Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 42 (1916)

Artikel: Géométrie des corps solides et géométrie imaginaire [suite et fin]
Autor: Cailler, C.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-743289

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 17.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

GÉOMÉTRIE DES CORPS SOLIDES

ET

GÉOMÉTRIE IMAGINAIRE

PAR

C. CAILLER

(Suite et fin[1]*)*

XIII. — Théorie analytique des vrilles

Parmi les différents objets dont s'occupe la Géométrie imaginaire, corps solide, vrilloïde, et vrille, c'est ce dernier qui est le moins simple. Il n'est donc pas superflu, après en avoir fait plus haut la théorie synthétique, d'en retrouver les propriétés essentielles par la voie analytique. Le fait que les coordonnées plückériennes des vrilles sont imaginaires ne joue qu'un rôle secondaire dans la théorie, et celle-ci se trouve en réalité identique avec la Géométrie réglée de l'espace riemannien.

Mais outre que cette dernière est relativement peu connue, le passage du réel au complexe en modifie quand même quelques-uns des caractères; par exemple, les séries linéaires de vrilles n'ont pas nécessairement les mêmes dimensions que les séries linéaires de droites, complexes, congruences ou quadriques. Pour ces différents motifs, je crois devoir consacrer la fin de ce mémoire à une étude rapide des éléments de la Géométrie réglée imaginaire, soit de la Géométrie des vrilles.

Nous disposons, pour la représentation analytique d'une vrille, de deux procédés principaux. L'un est basé sur la défini-

[1]) Voir *Archives,* t. XLII, p. 89 et 177.

tion paramétrique, l'autre sur l'emploi des coordonnées plückériennes ; ils ont chacun leurs avantages et leurs inconvénients particuliers et doivent servir tous les deux suivant les circonstances.

Dans la représentation paramétrique

$$X_k = x_k \cos s + y_k \sin s \ , \qquad (k = 0, 1, 2, 3) \quad (23)$$

les corps servant de *bases* (x) et (y) sont orthogonaux, on a donc toujours $(xy) = 0$ [1] ; s et $90^\circ - s$ expriment les distances du corps descripteur X à chacune des deux bases.

Employons cette représentation, en vue d'établir la loi de l'intervalle entre deux corps, dont l'un X fait partie de la vrille (23), et dont l'autre Y appartient à une seconde vrille d'équation

$$Z_k = z_k \cos t + u_k \sin t \ . \qquad (k = 0, 1, 2, 3) \quad (24)$$

Par multiplication de deux formules (23) et (24), nous obtenons

$$(XZ) = (xz) \cos s \cos t + (yz) \sin s \cos t + (xu) \cos s \sin t + (yu) \sin s \sin t.$$

Supposons en outre que l'origine des s et des t, sur chaque vrille, se trouve à l'extrémité d'une des deux normales communes que nous savons exister. Dans ce cas, les corps x et y sont respectivement orthogonaux sur u et z, et l'on a les 4 relations

$$(xy) = 0 \ , \qquad (yz) = 0 \ , \qquad (xu) = 0 \ , \qquad (zu) = 0 \ . \qquad (25)$$

De cette manière la loi de la distance se simplifie, devenant

$$(XZ) = (xz) \cos s \cos t + (yu) \sin s \sin t \ . \qquad (25')$$

En général, la condition pour qu'un corps X (s), emprunté à la première vrille, soit la projection sur cette vrille d'un corps Z (t) emprunté à la seconde, s'exprime sous la forme

$$\sum (z_k \cos t + u_k \sin t)(- x_k \sin s + y_k \cos s) = 0 \ .$$

[1]) La notation (xy) signifiera toujours le produit intérieur

$$x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

Pour que la vrille qui joint les deux corps soit une normale commune, il faut donc que l'équation précédente soit vérifiée, ainsi que l'équation symétrique

$$\sum (-z_k \sin t + u_k \cos t)(x_k \cos s + y_k \sin s) = 0 .$$

En tenant compte des relations (25), les deux conditions s'écrivent sous forme réduite

$$\left.\begin{aligned} (xz)\cos t \sin s - (yu)\cos s \sin t &= 0 , \\ (xz)\cos s \sin t - (yu)\sin s \cos t &= 0 . \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

Mais les expressions (xz) et (yu) ne sont pas toutes les deux nulles, sans quoi les vrilles considérées seraient conjuguées ; c'est un cas à négliger. Nous avons donc, en vertu de (26),

$$\cos^2 t \sin^2 s - \cos^2 s \sin^2 t = \sin(s + t) \sin(s - t) = 0 ,$$

ce qui donne, ou bien $s = t$, ou bien $s = -t$.

Qu'on porte ces valeurs dans (26), il vient

$$\cos s \sin s \, [(xz) \mp (yu)] = 0 ,$$

d'où $s = t = 0$, ou encore, $s = \pm t = 90°$. Donc, il n'existe aucune vrille normale aux deux vrilles données, en dehors de la paire remarquée dès l'abord.

La conclusion est inexacte, lorsque $(xz) = \pm (yu)$. Ces deux hypothèses se réduisent à une seule par le changement de signe de l'un des 4 corps x, y, z, u ; prenons donc seulement $(xz) = (yu)$.

Dans ce cas les formules (26) se ramènent simplement à

$$\sin(s - t) = 0 , \qquad \text{soit} \qquad s = t ;$$

on est évidemment ici en présence d'un parallélisme de Clifford. Il existe en effet une infinité de vrilles normales aux deux vrilles données ; leurs extrémités sur chacune de celles-ci décrivent dans l'une et l'autre des segments égaux. De plus, la distance de ces extrémités est donnée par la formule (25′), laquelle devient dans les circonstances actuelles

$$(XZ) = (xz)(\cos^2 s + \sin^2 s) = (xz) ;$$

et ainsi *la grandeur des normales communes est invariable dans le cas du parallélisme.*

Les conditions du parallélisme de Clifford sont contenues dans les formules (25) qu'il faut compléter par les suivantes

$$(xz) = (yu) \ , \qquad (zz) = (uu) = 1 \ . \tag{27}$$

Si on suppose x, y, et z donnés, ce système est du second degré par rapport à u; on en conclut immédiatement que *par un corps quelconque passent deux vrilles parallèles à une vrille donnée.*

Il n'est pas sans intérêt de faire voir que les conditions du parallélisme, telles que nous venons de les déduire de la représentation paramétrique, sont conformes de tout point à celles tirées de la théorie synthétique.

