

# La consonance polyphasée et son rôle dans les transformateurs statiques de fréquence

Autor(en): **Korda, Désiré**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Archives des sciences physiques et naturelles**

Band (Jahr): **42 (1916)**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-743304>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# LA CONSONANCE POLYPHASÉE

ET SON ROLE

DANS LES TRANSFORMATEURS STATIQUES DE FRÉQUENCE<sup>(1)</sup>

PAR

**Désiré KORDA**, ingénieur

Professeur agrégé à l'Ecole polytechnique fédérale à Zurich

---

Il s'agit d'un principe général applicable à toute une catégorie de vibrations et dont j'ai pu me rendre compte au cours d'un travail théorique, entrepris sur les transformateurs statiques de fréquence, c'est-à-dire d'appareils réalisant par induction, sans mouvement aucun, la multiplication de la périodicité d'un courant alternatif. Commençons par un court résumé, indiquant le développement de ces appareils.

1. — Le besoin de dispositifs permettant la transformation de la fréquence se faisait sentir dès l'application des courants alternatifs à la traction des chemins de fer. En effet, les moteurs de ces derniers exigent, pour diverses raisons, l'emploi de fréquences relativement basses, ne dépassant pas 16 à 17 périodes par seconde (exactement le tiers de 50), tandis que les appareils d'éclairage, aussi bien les lampes à incandescence que les lampes à arc, fonctionnent beaucoup mieux à 50 périodes, car, à une telle fréquence, le vacillement de leur lumière devient presque, sinon tout à fait imperceptible à l'œil. Il s'agissait donc de pouvoir tripler le nombre de périodes par seconde.

Au précédent problème devaient s'ajouter les questions sou-

<sup>1)</sup> Travail communiqué à la Section de physique de la Société helvétique des sciences naturelles, le 8 août 1916 (réunion annuelle tenue à Schuls-Tarasp dans l'Engadine).

levées par la télégraphie sans fil. On sait qu'en radiotélégraphie on emploie des courants de très haute fréquence dont la périodicité dépasse 30,000 et même 100,000 par seconde. Or la fréquence des alternateurs ordinaires est fortement limitée par la vitesse périphérique ainsi que par le nombre de pôles. La réalisation des chiffres ci-dessus rencontre donc de très grandes difficultés.

L'auteur de la présente note a montré le premier, dans un travail <sup>(1)</sup> publié en 1893, la manière dont on peut tripler la fréquence sans changer le nombre de tours et le nombre de pôles d'une dynamo. Si l'on prend une génératrice polyphasée excitée par un courant de fréquence  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  et dont le rotor tourne avec la vitesse angulaire  $\omega$ , le champ magnétique aura une vitesse relative  $-2\omega$  par rapport à l'induit et par conséquent une vitesse  $\omega - 2\omega = -\omega$  par rapport au stator. Par contre, en renversant le sens de la rotation du champ — facile à obtenir par le croisement de deux des phases dans un deuxième rotor calé sur le même arbre que le premier — on obtient une vitesse  $\omega + 2\omega = 3\omega$  pour le champ par rapport au stator. Les enroulements de ce dernier deviendront donc le siège d'un courant de fréquence  $3\omega$ .

Le principe a été appliqué depuis par M. Béthenod à la construction d'un alternateur à haute fréquence, en accouplant en cascade une série d'alternateurs tournant à la vitesse  $\omega$ , et par M. Goldschmidt qui obtient le même effet par induction directe au lieu de connexions croisées. La disposition Goldschmidt ne diffère qu'en apparence du groupement Béthenod, de quatre alternateurs en cascade. Les deux sont en réalité équivalente au point de vue du rendement et de la puissance spécifique ainsi que l'a montré Marius Latour <sup>(2)</sup> dans une note sur la production industrielle de courants à haute fréquence. Il est intéressant à signaler dans cette même note l'observation suivante. En 1904 le commandant Ferrié, l'organisateur bien connu du poste de T. S. F. de la Tour Eiffel, lui posa le problème

<sup>1)</sup> D. Korda, *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, Paris, tome CVI.

