourants. Faisant ainsi partie d'une couronne, ils peuvent être composés en un seul corps, lequel, d'après (75), devant détruire $l''_3 S''_3$ est égal et contraire à ce dernier. En résumé : toutes les fois que deux systèmes possèdent la même somme α , ils peuvent être réduits l'un à l'autre par la composition.

§ 30. Il est clair que la théorie précédente conduit aux mêmes conséquences que la théorie classique des systèmes de vecteurs; sans insister sur des détails évidents, je me permets de citer ici les deux propriétés suivantes :

1^{er} Corollaire. — Tout système de corps est réductible à deux corps massifs seulement, et cette réduction est possible d'une infinité de manières.

En effet α étant donné, il suffit de poser pour trouver les deux corps cherchés (A, a) et (B, b) ,

$$\alpha = aA + bB . \quad (76)$$

Un des corps A peut être pris à volonté quant à sa position dans l'espace; sa masse se détermine par l'équation

$$(\alpha - aA, \alpha - aA)'' = (\alpha\alpha)'' - 2a(\alpha A)'' = 0 ,$$

qui signifie que le système $\alpha - aA$ est réductible à un seul corps massif. On voit que, toutes les fois que le corps A n'est pas en involution avec le système donné, la masse a existe et le corps B , donnant lieu avec A à l'équation d'équivalence (76) existe aussi : les deux corps A et B sont *conjugués* par rapport à la pentasérie admettant α comme noyau.

2^{me} Corollaire. — Si on opère de plusieurs manières la réduction ci-dessus, le moment des deux corps conjugus reste constant.

En effet, nous avons

$$\frac{1}{2} (xz)'' = \frac{1}{2} (aA + bB, aA + bB)'' = ab(AB)'' ;$$

le premier membre est donné, le dernier, qui lui est égal, représente justement le moment des deux corps conjugus ; ainsi le moment ne varie pas.

D'ailleurs, si d'une manière générale, on avait remplacé deux systèmes α et β , par des sommes de corps massifs, telles que

$$\alpha = \sum aA, \quad \beta = \sum bB,$$

le moment réciproque de ces deux systèmes s'exprimerait en fonction des moments mutuels des corps A et B , par la formule

$$(z\beta)'' = \sum \sum ab(AB)''.$$

§ 31. J'ai tenu à présenter, dans les paragraphes précédents, la théorie de la composition des corps et de leur réduction d'une manière directe et indépendante de toute autre ; toutefois, pour que les résultats obtenus par cette voie puissent être regardés comme définitivement acquis, il resterait à discuter les deux points que j'ai signalés en note pp. 104 et 105. La place me manque ici pour entrer dans tous les détails d'une discussion assez délicate. Je crois d'ailleurs pouvoir d'autant mieux m'en dispenser que quelques lignes suffisent pour retrouver l'ensemble de la théorie, en déduisant la composition des systèmes de corps de celle des systèmes de vecteurs ; c'est par ce dernier exemple de l'interdépendance entre les deux Géométries que je termine.

Soit un système de corps ; si le système n'en comprenait que trois, ces corps deviendraient des droites en les rapportant à l'orthogonal commun. La théorie de la composition des vecteurs, à laquelle se réduit celle des corps, nous donne la proposition fondamentale.

La composition permet toujours d'abaisser le nombre des corps de trois à deux : par suite, quel que soit le nombre des corps que comprend le système donné, ce nombre peut être réduit à deux. En outre, et toujours pour la même cause, si les deux corps résultants présentent une droite commune, la réduction peut être poussée d'un degré, jusqu'à un seul corps résultant.

Cette condition de la rencontre, qui est suffisante pour la réductibilité à un seul corps, est aussi nécessaire.

Soient maintenant deux corps possédant le même α . Réduisons le premier à la forme $aA + bB$, le second à la forme $cC + dD$, de sorte que

$$aA + bB = cC + dD .$$

Si on prend l'orthogonal commun aux corps A, B, C comme système de référence, ces corps deviennent trois vecteurs ; l'égalité précédente montre qu'il en est de même pour le quatrième D . Les deux systèmes donnés se trouvent ainsi réduits chacun à un ensemble de deux droites massives ; et en vertu de l'équation ci-dessus, ces systèmes réduits, à leur tour, se transforment l'un dans l'autre par les opérations élémentaires.

La conséquence qui se déduit de tout cela pour les systèmes primitifs, c'est que, comme nous le savons d'autre part : *si deux systèmes de corps massifs possèdent le même α ils peuvent être transformés l'un dans l'autre par la composition.*

ERRATUM A UN ARTICLE PRÉCÉDENT

Archives, t. XL. A la page 462, lignes 9-12, il faut lire : Nous dirons donc que deux corps sont *perpendiculaires* lorsque la rotation du mouvement hélicoïdal qui amène l'un sur l'autre mesure 180 degrés, la translation étant quelconque.