Qu'on exprime cette dernière en fonction des coordonnées plückériennes sous leur seconde forme[1], on en déduit que deux vrilles V (L,... R) et V′ (L′,... R′) sont parallèles, si l'on a, soit

$$\mathrm{L} = \mathrm{L}' \ , \qquad \mathrm{M} = \mathrm{M}' \ , \qquad \mathrm{N} = \mathrm{N}' \ , \tag{28}$$

soit encore

$$\mathrm{P} = \mathrm{P}' \ , \qquad \mathrm{Q} = \mathrm{Q}' \ , \qquad \mathrm{R} = \mathrm{R}' \ . \tag{29}$$

Nous allons voir que ces conditions sont en effet une conséquence du système formé par les équations (25) et (27) ci-dessus. En désignant par α, β, γ, δ les quantités précédemment notées x, y, z, u[2], j'écrirai le dit système sous la forme

$$\left.\begin{array}{c} (\alpha\beta) = 0 \ , \quad (\beta\gamma) = 0 \ , \quad (\alpha\delta) = 0 \ , \quad (\gamma\delta) = 0 \ ; \\ (\alpha\gamma) = (\beta\delta) = a \ , \end{array}\right\} \tag{30}$$

auquel il faut ajouter, puisque α, β, γ, δ sont unimodulaires, le suivant

$$(\alpha\alpha) = (\beta\beta) = (\gamma\gamma) = (\delta\delta) = 1 \ . \tag{31}$$

Des diverses identités ci-dessus découle une conséquence algébrique à retenir: c'est

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_0\alpha_i \ +\beta_0\beta_i+\gamma_0\gamma_i+\delta_0\delta_i \\ -a(\alpha_i\gamma_0+\alpha_0\gamma_i+\delta_0\beta_i+\beta_0\delta_i) = 0 \ . \quad (i=1,2,3) \end{array}\right\} \tag{32}$$

[1]) Voir plus haut, p. 187.

[2]) Les lettres x, y, z, u vont recevoir une nouvelle acception.

En effet, les relations (30) et (31) expriment que les substitutions

$$\left.\begin{aligned} X &= \alpha_0 x + \beta_0 y + \gamma_0 z + \delta_0 u\ , \\ Y &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1 u\ , \\ Z &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \delta_2 u\ , \\ U &= \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z + \delta_3 u\ , \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

transforment l'un dans l'autre les deux polynômes

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + U^2 \qquad \text{et} \qquad x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + 2a(xz + yu)\ .$$

Cela étant, résolvons le système (33) par rapport aux petites lettres; nous avons

$$\begin{aligned} \alpha_0 X + \alpha_1 Y + \alpha_2 Z + \alpha_3 U &= x + az = \xi\ , \\ \beta_0 X + \beta_1 Y + \beta_2 Z + \beta_3 U &= y + au = \eta\ , \\ \gamma_0 X + \gamma_1 Y + \gamma_2 Z + \gamma_3 U &= ax + z = \zeta\ , \\ \delta_0 X + \delta_1 Y + \delta_2 Z + \delta_3 U &= ay + u = \tau\ . \end{aligned}$$

Or, identiquement

$$\begin{aligned} &\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \tau^2 - 2a\xi\zeta - 2a\eta\tau \\ &= (1 - a^2)(x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + 2axz + 2ayu)\ ; \end{aligned}$$

qu'on exprime les deux membres en fonction de X, Y, Z, U, il viendra

$$(\alpha_0 X + \alpha_1 Y + \alpha_2 Z + \alpha_3 U)^2 + \ldots = (1 - a^2)(X^2 + Y^2 + Z^2 + U^2)\,.$$

De là, en identifiant les termes en XY, XZ, XU dans les deux membres, les trois équations (32) ci-dessus.

Revenons à la question du parallélisme, et composons les coordonnées plückériennes de deux vrilles, à l'aide des 4 lignes α, β, γ, δ, suivant les définitions (9'). Elles donnent

$$\left.\begin{aligned} l &= \alpha_0\beta_1 - \beta_0\alpha_1\ , & p &= \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2\ , \\ m &= \alpha_0\beta_2 - \beta_0\alpha_2\ , & q &= \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3\ , \\ n &= \alpha_0\beta_3 - \beta_0\alpha_3\ , & r &= \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1\ , \end{aligned}\right\} \quad (34)$$

et de même, pour V',

$$\left.\begin{aligned} l' &= \gamma_0\delta_1 - \delta_0\gamma_1\ , & p' &= \gamma_2\delta_3 - \gamma_3\delta_2\ , \\ m' &= \gamma_0\delta_2 - \delta_0\gamma_2\ , & q' &= \gamma_3\delta_1 - \gamma_1\delta_3\ , \\ n' &= \gamma_0\delta_3 - \delta_0\gamma_3\ , & r' &= \gamma_1\delta_2 - \gamma_2\delta_1\ . \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

Je dis que ces valeurs donnent lieu à l'identité

$$(l - l')(q - q') - (m - m')(p - p') = 0 \ , \tag{36}$$

ou

$$(lq - mp) - (l'q - m'p) - (lq' - mp') + (l'q' - m'p') = 0 \ . \tag{37}$$

Pour le faire voir il suffit de transporter dans (37) les définitions (34) et (35). Le calcul de chaque terme se fait sur le même modèle, le second par exemple donnera

$$l'q - m'p = \alpha_3\gamma_0(\beta\delta) - \beta_3\gamma_0(\alpha\delta) - \alpha_3\delta_0(\beta\gamma) + \beta_3\delta_0(\alpha\gamma) \ .$$

En réunissant les 4 résultats semblables et en tenant compte des conditions du parallélisme (30) et (31), il vient

$$\alpha_0\alpha_3 + \beta_0\beta_3 + \gamma_0\gamma_3 + \delta_0\delta_3 - a(\alpha_3\gamma_0 + \alpha_0\gamma_3 + \delta_0\beta_3 + \delta_3\beta_0) \ ,$$

ou zéro, d'après le lemme démontré à l'instant.

