SUR

L'INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE

DES

ÉQUATIONS DE LA RELATIVITÉ

PAR

L. DE LA RIVE

On sait que les équations de transformation pour passer d'un système d'axes S en repos à un système d'axes S′ ayant par rapport au premier un mouvement uniforme, appliquées à l'aberration des étoiles, donnent une solution qui comprend à la fois la valeur de l'angle d'aberration et le principe de Doppler. Cette double vérification expérimentale constitue un argument important en faveur de la théorie de la relativité et, dans tous les cas, en fait une formule empirique d'un usage pratique pour les questions d'optique dans les corps en mouvement.

Il semble difficile de soumettre la théorie de la relativité à un contrôle géométrique puisqu'elle donne lieu à une cinématique extragéométrique et que les durées ont une double signification suivant qu'elles sont estimées dans un des systèmes ou dans l'autre. J'ai réussi néanmoins, dans le cas de l'aberration des étoiles, à assimiler la solution donnée par les formules à une construction géométrique très simple qui se substitue au parallélogramme des vitesses construit sur la vitesse de propagation c de la lumière et la vitesse v de l'observateur, tel que le comporte la théorie ordinaire cinématique de l'aberration. Le résultat présente un certain intérêt en faisant ressortir le principe géométrique de cette composition de vitesses.

Soient O et O′ les origines des systèmes S et S′ et OX l'axe des x suivant lequel O′ se déplace avec la vitesse v; soit EO la direction du rayon lumineux émis par l'étoile E et atteignant l'observateur en O, et E′O′ celle du rayon lumineux dévié par l'aberration et atteignant l'observateur en O′.

Prenons sur le prolongement de EO une longueur OK égale à ct, et, par le point K menons une normale à OK qui coupe l'axe des x en M, puis par le point M abaissons une perpendiculaire sur le prolongement de E′O′, MK′; enfin par le point O′ élevons une normale à l'axe OX, qui coupe OE en D. On démontrera que la longueur K′O′ est égale à KD.

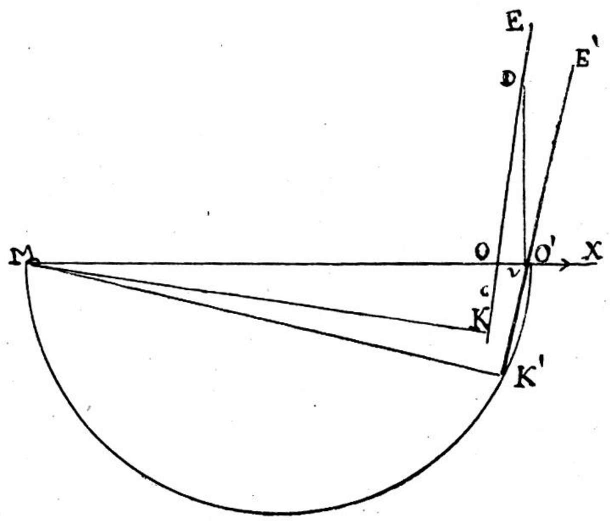
Les équations des transformations sont :

$$(1)\qquad x = \beta[x' + vt'] , \qquad t = \beta\left[t' + \frac{vx'}{c^2}\right] , \qquad \beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} .$$

Les états vibratoires d'un point pris sur l'axe des x sont :

$$(2)\qquad \sin\omega\left[t - \frac{x\cos\varphi}{c}\right] , \qquad \sin\omega'\left[t' - \frac{x'\cos\varphi'}{c}\right] .$$

φ et φ' sont les angles comptés entre le rayon lumineux dans le sens de la propagation et l'axe positif des x avec lequel coïncide



la vitesse v; dans la figure, les angles φ et φ' sont donc ceux que font les prolongements OK et O′K′ avec OX.