<sup>2)</sup> *Lumière électrique*, 1912, p. 353.

des alternateurs à haute fréquence et il ajoute: « Au moment où nous allons nous intéresser à son exploitation, on nous signala l'existence de certaines antériorités (il s'agit évidemment entre autres de ma note de 1893 à l'Académie des sciences) et nous ne donnâmes pas de suite à nos recherches. »

2. — Depuis lors, d'autres inventeurs ont encore simplifié la solution du problème en ayant recours pour la multiplication de la fréquence à des transformateurs « statiques ». Le principe sur lequel sont basés ces appareils est dû à M. Epstein (1902), directeur de la société Lahmeyer, à Francfort sur le Mein <sup>(1)</sup>, qui, le premier, a réussi à doubler la fréquence dans un appareil sans mouvement aucun. La réalisation pratique en est due au comte Arco, directeur de la Société Telefunken <sup>(2)</sup> et d'autre part à Maurice Joly, à Paris <sup>(3)</sup> et au professeur Vallauri, à Naples <sup>(4)</sup>. Tous ces appareils fonctionnaient à courant monophasé. Des appareils triphasés ont été combinés sur le même principe par Spinelli <sup>(5)</sup> et déjà auparavant par Taylor <sup>(6)</sup>; tous les deux recoururent en même temps à la réunion des trois phases des courants en une seule phase.

La méthode d'Epstein est basée sur les effets d'une aimantation dissymétrique du fer produite par l'adjonction d'un enroulement à courant continu à ceux de courants alternatifs. Le dispositif en est le suivant :

Le noyau de fer d'un transformateur porte deux enroulements dont l'un à courant continu d'une telle intensité que le noyau de fer du transformateur en est fortement saturé. L'autre enroulement reçoit le courant alternatif primaire de  $n$  périodes par seconde. La demi-onde de ce dernier qui est du même sens que le courant continu ne peut plus guère renforcer, sinon d'un degré insignifiant, le flux magnétique du noyau saturé (fig. 1), par contre la demi-onde suivante, d'un sens opposé,

<sup>1)</sup> Brevet allemand D. R. P. 149761 (1902).

<sup>2)</sup> Graf von Arco. Conférence tenue à la Société des Sciences naturelles à Münster 1912.

<sup>3)</sup> *Comptes rendus de l'Ac. des Sc. de Paris*, 1911. vol. 152, p. 699.

<sup>4)</sup> *Atti della Associazione Elettrotecnica Italiana*, 1911, vol. 15, p. 391.

<sup>5)</sup> *Elettricista*, 1912, p. 215.

<sup>6)</sup> *Journal of the Institution of Electrical Engineers*, 1914, p. 700.

réduira d'autant mieux le flux d'induction magnétique en question. Nous obtenons, par conséquent, une courbe très aplatie pour la première demi-période et, par contre, une courbe très pointue pour la deuxième période du flux magnétique. Si nous faisons emploi de deux appareils semblables dont les bobines primaires sont connectées en série et les bobines secondaires en opposition, nous obtiendrons dans le circuit secondaire un courant de  $2n$  périodes par sec. Nous réussissons ainsi à doubler la fréquence au moyen d'un dispositif magnétique dissymétrique.

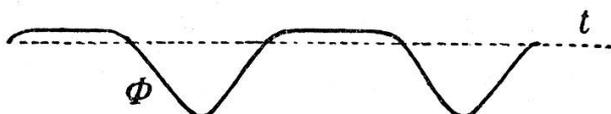


Fig. 1

Le Comte d'Arco a transformé par ce moyen un courant de 7,500 périodes par sec. (longueur d'onde  $\lambda = 40,000^m$ ) en un courant de 15,000 périodes avec un rendement de 85 %, et par une deuxième transformation en un courant de 30,000 périodes avec un rendement d'ensemble de 60 %.

3. — Modifions maintenant le dispositif de telle sorte que le noyau de l'un des deux transformateurs soit saturé, non seulement pour l'une des demi-ondes, mais à demeure aussi bien pour la demi-onde positive que pour la demi-onde négative et que, d'autre part, le noyau de l'autre transformateur reste continuellement très loin de la saturation. Dans ce cas la courbe représentative du flux magnétique du premier transformateur aura une forme périodique plate, tandis que celle du deuxième une forme pointue. Ce qui est remarquable, c'est qu'alors la différence des ordonnées simultanées de ces deux courbes sera représentée par une courbe périodique d'une fréquence  $3n$ , c'est-à-dire d'une périodicité trois fois plus grande que le courant primitif (fig. 2). C'est le phénomène sur lequel est basé le triplicateur de fréquence de Joly<sup>(1)</sup>.

Comme la force électromotrice extérieure de fréquence  $n$  qui agit aux bornes de l'ensemble formé par les circuits primaires

<sup>1)</sup> *Comptes rendus de l'Ac. des sciences*, Paris, 1911, vol. 152, p. 856.

des deux transformateurs est normalement de forme sinusoïdale, il s'ensuit que la somme des dites ordonnées doit également suivre la loi sinusoïdale de fréquence  $n$ , tandis que la différence, ainsi que nous venons de le voir, présente une fréquence  $3n$ .