En opérant de la même manière avec les trois déterminants analogues à (36), nous voyons donc que les coordonnées plückériennes de deux vrilles parallèles vérifient les conditions

$$\frac{l - l'}{p - p'} = \frac{m - m'}{q - q'} = \frac{n - n'}{r - r'} = \varepsilon \ ,$$

ou encore

$$\left.\begin{aligned} l - \varepsilon p &= l' - \varepsilon p' \ , \\ m - \varepsilon q &= m' - \varepsilon q' \ , \\ n - \varepsilon r &= n' - \varepsilon r' \ . \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Comme d'autre part on doit avoir

$$\sum (l^2 + p^2) = \sum (l'^2 + p'^2) = 1 \ , \qquad \text{et} \qquad \sum lp = \sum l'p' = 0 \ .$$

l'élévation au carré des formules précédentes donne $\varepsilon^2 = 1$, $\varepsilon = \pm 1$. Et ainsi se trouvent confirmées les conditions du parallélisme écrites plus haut sous les formes (28) et (29).

Un mot encore sur ce sujet. Soit à mener par un corps (x) une vrille V $(l, \ldots r)$ qui soit parallèle à une vrille donnée V′ $(l' \ldots r')$.

Ayant choisi une des valeurs possibles pour ε dans les équations (38), nous écrirons que la vrille V contient (x), par le moyen des trois relations

$$px_0 = nx_2 - mx_3 \ , \qquad qx_0 = lx_3 - nx_1 \ , \qquad rx_0 = mx_1 - lx_2 \ .$$

Le système des 6 équations ainsi écrites, du premier degré, donnera les inconnues $l, \ldots r$, d'une manière entièrement déterminée; ces inconnues définissent bien une vrille, car les six valeurs déduites des 6 équations précédentes vérifient évidemment les conditions

$$l^2 + m^2 + n^2 + p^2 + q^2 + r^2 = 1 \ , \qquad \text{et} \qquad lp + mq + nr = 0 \ .$$

Suivant la valeur adoptée pour ε, il existera ainsi deux vrilles parallèles qui se déterminent séparément. La solution analytique du problème possède ainsi tous les caractères de la solution géométrique donnée ci-dessus.

Nous savons que la situation relative de deux vrilles V $(l, \ldots r)$ et V′ $(l', \ldots r')$ dépend des deux *distances conjuguées*. Comment ces invariants se déterminent-ils en fonction des coordonnées plückériennes ?

Pour le voir, reprenons les représentations paramétriques ci-dessus ainsi que les relations d'orthogonalité (25). Il y a deux normales communes, celle qui réunit les corps x et z, et celle qui réunit les corps y et u. Nous donnons respectivement à ces quatre corps les indices 1, 1′, 2 et 2′, de manière que les distances xz et yu soient aussi figurées par $\overline{11'}$ et $\overline{22'}$. On a, par exemple [1],

$$\cos \overline{11'} = f_{11'} = x_0 z_0 + x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3 \ .$$

Nous savons que les coordonnées plückériennes sont toutes des déterminants, l par exemple, vaut $x_0\, y_1 - x_1\, y_0$. De là résulte tout de suite, d'après la théorie des formes adjointes, la relation

$$\left.\begin{aligned} ll' + mm' + nn' + pp' + qq' + rr' &= f_{11'} f_{22'} - f_{12'} f_{1'2} \\ &= \cos \overline{11'} \cos \overline{22'} \ , \end{aligned}\right\} \quad (39)$$

car $f_{12'} = f_{1'2} = 0$.

Dans la dernière identité permutons la vrille V′ contre sa conjuguée; il vient

$$lp' + mq' + nr' + pl' + qm' + rn' = \sin \overline{11'} \sin \overline{22'} \ . \quad (40)$$

[1]) La lettre f représente la forme fondamentale $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, f_{12} l'émanant de cette forme.

Les deux quantités (39) et (40) sont les *invariants conjugués* des deux vrilles; on peut, si l'on veut, les considérer comme les deux déterminations particulières d'un *invariant complexe*

$$\left.\begin{aligned}(l+\varepsilon p)(l'+\varepsilon p')+(m+\varepsilon q)(m'+\varepsilon q')+(n+\varepsilon r)(n'+\varepsilon r')\\ =\cos(\overline{11'}-\varepsilon\overline{22'})\,,\end{aligned}\right\}\quad(41)$$

dans lequel le symbole ε peut être remplacé à volonté par ± 1. Et ainsi, en employant les coordonnées plückériennes sous leur seconde forme, l'invariant complexe (41) se décompose dans les deux invariants suivants

$$\mathrm{LL'}+\mathrm{MM'}+\mathrm{NN'}=\cos(\overline{11'}-\overline{22'})\,,\qquad(42)$$

$$\mathrm{PP'}+\mathrm{QQ'}+\mathrm{RR'}=\cos(\overline{11'}+\overline{22'})\,;\qquad(43)$$

ce sont justement ceux qui définissent la situation relative des axes des deux vrilles, considérés tantôt dans l'espace absolu, tantôt dans le corps descripteur lui-même.

Il est clair que l'invariant (40) s'annule quand les vrilles ont un corps commun et seulement dans ce cas; que, pour la même raison, le premier invariant (39) est nul si l'une des vrilles possède un corps commun avec la conjuguée de l'autre, autrement dit, si les deux vrilles sont perpendiculaires. Enfin l'invariant complexe (41), réunion des précédents, est nul dans le seul cas où les vrilles se rencontrent à angle droit, ou sont normales entre elles.