Dans la première des expressions (2) nous remplaçons x et t par leurs valeurs tirées des (1) et nous obtenons :

$$\sin \omega\beta \left[t'\left[1 - \frac{v}{c}\cos\varphi\right] - \frac{x'}{c}\left[\cos\varphi - \frac{v}{c}\right]\right]$$

qui se met sous la forme

$$\sin \omega\beta \left[1 - \frac{v}{c}\cos\varphi\right]\left[t' - \frac{x'}{c}\,\frac{\cos\varphi - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}\cos\varphi}\right].$$

Cette expression doit être assimilée à la seconde des (2), puisqu'elle donne aussi l'état vibratoire du point exprimé en t' et x' ; cette assimilation donne les deux égalités

$$\omega' = \omega\beta\left[1 - \frac{v}{c}\cos\varphi\right].$$

$$\cos\varphi' = \frac{\cos\varphi - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}\cos\varphi}$$

qui établissent, comme on l'a dit plus haut, le rapport des fréquences d'après le principe de Doppler et l'angle d'aberration φ' par rapport à φ.

Nous avons pris le point commun aux deux rayons sur l'axe des x, ce qui est permis, puisque le résultat est indépendant du point choisi et nous pouvons de plus donner une valeur arbitraire à x. Nous la déterminons par la relation

$$x = \frac{ct}{\cos\varphi}$$

et nous prenons pour t l'instant où le rayon EO arrive en K, d'où résulte qu'il atteint O à l'instant zéro ; d'autre part, puisque le front de l'onde supposée plane est KM, le rayon atteint le point M commun aux deux ondes planes KM et K'M à l'instant t. A cet instant l'origine mobile O' est à une distance de O égale à vt ; de plus, considérons les suppléments des angles φ et φ' que nous désignons par φ_1 et φ'_1 ; on a, d'après ce qui précède :

$$\cos\varphi'_1 = \frac{\cos\varphi_1 + \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}\cos\varphi_1}$$

relation qui peut s'écrire :

$$(3) \qquad \cos\varphi'_1 \left[\frac{ct}{\cos\varphi_1} + vt\right] = ct + \frac{vt}{\cos\varphi_1} .$$

Revenant à la figure, on a :

$$\mathrm{OK} = ct \qquad \mathrm{OD} = \frac{vt}{\cos\varphi_1}$$

$$\mathrm{OM} = \frac{ct}{\cos\varphi_1} \qquad \mathrm{OO'} = vt \qquad \mathrm{O'K'} = \mathrm{O'M}\cos\varphi'_1 .$$

La relation (3) donne donc :

$$\mathrm{O'K'} = \mathrm{OK} + \mathrm{OD} = \mathrm{KD}$$

comme on l'a dit plus haut.

Cette égalité donne lieu à la construction suivante :

Prendre une longueur proportionnelle à c *sur la direction prolongée de* EO *et par le point* K *mener la normale* KM *qui détermine le point* M *sur l'axe* OX ; *prendre la longueur* OO′ *proportionnelle à* v *et par le point* O′ *mener* O′D *qui détermine le point* D ; *sur* MO′ *comme diamètre décrire une demi-circonférence et du point* O′ *comme centre avec un rayon* O′K′ *égal à* KD, *déterminer le point* K′ ; *on obtient le rayon* E′O′ *en joignant* O′K′.

Dans la figure, les longueurs KD et K′O′ ne sont nullement égales mais le rapport de v à c devrait être celui de 10^{-4} à 1, ce qui rendrait les deux rayons parallèles graphiquement.

On remarquera que O′K′ est égal à ct' puisque la vitesse de propagation est constante ; il en résulte que l'on a :

$$t' = t\left[1 + \frac{v}{c\cos\varphi_1}\right] .$$

Mais d'autre part il faut pour obtenir la vraie valeur de t', multiplier par β celle que l'on obtient dans le système S. En effet, si l'on donne à x la valeur

$$x = -\frac{ct}{\cos\varphi_1} .$$

L'équation

$$t' = \beta\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

donne

$$t' = \beta t\left[1 + \frac{v}{c\cos\varphi_1}\right] .$$