Spinelli et Taylor n'ont pas recours à une excitation par courant continu pour obtenir la saturation. Ils y arrivent uniquement par les faibles dimensions données à la section du noyau par rapport à la longueur du circuit magnétique. En même temps ils remplacent le transformateur saturé par une bobine de self à noyau saturé placée dans chacune des phases en série avec le primaire du transformateur non saturé. Spinelli préfère la connexion des trois phases primaires en étoile, Taylor, par contre, celle en triangle.

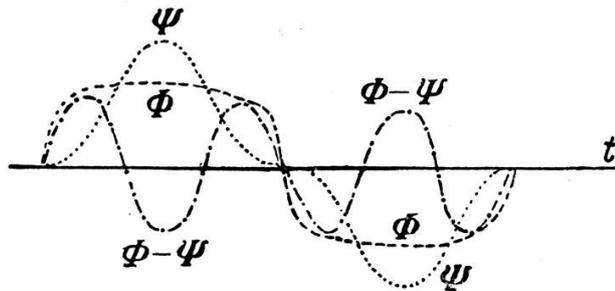


Fig. 2

4. — En élaborant la théorie de ces appareils, j'ai cherché à en généraliser le dispositif de façon à pouvoir multiplier la fréquence d'un courant d'un nombre entier quelconque. J'ai réussi à résoudre ce problème pour le cas d'un *nombre impair* quelconque, ainsi qu'il est exposé ci-dessous.

Envoyons les courants sinusoïdaux d'une génératrice polyphasée d'un nombre de phases impair soit  $2k + 1$  dans les bobines primaires correspondantes, au nombre de  $2k + 1$ , d'un transformateur normal. Le flux magnétique total qui en résultera dans le noyau du transformateur sera continuellement nul, comme le courant au point neutre d'un réseau polyphasé normal conformément à la loi de Kirchhoff. La démonstration en est, d'ailleurs, très simple. En effet, la somme des sinus des angles successivement décalés au centre d'un polygone fermé

est nul. Nous n'avons qu'à additionner les  $2k + 1$  phases que voici :

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi_0 \sin \omega t, \\ \Phi_2 &= \Phi_0 \sin \left( \omega t - \frac{2\pi}{2k+1} \right), \\ &\vdots \\ \Phi_{2k+1} &= \Phi_0 \sin \left( \omega t - 2k \frac{2\pi}{2k+1} \right), \end{aligned} \right\} (1)$$

où  $\Phi_0$  est l'amplitude du flux et  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  la fréquence circulaire pour la durée de période T.

Nous obtenons alors la somme suivante :

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_{2k+1} &= \Phi_0 \sum_{n=0}^{n=2k} \sin \left( \omega t - n \frac{2\pi}{2k+1} \right) \\ &= \Phi_0 \sin \omega t \left( 1 + \sum_{n=1}^{n=2k} \cos n \frac{2\pi}{2k+1} \right) - \Phi_0 \cos \omega t \sum_{n=1}^{n=2k} \sin n \frac{2\pi}{2k+1}. \end{aligned} \right\} (2)$$

Or, on a pour les angles au centre du polygone de  $2k + 1$  cotés de part et d'autre

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{2\pi}{2k+1} &= - \sin 2k \frac{2\pi}{2k+1}, \\ \sin 2 \frac{2\pi}{2k+1} &= - \sin \overline{2k-1} \frac{2\pi}{2k+1}, \\ &\vdots \end{aligned} \right\} (3)$$

Nous voyons donc que les  $2k$  termes de la somme s'annulent deux par deux, par conséquent toute la somme disparaît.

De même on peut se rendre compte que la somme des cos ci-dessus est égale à  $-1$  et que, par conséquent, la quantité indiquée sous parenthèses disparaît également.

On a donc pour des fonctions sinusoïdales pures :

$$\Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_{2k+1} = 0. \quad (4)$$

5. — Si nous réussissons à déformer la courbe sinusoïdale par la superposition de harmoniques supérieures, la somme des  $2k + 1$  phases ne s'annulera plus continuellement, ainsi que nous allons le démontrer tout à l'heure. Nous pouvons obtenir de telles courbes déformées, de forme aplatie pour le flux magnétique en réduisant par exemple jusqu'à la saturation la section du noyau de fer d'un transformateur. Ces courbes peu-