Les résultats précédents, importants en eux-mêmes, nous permettent de retrouver par une troisième voie, très élémentaire, les conditions du parallélisme de Clifford.

Prenons, avec les vrilles V $(l,\ldots r)$ et V' $(l',\ldots r')$, la normale commune Φ $(\lambda,\ldots\rho)$; nous devons avoir

$$(\lambda+\varepsilon\omega)(l+\varepsilon p)+(\mu+\varepsilon\chi)(m+\varepsilon q)+(\nu+\varepsilon\varrho)(n+\varepsilon r)=0\,,$$
$$(\lambda+\varepsilon\omega)(l'+\varepsilon p')+(\mu+\varepsilon\chi)(m'+\varepsilon q')+(\nu+\varepsilon\varrho)(n'+\varepsilon r')=0\,,$$

quelle que soit la détermination particulière de $\varepsilon=\pm 1$.

Si donc, pour aucune des valeurs de ε, nous n'avons les proportions

$$\frac{l+\varepsilon p}{l'+\varepsilon p'}=\frac{m+\varepsilon q}{m'+\varepsilon q'}=\frac{n+\varepsilon r}{n'+\varepsilon r'}\,,\qquad(44)$$

le problème est déterminé. En prenant tantôt $\varepsilon = 1$, tantôt $\varepsilon = -1$, on tirera de l'équation précédente les valeurs proportionnelles des quantités

$$\lambda \pm \omega\,, \qquad \mu \pm \chi\,, \qquad \nu \pm \varrho\,.$$

On achèvera de déterminer les 6 quantités, soit les facteurs de proportionnalité qu'elles contiennent, à l'aide de la double condition

$$(\lambda \pm \omega)^2 + (\mu \pm \chi)^2 + (\nu \pm \varrho)^2 = 1\,.$$

En définitive nous sommes ainsi ramenés à la paire des normales communes que nous connaissions déjà Ces normales se transforment l'une dans l'autre par l'échange de L, M, N contre P, Q, R ; elles sont donc conjuguées.

Si la solution du problème est indéterminée, les vrilles V et V′ sont parallèles entre elles. Pour cela, il faut que, pour une certaine valeur de ε, les proportions (44) soient réalisées. Il est clair qu'on peut encore caractériser ce cas en disant que l'un des invariants (42), ou (43), à savoir $\cos(\overline{11'} \pm \overline{22'})$, est égal à l'unité positive ou négative.

La solution précédente est évidemment la traduction algébrique pure et simple de la solution géométrique démontrée ci-dessus.

XIV. — Les polysériés linéaires de vrilles

En résumé la substitution du complexe au réel n'affecte que fort peu les théories que nous avons étudiées jusqu'à présent ; sauf des nuances de détail, elles reparaissent identiques sous une forme nouvelle, plus générale. Et notre unique tâche a consisté à mettre en évidence ce parallélisme grâce auquel les lois ordinaires de la Géométrie se trouvent exprimer les rapports spatiaux, non seulement entre les points, les droites et les plans, mais encore des rapports identiques entre les solides, les les vrilles et les vrilloïdes.

Mais au moment où, dépassant les premiers éléments, on entre dans le domaine des *polyséries linéaires,* les choses se compliquent. Non pas que le parallélisme s'évanouisse ; il s'obs-

curcit seulement. La raison en est qu'on a d'abord trouvé dans les faits de la Géométrie ponctuelle des images adéquates pour la représentation des phénomènes de la Géométrie des corps solides. Au lieu que maintenant les rôles se retournent, et c'est au contraire les polyséries de corps solides qui doivent servir de figure aux polyséries de points imaginaires non étudiées antérieurement.

Prenons, par exemple, un corps solide. Sa position est définie à l'aide de 4 coordonnées complexes x_k dont l'ensemble équivaut à 8 données réelles x_k', x_k'', car

$$x_k = x_k' + ix_k'' \ . \qquad (k = 0, 1, 2, 3)$$

Au lieu de se borner à des polyséries linéaires telles que

$$\sum a_k x_k = 0 \ , \tag{45}$$

à variables et coefficients complexes, qui ne font que reproduire des vrilloïdes ou combinaisons de vrilloïdes, on peut aussi définir des polyséries linéaires, obtenues par une espèce de dédoublement.

Chacune de ces nouvelles polyséries aura pour équation

$$\sum (a_k'' x_k' + a_k' x_k'') = 0 \ , \tag{46}$$

et cette fois les coefficients et les variables sont réels.

Il est clair que les nouvelles polyséries sont plus générales que les anciennes, car toute équation du type (45) en représente deux du type (46). En outre, la géométrie des polyséries de première espèce est de caractère *linéaire* parce que la relation entre les coordonnées x_k, ou

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \tag{47}$$

ne joue aucun rôle dans cette Géométrie, en raison de son défaut d'homogénéité.

Au contraire la Géométrie des polyséries de seconde espèce sera de caractère quadratique, parce que, des deux équations qui existent entre les coordonnées réelles x_k', x_k'', à savoir

$$x_0'^2 + x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 - x_0''^2 - x_1''^2 - x_2''^2 - x_3''^2 = 1 \ , \tag{48}$$

et

$$x_0'x_0'' + x_1'x_1'' + x_2'x_2'' + x_3'x_3'' = 0 \ , \tag{49}$$

la seconde est quadratique tout en étant homogène. On comprend d'ailleurs que cette équation ne joue aucun rôle dans le domaine réel; elle y est toujours satisfaite identiquement puisque $x_k'' = 0$.

Les faits sont absolument les mêmes quand on passe aux vrilles, sauf que les diverses polyséries qu'elles engendrent manifestent constamment un caractère quadratique. En effet les coordonnées plückériennes d'une vrille V $(l, \ldots r)$ doivent vérifier une relation *homogène* du second degré, qui est

$$lp + mq + nr = 0 .$$

On comprend donc tout de suite qu'on puisse imiter les faits de la Géométrie réglée en substituant des vrilles aux droites. Donnons d'abord quelques détails, peut-être superflus, sur la marche à suivre et sur les résultats de cette comparaison.

Le système de repère (P_0, T) étant choisi d'avance, prenons, pour faire symétrie au complexe de droites, la relation linéaire

$$al + bm + cn + dp + eq + fr = 0 \tag{50}$$

à coefficients et à variables *complexes*.

Les vrilles qui satisfont les relations précédentes sont au nombre de ∞^6, c'est-à-dire deux fois plus nombreuses que les droites d'un complexe. L'hexasérie engendrée de la sorte est une espèce de *complexe imaginaire*, elle a toutes les propriétés du complexe ordinaire.

Par exemple, déterminons deux constantes A et B par les conditions [1]

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 , \\ AB &= ad + be + cf , \end{aligned}$$

et tirons les valeurs λ, μ, ν, ω, χ, ρ qui vérifient le système

$$\left.\begin{aligned} A\lambda + B\omega &= a , & A\omega + B\lambda &= d , \\ A\mu + B\chi &= b , & A\chi + B\mu &= e , \\ A\nu + B\rho &= c , & A\rho + B\nu &= f . \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Les six paramètres $(\lambda, \ldots \rho)$ sont les coordonnées d'une certaine

[1]) Si on avait $A = \pm B$, on se trouverait dans un cas exceptionne que je ne discute pas ici.

vrille Φ, car, comme on voit facilement, elles satisfont les identités caractéristiques

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \omega^2 + \chi^2 + \varrho^2 = 1 , \qquad \lambda\omega + \mu\chi + \nu\varrho = 0 .$$

En substituant les valeurs (51) dans l'équation de l'hexasérie, celle-ci devient

$$\begin{aligned} &A(\lambda l + \mu m + \nu n + \omega p + \chi q + \nu r) \\ &+ B(\lambda p + \mu q + \nu r + \omega l + \chi m + \varrho n) = 0 , \end{aligned}$$

soit encore, d'après les significations connues des invariants conjugués

$$A \cos \overline{11'} \cos \overline{22'} + B \sin \overline{11'} \sin \overline{22'} = 0 . \qquad (52)$$

Les quantités 11′ et 22′ représentent de nouveau les distances conjuguées qui séparent l'une de l'autre, la vrille mobile $V(l,\ldots r)$ engendrant notre complexe, et la vrille fixe $\Phi(\lambda,\ldots\rho)$ qui est l'*axe* de la première. Il faut d'ailleurs remarquer que le système (51) se reproduit quand on alterne A et B, à condition qu'on alterne en même temps, λ et ω, μ et χ, ν et ρ; de la sorte, au même complexe de vrilles correspondent deux autres vrilles, conjuguées l'une de l'autre, qui peuvent jouer indifféremment le rôle d'axes du complexe. Une fois tracé l'un des axes, et connus les paramètres A et B, l'équation (52) définit la propriété géométrique des vrilles du complexe, et donne le moyen de les construire toutes.

Dans le complexe linéaire de droites, toutes les droites du complexe qui passent en un point font partie du même plan, et toutes les droites du complexe qui appartiennent à un plan passent par un même point. Il faut donc que, *de la même manière, dans le complexe de vrilles, toutes les vrilles issues d'un corps fixe appartiennent à un même vrilloïde, et que, réciproquement, toutes les vrilles contenues dans un vrilloïde se rencontrent sur un corps fixe.*

Inutile de traiter les deux cas; il se correspondent par dualité. Car il est évident que si une vrille engendre une certaine polysérie, la vrille conjuguée engendre une autre polysérie, de la même dimension que la première, qui est la *polysérie conjuguée*. Prenons donc l'hypothèse où nos vrilles faisant partie du com-

plexe, doivent concourir sur un corps fixe; on peut prendre ce dernier comme corps initial du système de repère.

On a dans ce cas, pour les coordonnées du corps fixe,

$$x_0 = 1, \; x_1 = x_2 = x_3 = 0 \; ;$$

et par suite, à cause des conditions de rencontre (12),

$$p = 0 \, , \qquad q = 0 \, , \qquad r = 0 \, .$$

L'équation du complexe se réduit donc à la suivante

$$al + bm + cn = 0 \; ;$$

c'est celle d'une recticongruence, engendrée par l'axe de notre vrille mobile quand cet axe se déplace dans l'espace en rencontrant toujours à angle droit le vecteur a, b, c.

Et nous savons que si on bouge un corps, tel que P_0, de manière à lui faire décrire toutes les vrilles dont les axes forment une recticongruence, le lieu de ses différentes positions est un vrilloïde.

Il est clair qu'en continuant dans la même voie, on trouverait les analogues de la congruence linéaire, de l'hyperboloïde réglé, etc. Je n'insiste pas sur de pareilles généralisations; elles sont peu intéressantes en raison même de leur évidence.

XV. — L'heptasérie linéaire de vrilles

L'hexasérie que nous venons d'étudier sous le nom de *complexe de vrilles* n'est évidemment pas la plus générale parmi toutes les polyséries linéaires.