vent alors être représentée de la manière bien connue par une série de Fourier. Nous pouvons ajouter d'avance que cette série ne contiendra que les termes en sinus, à l'exclusion de ceux en cosinus et que les termes à index impair. En effet la demi-onde positive est l'image symétrique de la demi-onde négative et d'autre part chaque demi-onde se compose de deux quarts d'onde symétriques ce qui entraîne les conditions ci-dessus indiquées pour la série de Fourier. En désignant par  $\Phi_{01}, \Phi_{03} \dots \Phi_{0(2k+1)} \dots$  les amplitudes des fonctions harmoniques de la série, autrement dit les constantes des termes en question, nous pouvons écrire pour les  $2k + 1$  phases du flux magnétique :

$$\begin{aligned}
 \Phi_1(\omega t) &= \Phi_{01} \sin(\omega t + \varphi_1) + \Phi_{03} \sin 3(\omega t + \varphi_3) + \dots \\
 &\quad + \Phi_{0(2k+1)} \sin \overline{2k+1}(\omega t + \varphi_{2k+1}) + \dots, \\
 \Phi_2(\omega t) &= \Phi_{01} \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{2k+1} + \varphi_1\right) \\
 &\quad + \Phi_{03} \sin 3\left(\omega t - \frac{2\pi}{2k+1} + \varphi_3\right) \dots \\
 &\quad + \Phi_{0(2k+1)} \sin \overline{2k+1}\left(\omega t - \frac{2\pi}{2k+1} + \varphi_{2k+1}\right) + \dots, \\
 &\quad \vdots \\
 \Phi_{2k+1}(\omega t) &= \Phi_{01} \sin\left(\omega t - 2k \frac{2\pi}{2k+1} + \varphi_1\right) \\
 &\quad + \Phi_{03} \sin 3\left(\omega t - 2k \frac{2\pi}{2k+1} + \varphi_3\right) + \dots \\
 &\quad + \Phi_{0(2k+1)} \sin \overline{2k+1}\left(\omega t - 2k \frac{2\pi}{2k+1} + \varphi_{2k+1}\right) + \dots.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Nous devons examiner maintenant, si la somme des valeurs simultanées de ces phases est différente de zéro et, dans le cas affirmatif, quelle est la fonction qui peut la représenter.

Nous additionnons donc par colonnes et obtenons comme résultat :

$$\begin{aligned}
 \sum_{\nu=1}^{\nu=2k+1} \Phi_{\nu}(\omega t) &= \Phi_{01} \sum_{\nu=0}^{\nu=2k} \sin\left(\omega t - \nu \frac{2\pi}{2k+1} + \varphi_1\right) \\
 &\quad + \Phi_{03} \sum_{\nu=0}^{\nu=2k} \sin 3\left(\omega t - \nu \frac{2\pi}{2k+1} + \varphi_3\right) \dots \\
 &\quad + \Phi_{0(2k+1)} \sum_{\nu=0}^{\nu=2k} \sin \overline{2k+1}\left(\omega t - \nu \frac{2\pi}{2k+1} + \varphi_{2k+1}\right) \dots.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Il est facile à remarquer que la somme

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=2k} \sin \overline{2k+1}(\omega t - \nu \frac{2\pi}{2k+1} + \varphi_{2k+1}), \quad (7)$$

qui forme le coefficient de l'amplitude  $\Phi_{0(2k+1)}$ , présente la particularité que tous ses  $2k+1$  termes ont la même valeur. En effet, ces termes ne diffèrent les uns des autres que par des multiples entiers de  $2\pi$ , puisque aussi bien au numérateur qu'au dénominateur de  $2\pi$  figure le nombre  $2k+1$  qui, par conséquent, est éliminé. Nous avons donc des angles ne différant entre eux que des multiples de  $2\pi$ , dont le sinus, par conséquent, ne varie pas. Nous pouvons donc écrire :

$$\sum = (2k+1) \sin \overline{2k+1}(\omega t + \varphi_{2k+1}). \quad (8)$$

Le résultat est tout autre pour les autres sommes qui forment les coefficients des amplitudes  $\Phi_{01} \Phi_{03} \dots$ . En effet chacune d'elles est composée du sinus des angles différents entre eux de la même fraction de  $2\pi$  et correspondant bien à un polygone fermé. Leur valeur est donc nulle.

Il n'y a d'exception que pour les termes qui ont comme index un multiple impair quelconque du nombre  $2k+1$ , c'est-à-dire qui forment le coefficient de l'amplitude  $\Phi_{0(2\nu+1)(2k+1)}$ . Toutefois pour les vibrations dont nous nous occupons ici l'influence de ces termes devient négligeable.

Ainsi, par exemple, dans le cas de 11 phases la première harmonique supérieure subsistant pour le flux magnétique aurait 33 — fois plus de fréquence que le courant primaire à transformer, donc ne pourrait se faire valoir au-dessus de la vibration fondamentale rien qu'à cause de l'effet des courants de Foucault qu'elle produirait dans les tôles du noyau de notre transformateur.