Il existe en effet ∞^8 vrilles dans l'espace, par suite la polysérie la plus générale doit contenir ∞^7 vrilles, ou être de septième dimension. L'espace réglé ne nous donne pas d'analogue immédiat pour cette *heptasérie linéaire fondamentale*. Pour l'obtenir, il faut dissocier les coordonnées complexes $l, \ldots r$ [1], en leurs parties réelles et imaginaires, ainsi

$$l = l' + il'' \, , \qquad r = r' + ir'' \, , \ldots \, ,$$

[1] On pourrait, bien entendu, employer au même but les coordonnées plückériennes sous leur seconde forme (L... R).

puis écrire entre les 12 quantités (l'... r'') une équation linéaire à coefficients réels, telle que

$$\left.\begin{array}{l} a'l' + a''l'' + b'm' + b''m'' + c'n' + c''n'' \\ + d'p' + d''p'' + e'q' + e''q'' + f'r' + f''r'' = 0 \ . \end{array}\right\} \quad (53)$$

Par le même partage du réel et de l'imaginaire, les conditions

$$l^2 + m^2 + n^2 + p^2 + q^2 + r^2 = 1 \ , \qquad \text{et} \qquad lp + mq + nr = 0 \ ,$$

donnent les trois combinaisons homogènes

$$\left.\begin{array}{l} l'l'' + m'm'' + n'n'' + p'p'' + q'q'' + r'r'' = 0 \ , \\ l'p' - l''p'' + m'q' - m''q'' + n'r' - n''r'' = 0 \ , \\ l'p'' + l''p' + m'q'' + m''q' + n'r'' + n''r' = 0 \ , \end{array}\right\} \quad (54)$$

et la combinaison non homogène

$$\left.\begin{array}{l} l'^2 + m'^2 + n'^2 + p'^2 + q'^2 + r'^2 \\ - l''^2 - m''^2 - n''^2 - p''^2 - q''^2 - r''^2 = 1 \ . \end{array}\right\} \quad (54')$$

Il s'agit tout d'abord de définir la propriété géométrique que traduit l'équation (53) de l'heptasérie linéaire.

A cet effet rappelons que deux vrilles quelconques V (l,... r) et Φ (λ,... ρ) possèdent comme invariant la quantité

$$(l + \varepsilon p)(\lambda + \varepsilon\omega) + (m + \varepsilon q)(\mu + \varepsilon\chi) + (n + \varepsilon r)(\nu + \varepsilon\varrho) \ ,$$

laquelle est *complexe* dans un double sens. En effet, chacune des coordonnées plückériennes l,... r ou λ,... ρ, est complexe comme contenant l'imaginaire i; en outre, l'indéterminée ε qui figure dans l'invariant peut y être remplacée par une quelconque des valeurs ± 1.

Désignons par A, et B, les distances conjuguées des deux vrilles, autrefois représentées par les notations $\overline{11'}$ et $\overline{22'}$, et mettons en évidence les parties réelles et imaginaires de ces quantités, sous la forme

$$\mathrm{A} = \mathrm{A}' + i\mathrm{A}'' \ , \qquad \mathrm{B} = \mathrm{B}' + i\mathrm{B}'' \ ;$$

de la sorte A′ et A″, par exemple, mesurent respectivement le glissement et la rotation par le moyen desquels les corps 1 et 1′,

qui se trouvent aux extrémités d'une des vrilles normales, viennent s'appliquer l'un sur l'autre.

Dans les deux invariants distincts (39) et (40), ou

$$\cos A \cos B = l\lambda + m\mu + n\nu + p\omega + q\chi + r\varrho = \sum l\lambda \ ,$$
$$\sin A \sin B = l\omega + m\chi + n\varrho + p\lambda + q\mu + n\nu = \sum l\omega \ ,$$

séparons le réel d'avec l'imaginaire, il vient

$$\left.\begin{aligned}
&\cos A' \cos B' \operatorname{ch} A'' \operatorname{ch} B'' - \sin A' \sin B' \operatorname{sh} A'' \operatorname{sh} B'' \\
&\qquad = \sum (l'\lambda' - l''\lambda'') \ , \\
&\cos A' \sin B' \operatorname{ch} A'' \operatorname{sh} B'' + \sin A' \cos B' \operatorname{sh} A'' \operatorname{ch} B'' \\
&\qquad = -\sum (l'\lambda'' + l''\lambda') \ , \\
&\sin A' \sin B' \operatorname{ch} A'' \operatorname{ch} B'' - \cos A' \cos B' \operatorname{sh} A'' \operatorname{sh} B'' \\
&\qquad = \sum (l'\omega' - l''\omega'') \ , \\
&\sin A' \cos B' \operatorname{ch} A'' \operatorname{sh} B'' + \cos A' \sin B' \operatorname{sh} A'' \operatorname{ch} B'' \\
&\qquad = \sum (l'\omega'' + l''\omega') \ .
\end{aligned}\right\} \quad (55)$$

Désignons par $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ les quatre combinaisons qui figurent aux premiers membres des équations précédentes, par α, β, γ, δ, quatre coefficients réels quelconques ; si la vrille $\Phi(\lambda \ldots, \rho)$ est donnée de position, et que la vrille V $(l, \ldots r)$ soit mobile dans l'espace, il est clair qu'en imposant à cette dernière une condition de la forme

$$\alpha\mathfrak{a} + \beta\mathfrak{b} + \gamma\mathfrak{c} + \delta\mathfrak{d} = 0 \ , \qquad (56)$$

le lieu engendré par la vrille V est toujours une heptasérie fondamentale du type (53).

En outre, tous les éléments de l'heptasérie (56) peuvent être déterminés géométriquement. Ce dernier point résulte du fait que l'équation (56) définit une des quantités A', A'', B', B'' en fonction des trois autres. D'ailleurs nous savons construire toutes les vrilles dont les distances conjuguées à une vrille donnée sont connues.

Reste à savoir si l'équation géométrique (56) donne la définition générale de *toutes* les heptaséries linéaires, ou bien, si dans l'ensemble de ces dernières, elle ne représente qu'un simple cas particulier.

C'est la première hypothèse qui est la bonne. Pour établir ce point, il faut partir de la formule générale (53), où les coefficients $a', \ldots f''$ sont les données, et amener cette équation à la forme (56), en déterminant les constantes α, β, γ, δ ainsi que les coordonnées de la vrille fixe $\Phi(\lambda \ldots \rho)$ qui doit servir d'axe à l'heptasérie.

Dans ce but, écrivons les équations d'identification. On les voit se partager en trois doubles paires respectivement symétriques par rapport aux couples de variables l et p, m et q, n et r. Voici la première paire :

$$\left.\begin{aligned} \alpha\lambda' - \beta\lambda'' + \gamma\omega' + \delta\omega'' &= a' , \\ -\alpha\lambda'' - \beta\lambda' - \gamma\omega'' + \delta\omega' &= a'' , \\ \alpha\omega' - \beta\omega'' + \gamma\lambda' + \delta\lambda'' &= d' , \\ -\alpha\omega'' - \beta\omega' - \gamma\lambda'' + \delta\lambda' &= d'' . \end{aligned}\right\} \quad (57)$$

Ce sont ces formules et leurs analogues qui doivent fournir les inconnues $(\lambda' \ldots \rho'')$ et α, β, γ, δ. Si on leur adjoint les relations, semblables à (54) et (54'), qui doivent exister entre les coordonnées de la vrille $\Phi(\lambda' \ldots \rho'')$, le nombre des équations écrites est égal à celui des inconnues, 16 des deux côtés. Le problème est déterminé.

Pour résoudre effectivement le système (57), remarquons les combinaisons

$$\left.\begin{aligned} (\alpha + \beta i)(\lambda' + \lambda'' i) + (\gamma - \delta i)(\omega' + \omega'' i) &= a' - ia'' , \\ (\alpha + \beta i)(\omega' + \omega'' i) + (\gamma - \delta i)(\lambda' + \lambda'' i) &= d' - id'' , \end{aligned}\right\} \quad (58)$$

et leurs congénères.

Soit, pour abréger

$$a = a' - ia'' , \qquad d = d' - id'' , \qquad \lambda = \lambda' + \lambda'' i ,$$
$$\omega = \omega' + \omega'' i , \qquad \Lambda = \alpha + \beta i , \qquad \Pi = \gamma - \delta i , \ldots ;$$

posons encore $\eta^2 = 1$, ou $\eta = \pm 1$; alors les trois systèmes analogues à (58) se résument dans cet autre système

$$\left.\begin{aligned} (\Lambda + \Pi\eta)(\lambda + \eta\omega) &= a + d\eta , \\ (\Lambda + \Pi\eta)(\mu + \eta\chi) &= b + e\eta , \\ (\Lambda + \Pi\eta)(\nu + \eta\varrho) &= c + f\eta . \end{aligned}\right\} \quad (59)$$

Nous savons que les inconnues $\lambda, \ldots \rho$ doivent vérifier les conditions

$$\sum (\lambda^2 + \omega^2) = 1 , \qquad \sum \lambda\omega = 0 ,$$

ou encore

$$\sum (\lambda + \eta\omega)^2 = 1 ;$$

en comparant cette relation avec le système (59), on voit que les indéterminées $\Lambda = \alpha + \beta i$, $\Pi = \gamma - \delta i$ ont à vérifier l'équation

$$(\Lambda + \Pi\eta)^2 = (a + d\eta)^2 + (b + e\eta)^2 + (c + f\eta)^2 ,$$

pour les deux valeurs $\eta = \pm 1$.

La formule précédente contient la solution du problème. En décomposant, pour chaque valeur de η, les deux membres en leurs parties réelles et imaginaires, on trouvera les inconnues Λ, Π puis α, β, γ, δ au moyen de deux extractions de racines carrées.

Des quatre valeurs distinctes qu'on trouve ainsi pour Λ et Π, deux ne se différencient que par un changement de signe, lequel est insignifiant. L'autre choix pour le signe des deux radicaux correspond à la transposition des quantités Λ et Π ; d'après le système (59), la dite transposition s'accompagne de celle des quantités λ, μ, ν, contre leurs conjuguées p, q, r.

Et ainsi, *toute heptasérie linéaire de vrilles admet comme définition géométrique la relation* (56). *Cette représentation est possible de deux manières, l'axe de l'heptasérie pouvant toujours être échangé contre son conjugué.*

De là, comme conséquence immédiate, l'équation réduite de l'heptasérie linéaire.

Prenons comme corps initial du système de repère un des corps contenus dans la vrille Φ $(\lambda, \ldots \rho)$, et plaçons l'axe OX_1 du trièdre T suivant l'axe de cette même vrille. Ces prescriptions nous donnent, pour les deux valeurs du signe $\pm$,

$$\lambda \pm \omega = 1 , \qquad \mu \pm \chi = 0 , \qquad \nu \pm \varrho = 0 ,$$

ou encore

$$\lambda' = 1 , \qquad \lambda'' = \mu' = \mu'' = \ldots \omega' = \omega'' = \ldots \varrho' = \varrho'' = 0 .$$

Ainsi les valeurs $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, se réduisent respectivement à l', l'', p', p'', et l'équation de l'heptasérie devient elle-même

$$a'l' + a''l'' + d'p' + d''p'' = 0 ,$$

ou encore, si on préfère exprimer cette équation en fonction des coordonnées plückériennes sous leur seconde forme [1]

$$a''\mathrm{L}' + a'\mathrm{L}'' - b''\mathrm{P}' - b'\mathrm{P}'' = 0 . \tag{60}$$

J'écrirai encore cette équation comme suit

$$(a\mathrm{L})'' = (b\mathrm{P})'' , \tag{61}$$

en posant $a = a' + a''i$, $b = b' + ib''$, et en désignant par $(xy)''$ la partie imaginaire d'un produit de deux facteurs complexes.

Pour terminer cette rapide esquisse des propriétés de l'heptasérie linéaire, je vais en étudier d'un peu plus près la structure, en partant de la formule réduite (60) ou (61).

Cherchons le lieu des vrilles qui font partie de l'heptasérie et contiennent en même temps un corps donné quelconque; désignons par C le corps, et par x_k ses quatre coordonnées complexes.