Nous venons donc de démontrer qu'aussitôt que les courbes primaires ne sont pas sinusoïdales mais bien déformées par des harmoniques supérieures, la somme de  $2k+1$  phases, au lieu de disparaître, pourra être représentée par la fonction suivante :

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=2k+1} \Phi_{\nu}(\omega t) = (2k+1) \Phi_{0(2k+1)} \sin \overline{2k+1}(\omega t + \varphi_{2k+1}). \quad (9)$$

Nous obtenons donc par phase l'apport suivant au nombre de lignes de force magnétique du noyau de fer saturé :

$$\Phi_s = \Phi_{0(2k+1)} \sin \overline{2k+1}(\omega t + \varphi_{2k+1}). \quad (10)$$

C'est, comme on voit, *une fonction sinusoïdale simple dont la périodicité est  $2k + 1$  — fois plus grande que celle de la tension sinusoïdale primaire polyphasée dont nous sommes partis*. Nous pouvons donc constater que la transformation de courants polyphasés de  $2k + 1$  phases en un courant monophasé par l'addition des dites phases au moyen d'un transformateur à noyau de fer saturé conduit à un courant sinusoïdal d'une fréquence  $2k + 1$  fois plus grande que celle des courants à transformer. En définitif *le nombre impair des phases apparaît comme le coefficient de la multiplication de la périodicité*.

6. — Le résultat que nous venons d'établir paraît intéressant encore à un autre point de vue. En effet il nous rappelle la méthode dont on se sert pour analyser une courbe périodique déformée par des harmoniques supérieures, par exemple, la courbe du courant d'un circuit contenant un arc électrique. Là c'est le phénomène de résonance qui permet de faire ressortir la composante de fréquence  $n$  par exemple en constituant un circuit dont la fréquence d'oscillation propre due à la capacité et à l'inductivité choisies conformément à la formule de Thomson soit précisément le nombre  $n$  en question.

Par le dispositif qui fait l'objet de notre étude nous réalisons un phénomène de résonance analogue mais par des moyens différents notamment sans avoir à recourir à l'emploi de capacités. En effet, nous aussi nous faisons ressortir la fonction harmonique supérieure ayant par sec. une fréquence  $2k + 1$  fois plus élevée que les  $2k + 1$  courbes de phases déformées, toutefois l'organe qui nous facilite cette opération est uniquement un transformateur à noyau de fer saturé. Ce n'est pas, en réalité, un phénomène de résonance d'une exactitude mathématique, car les termes dont l'index est un multiple impair du nombre  $2k + 1$  continuent à subsister dans la série de Fourier résultant de notre addition (5.—). Toutefois au point de vue pratique ces termes ne présentent aucune espèce d'importance pour le résultat, quand il s'agit de phénomènes physiques

accompagnés d'effets de dégradation réduisant à néant l'influence des dits termes d'harmoniques supérieures.

Tel est le cas précisément quand il s'agit de flux magnétiques dans le noyau de fer du transformateur, où la dégradation est assurée par la production de courants de Foucault dans les tôles. Tel encore pour les courants à très haute fréquence dont l'effet s'annule par l'importance de la résistance apparente due à l'inductivité.

Néanmoins nous préférons laisser de côté la désignation « résonance » et le remplacer par celle de *consonance* pour le phénomène qui nous occupe et que nous proposons d'appeler, par la suite, la « *consonance polyphasée* ». Elle s'applique d'ailleurs à toute une catégorie de vibrations, aussi bien en mécanique qu'en acoustique, etc. Il suffit pour cela que la courbe périodique, au lieu d'être sinusoïdale, soit déformée par des harmoniques supérieures et se présente sous une forme aplatie ou, au contraire, pointue et que, d'autre part, en raison de phénomènes de dégradation d'énergie, aucune des harmoniques supérieures subsistantes dans la série résultante (avec, comme index, un multiple impair du nombre de phases) ne puisse se faire valoir.

En acoustique nous pourrions choisir comme exemple le cas de diapasons excités électriquement avec des déphasages convenables et dont l'amplitude puisse être entravée par une sorte de freinage mécanique ce qui introduirait les dites harmoniques supérieures dans la loi du mouvement périodique. La dégradation nécessaire résulterait de l'imperfection même de l'organe auditif humain (inertie des ossicules derrière le tympan). Un son plus élevé, correspondant à la multiplication de la fréquence en serait le résultat.

Il serait tentant d'envisager la possibilité de l'application du principe aux radiations également. Malheureusement nous sommes dans l'ignorance complète de la forme exacte des courbes de vibrations, ainsi que de la manière dont on pourrait déformer une vibration sinusoïdale caractérisant un rayon de lumière ou de chaleur radiante. Par contre nous pouvons supposer que l'imperfection de l'œil humain pourrait parfaitement suffire pour amener le phénomène de dégradation nécessaire à la mul-

tiplication de fréquence par le principe de la consonance polyphasée et de cette façon, par exemple, à la transformation d'un rayon infrarouge en rayon visible ou d'un rayon visible en rayon ultraviolet.

7. — Si nous avons pris à la place d'une génératrice polyphasée à  $2k + 1$  phases une autre à un nombre pair de phases  $2k$  pour alimenter les bobines primaires de notre transformateur, nous aurions obtenu un tout autre résultat. En effet, dans ce cas tous les termes de la série (6) disparaîtraient sans exception, car au lieu de (8) nous serions arrivés à la somme suivante :

$$\sum_{\nu=10}^{\nu=12k} \sin 2k + 1(\omega t - \nu \frac{2\pi}{2k} + \varphi_{2k+1}). \quad (11)$$

Or nos séries de Fourier ne comportent que les termes avec index impair, par conséquent le numérateur pair de  $2\pi$  ne peut plus s'éliminer d'une façon générale comme à (7). Donc la formule (11) représente la somme des sinus correspondant à des angles centraux d'un polygone fermé et disparaît conformément à un théorème général bien connu et déjà cité plus haut.

Il s'ensuit que *l'emploi d'un nombre pair de phases ne peut pas convenir pour la multiplication de fréquence suivant le principe de la consonance polyphasée* et avec des courbes à quarts d'onde *symétriques*, car la somme des valeurs instantanées des phases est nulle à chaque instant tout comme pour le point neutre de courants polyphasés sinusoïdaux.

8. — Les dynamos que nous employons pour l'alimentation de nos transformateurs fournissent normalement une force électromotrice sinusoïdale aux bornes de nos appareils, par conséquent il est préférable de ne pas connecter directement un transformateur à noyau saturé à la dynamo, mais de le mettre en série soit avec une bobine de self pour chaque phase, comme le préconisent MM. Taylor et Spinelli soit avec un deuxième transformateur, non saturé, celui-là, comme le propose M. Joly.

Dans ce cas nous avons à faire à des courbes plates et à des fonctions périodiques correspondantes  $\Phi(\omega t)$  pour représenter le flux magnétique dans le noyau saturé et, de même, nous avons

des courbes pointues et des fonctions  $\Psi'(\omega t)$  pour le noyau non saturé. La somme de ces deux fonctions est, par définition, une simple fonction sinus représentant la loi de la variation de la tension aux bornes. On a donc pour chaque phase :

$$\Phi(\omega t) + \Psi(\omega t) = \Phi_0 \sin \omega t, \quad (12)$$

d'où l'on tire :

$$\Psi(\omega t) = \Phi_0 \sin \omega t - \Phi(\omega t). \quad (13)$$

En étendant cette relation à toutes les  $2k + 1$  phases et en additionnant les  $2k + 1$  équations ainsi obtenues, nous recevons du côté droit comme premier terme une somme de simples sinus d'angles centraux d'un polygone fermé dont nous savons (4) qu'elle disparaît et comme deuxième terme négatif l'expression (9) qui, par conséquent, est égale et de signe contraire à la somme résultant du côté gauche ci-dessus. On a donc en définitif :

$$\sum_{\nu=1k}^{2k+1} \Psi_{\nu}(\omega t) = - \sum_{\nu=1k}^{2k+1} \Phi_{\nu}(\omega t), \quad (14)$$

ce qui signifie que le flux d'induction magnétique résultant de la somme des ordonnées simultanées des courbes pointues suit la même loi, mais en sens contraire que celui correspondant aux courbes plates.

Il s'ensuit qu'en mettant en série deux transformateurs dont l'un à noyau saturé et l'autre loin de la saturation la transformation de courants primaires polyphasés de  $2k + 1$  phases en courant monophasé secondaire qui en résulte amène une multiplication de fréquence dont le facteur est précisément  $2k + 1$  c'est-à-dire le nombre des phases employées.

Comme le courant secondaire du premier transformateur est décalé de  $180^\circ$  par rapport à celui du deuxième transformateur, les bobines secondaires des deux transformateurs doivent être connectées en opposition et non en série pour ne pas annuler mutuellement leurs effets (fig. 3).