Nous avons vu au paragraphe X, formules (18), comment s'exprime le fait que C est l'un des corps de la vrille V (L,... R). En transportant dans l'équation de l'heptasérie (60) les valeurs des quantités P' et P'', déduites de la première des formules (18), il est clair que le résultat sera de la forme

$$\alpha'\mathrm{L}' + \alpha''\mathrm{L}'' + \beta'\mathrm{M}' + \beta''\mathrm{M}'' + \gamma'\mathrm{N}' + \gamma''\mathrm{N}'' = 0 , \tag{62}$$

et ceci est l'équation d'un complexe linéaire de droites [2].

Donc, *toutes les vrilles de l'heptasérie linéaire qui passent par un corps* C *donné à volonté, admettent pour axes les droites d'un certain complexe linéaire* Γ. *Le complexe étant construit, il suffira de vriller le corps* C *autour de ses différentes arêtes pour*

[1]) On a donc $\mathrm{L}=l+p$, $\mathrm{P}=l-p$, etc., et, comme toujours, $\mathrm{L}=\mathrm{L}'+i\mathrm{L}''$.

[2]) La même propriété aurait lieu si on cherchait le lieu de l'axe des vrilles, non plus dans l'espace, mais dans le corps initial P_0.

obtenir l'ensemble des ∞^3 *vrilles de l'heptasérie qui rencontrent* C.

La propriété qui correspond à la précédente par dualité s'énonce: *toutes les vrilles de l'heptasérie qui sont contenues dans un vrilloïde donné admettent pour axes les arêtes d'un certain complexe linéaire* Γ'. Qu'on vrille le pôle du vrilloïde autour de toutes les arêtes du nouveau complexe, puis qu'on retourne bout pour bout chacune des vrilles ainsi engendrées, le système final sera contenu en entier tant dans l'heptasérie que dans le vrilloïde.

Reprenons le corps C et le complexe Γ qui lui est associé par l'intermédiaire de l'heptasérie fondamentale. Si C varie, Γ varie de son côté, et comme C occupe ∞^6 positions, on trouve aussi ∞^6 complexes Γ. Or l'espace ne renferme que ∞^5 complexes au total; il faut donc que le même complexe se reproduise au moins ∞^1 fois.

En réalité, chacun des complexes linéaires associés à l'heptasérie se reproduit à ∞^2 exemplaires; c'est dire que l'ensemble de tous ces complexes n'en renferme que ∞^4 au lieu de ∞^5.

Pour mettre ceci en évidence, remarquons que les constantes α', $\alpha''\ldots\gamma''$ qui caractérisent Γ dépendent du corps C, c'est-à-dire des coordonnées x_k, par l'intermédiaire de la première équation (18). Et dans celle-ci figurent seulement les trois combinaisons

$$\left.\begin{aligned} u = x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 , \qquad v = 2(x_0x_3 + x_1x_2) , \\ w = 2(x_1x_3 - x_0x_2) , \end{aligned}\right\} \quad (63)$$

entre lesquelles règne l'identité

$$u^2 + v^2 + w^2 = (x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 = 1 .$$

Ainsi l'équation de Γ contient deux paramètres complexes, et non pas trois, et au total, nous avons quatre constantes réelles au lieu des six qu'on attendait.

Les égalités (63) entraînent les conséquences

$$\left.\begin{aligned} vx_0 + wx_1 - (1 + u)x_3 = 0 , \\ wx_0 - vx_1 + (1 + u)x_2 = 0 . \end{aligned}\right\} \quad (64)$$

Ce sont les équations d'une vrille Ψ, fonction du couple u, v.

Quand le corps C décrit la précédente vrille, le complexe associé à ce corps par l'intermédiaire de l'heptasérie ne change pas.

Comme on a, pour l'équation du complexe Γ,

$$(aL)'' = (bP)'' , \qquad \text{et} \qquad P = Lu + Mv + Nw ,$$

c'est-à-dire

$$(UL)'' + (VM)'' + (WN)'' = 0 , \tag{65}$$

avec

$$U = bu - a , \qquad V = bv , \qquad W = bw , \tag{66}$$

il est facile, d'après ces formules, de se faire une idée de la construction de l'heptasérie fondamentale.

Rappelons que les variables sont les deux quantités *complexes* u et v, et que, pour abréger, on a fait $w = \sqrt{1 - u^2 - v^2}$.

Prenons sur chaque vrille Ψ (u, v, w), d'équations (64), un corps quelconque, bien déterminé; il suffira de vriller ce corps autour des ∞^3 arêtes du complexe associé (65), pour obtenir toutes les vrilles de l'heptasérie linéaire; elles sont au nombre de $\infty^4 \times \infty^3 = \infty^7$, comme il convient. L'heptasérie se reproduirait à ∞^2 exemplaires, si au lieu de retenir un seul des corps de chaque vrille Ψ, on employait, dans la construction, tous les corps appartenant à chacune.

A l'égard de la vrille Ψ, il est aisé de voir que ses coordonnées plückériennes valent

$$L = u , \qquad M = v , \qquad N = w ;$$
$$P = 1 , \qquad Q = 0 , \qquad R = 0 ,$$

tandis que la vrille Φ qui occupe l'axe de l'heptasérie a pour coordonnées

$$L = 1 , \qquad M = 0 , \qquad N = 0 ;$$
$$P = 1 , \qquad Q = 0 , \qquad R = 0 .$$

De là résulte immédiatement que la vrille Ψ est superposable à la vrille-axe Φ; on l'obtient en transportant cette dernière dans l'espace, sans déformation, de manière que son axe tombe sur un vecteur quelconque u, v, w, choisi à volonté.

Les explications précédentes donnent une idée suffisante du mode de construction de l'heptasérie linéaire; cette construc-

tion se rattache intimement à celle du faisceau (65) de complexes linéaires Γ, lequel est du second degré.

Mais de plus amples détails sur cette question spéciale, en m'écartant des éléments de la théorie des corps solides, des vrilles et des vrilloïdes, m'entraîneraient au delà des bornes que je veux conserver à ce mémoire; son seul objet était l'étude des principes de la Géométrie imaginaire.