On peut conclure de la relation (12) encore au fait suivant. Les harmoniques supérieures qui existent dans les séries de Fourier représentant les fonctions  $\Phi$  et  $\Psi'$  y figurent avec des amplitudes égales et des angles de phases égaux mais avec des

signes contraires. C'est pourquoi disparaissent-elles dans la somme des deux fonctions de telle sorte que l'onde fondamentale  $\Phi_0 \sin \omega t$  subsiste seule comme résultat de l'addition.

On peut facilement se rendre compte que ces harmoniques supérieures appliquées dans un sens prêtent une forme aplatie à l'onde fondamentale et dans l'autre sens rendent cette dernière, par contre, pointue. C'est une relation analogue à celle existant entre le flux magnétique et la force électromotrice correspondante ou, d'une façon générale, entre une fonction périodique et sa dérivée. Si l'une des deux peut être représentée

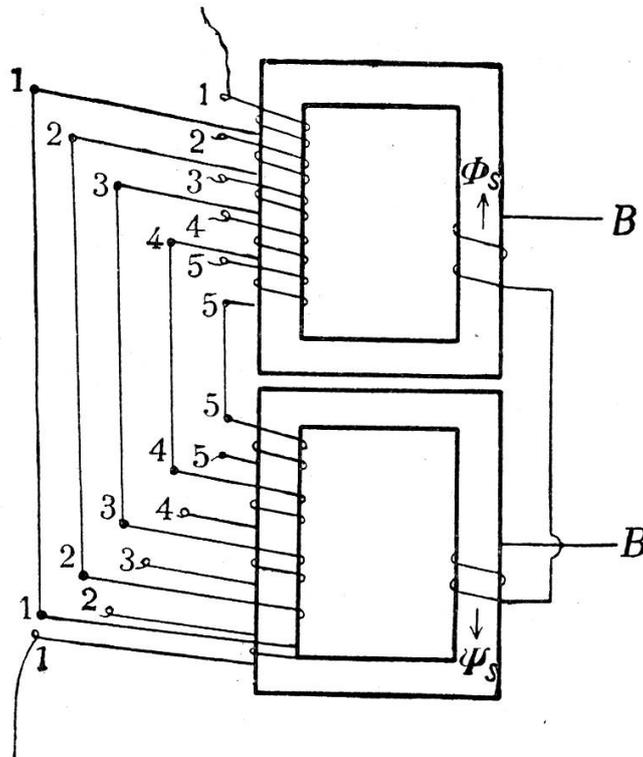


Fig. 3

par une courbe plate, à l'autre correspond une courbe pointue et réciproquement. Il n'y a d'exception que pour la simple courbe sinusoïdale qui, en l'absence de fonctions harmoniques supérieures, forme la limite et a comme dérivée, une ligne cosinusoïdale qui a exactement la même forme que la ligne sinusoïdale sauf que les deux sont décalées de  $90^\circ$  l'un par rapport à l'autre. La forme de la ligne sinusoïdale peut donc être considérée comme ni plate, ni pointue, mais bien formant la transition entre les deux.

9. — Pour terminer nous voulons encore donner sur un exemple choisi une démonstration élémentaire du théorème général indiqué en (5). En effet, tout en cherchant une bonne approximation nous pouvons supposer dans un but de simplification que chaque demi-onde de la courbe plate qui correspond à une des phases peut être représentée par un trapèze symétrique. Dans ce cas simple on n'a guère besoin de recourir aux séries de Fourier, car on peut établir par simple construction la courbe qui représente la somme des phases.

Comme exemple nous choisissons l'emploi d'une génératrice à cinq phases. D'ailleurs en pratique on doit limiter le nombre des conducteurs reliant la génératrice au transformateur, car, en choisissant un nombre élevé de phases, on arriverait à un dispositif trop compliqué. L'emploi de neuf ou de onze phases nous paraît suffisamment élevé même pour des puissances importantes et fournit un facteur suffisamment haut pour la multiplication de fréquence. En raison du nombre des conducteurs nécessaires il ne serait pas recommandable d'exagérer davantage le nombre des phases.

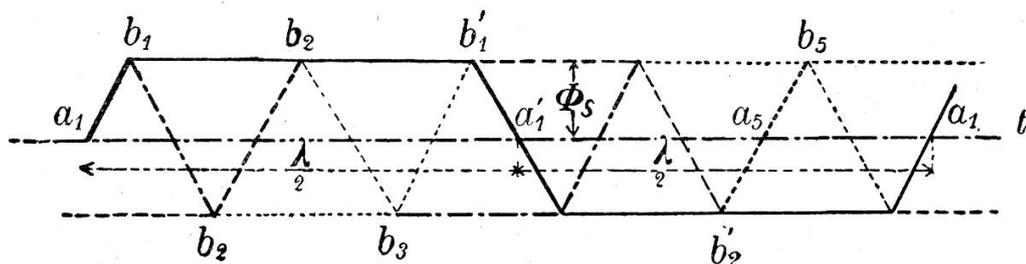


Fig. 4

La longueur de la base du trapèze choisi (fig. 4) est  $\frac{\lambda}{2}$ , la moitié de la longueur d'onde et sa hauteur la valeur  $\Phi_s$  du flux d'induction magnétique correspondant à la saturation. Pour simplifier encore le problème nous admettrons que pour le degré de saturation choisi les points de rencontre  $b, b'$  des côtés inclinés se trouvent précisément sur la droite  $y = \Phi_s$  parallèle à l'axe des abscisses.

Examinons maintenant la somme des ordonnées simultanées des 5 (ou en général  $2k + 1$ ) trapèzes en premier lieu aux points  $b$ , où tous les 5 (ou  $2k + 1$ ) ordonnées sont égales entre elles

soit  $= \pm \Phi_s$  et ensuite dans les autres endroits, où l'une des ordonnées est plus petite que  $\Phi_s$  à cause de l'inclinaison du côté correspondant du trapèze, tandis que les autres 4 (ou  $2k$ ) ordonnées restent  $= \pm \Phi_s$ . Comme points spéciaux nous pouvons indiquer les points d'intersection des côtés inclinés et de l'axe des abscisses, où l'ordonnée correspondante est  $= 0$ , tandis que la moitié des autres ordonnées est  $= + \Phi_s$  et l'autre moitié soit 2 (ou  $2k$ ) est  $= - \Phi_s$ . A ces endroits la somme des 5 (ou  $2k + 1$ ) ordonnées simultanées disparaît par conséquent.

Aux points  $b$  on a d'un côté 3 (ou  $k + 1$ ) ordonnées de la valeur  $+ \Phi_s$  et de l'autre côté 2 (ou  $k$ ) ordonnées de la valeur contraire  $- \Phi_s$ . La différence qui représente le résultat d'addition des ordonnées à ces points sera donc

$$(k + 1)\Phi_s - k\Phi_s = \Phi_s$$

correspondant à l'amplitude de l'onde.

Pour les points qui se trouvent entre les points  $a$  et  $b$  les relations sont les mêmes que pour les points  $a$ . D'un côté nous avons  $k$  ordonnées positives égales  $\Phi_s$  et de l'autre côté le même nombre d'ordonnées négatives  $- \Phi_s$ , par conséquent pour ces points le côté incliné du trapèze fixe seul le résultat.

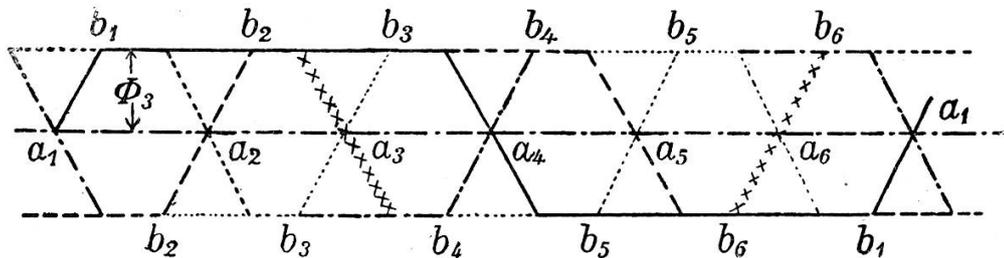


Fig. 5

En définitif c'est la ligne en zig-zag  $a_1 b_1 b_2 \dots$  formée par les côtés inclinés (anticlinaux) des trapèzes qui est le lieu géométrique indiquant la somme des ordonnées simultanées des  $2k + 1$  courbes dont les demi-ondes ont été représentées par des trapèzes. Or, cette ligne, comme il est facile de s'en rendre compte, par la figure, a 5 (ou bien  $2k + 1$ ) fois plus de périodes que les courbes qui nous ont servi de points de départ.

Si, au lieu des  $2k + 1$  phases, nous étions partis d'un nombre pair de phases  $2k$  ou, pour statuer un exemple, de six phases (fig. 5), nous aurions partout d'une part  $k$  (ou 3) ordonnées

positives =  $\Phi$  et le même nombre d'ordonnées négatives =  $-\Phi_s$ , par conséquent la somme totale serait

$$k(\Phi_s - \Phi_s) = 0 ,$$

c'est-à-dire disparaîtrait continuellement.

Par conséquent un nombre *pair* de phases ne peut pas servir de base à la multiplication de fréquence au moyen du principe de la consonance polyphasée avec le dispositif indiqué.