Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 2 (1920)

Artikel: Représentation et mesure du temps
Autor: Guillaume, Edouard
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-742538

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

REPRÉSENTATION ET MESURE DU TEMPS

PAR

Edouard GUILLAUME

La question du *temps* que pose la Théorie de la relativité est vitale, peut-on dire, pour la Science entière. Afin de l'éclaircir, nous avons proposé, dans un précédent mémoire[1], d'attaquer le problème *analytiquement* tout d'abord. Voici en quoi consistait notre méthode.

Dans la Physique classique, comme en Mécanique, le temps est toujours représenté par un paramètre temporel *unique, t,* qui joue le rôle de variable indépendante. Dans la théorie de la relativité, par contre, chaque système de référence S_i possède un paramètre temporel τ_i, qui représente le temps dans ce système seulement; comme il y a autant de systèmes qu'on veut, le temps se trouve, en fin de compte, exprimé par une *infinité* de paramètres. Si donc, on désire retrouver la représentation classique, il faut opérer un changement de variables de façon à chasser tous ces paramètres et à ne laisser subsister qu'une variable unique t. C'est là un problème de pure analyse, que nous avons exposé dans le mémoire précité; nous sommes arrivé à la conclusion importante que les résultats essentiels de la théorie n'en étaient pas altérés, et nous avons pu donner une signification physique à celle-ci en la ramenant à une *aberration* généralisée. Nous sommes parvenus ainsi à la nouvelle opération spatiale : l'« aberration », représentée par un nouvel algorithme : les « dérivées homogènes ».

On peut dire que le problème analytique que nous avons traité

[1] *Archives* (4), 46, p. 281 et suiv., *1918*.

consiste à substituer une représentation *monoparamétrique* à une représentation *polyparamétrique* du temps.

Or, il se pose la question fondamentale suivante :

Si le temps est véritablement une entité unique, *les représentations mono et polyparamétriques ne doivent-elles pas être équivalentes ?*

Nous nous proposons, dans le présent mémoire, de montrer que la réponse est affirmative. Nous verrons que si l'on n'a pas su le reconnaître jusqu'à maintenant, cela tient à l'omission d'une distinction essentielle, et à la confusion entre deux relations de formes analytiques similaires, mais dont l'une est relative à une même « durée », l'autre à deux « périodes » différentes.

Pour notre étude, nous nous appuierons sur la proposition suivante, à laquelle Kant donnait le nom de « jugement synthétique à priori » et conférait par là-même une certitude apodictique :

Différents temps ne peuvent être simultanés.

Admettons sans réserve cet axiome temporel et essayons de l'appliquer à la transformation de Lorentz, qui constitue la base des théories dites de la relativité.

Tout d'abord, utilisons-le pour construire une « horloge ». Il nous conduira à exemplifier le temps, *continu* à une dimension, par une droite indéfinie unique OT, dont chacun des points représentera un instant T bien déterminé, et une portion ΔT, un intervalle de temps. Remarquons que, pour le moment, les symboles T et ΔT ne désignent que des rapports de *situation*, et non des valeurs numériques ; nous faisons ainsi une sorte d'*Analysis situs* temporelle. On imaginera qu'un index mobile parcourt la droite OT et indique le temps par sa position. Peu importe la « vitesse » de l'index. Nous pourrons, à notre gré, ralentir, accélérer ou annuler son mouvement. C'est en cela que consiste véritablement la « relativité du temps », telle que l'entendait Poincaré par exemple. Au reste, rien ne nous empêche d'attribuer à l'index un « mouvement uniforme », sans que, bien entendu, nous puissions dire ce qu'il faut comprendre par là. Puisque OT est l'horloge suprême, elle indique le temps sans recours possible. Remarquons d'autre part qu'il ne serait nullement absurde de faire marcher l'index « en arrière », c'est-à-dire de remonter le cours du temps. La transformation de

Lorentz, en effet, est essentiellement *réversible;* elle n'est pas mutilée lorsqu'on y remplace τ_1 et τ_2 respectivement par $-\tau_1$ et $-\tau_2$; cela ne fait que changer le sens de la vitesse relative de S_1 et S_2.

Nous rencontrerons une première difficulté quand nous voudrons exprimer *numériquement* le temps T. C'est une difficulté analogue à celle qui a donné lieu à tant de controverses et qui n'a pu être résolue que par le postulat de Cantor-Dedekind : « A tout point d'une droite on peut faire correspondre un nombre. » Corrélativement nous devons énoncer le postulat suivant :

A tout instant, on peut faire correspondre un nombre.

Mais ce postulat n'implique qu'une possibilité ; et il y a une infinité de manières d'établir ces correspondances.

Dans la Physique classique, où le temps est représenté par un paramètre unique t, la correspondance entre les valeurs de t et les points T se fait immédiatement et sans difficulté aucune. Il suffit de faire correspondre à l'unité de temps un certain segment choisi arbitrairement, et de l'utiliser pour subdiviser la droite OT en intervalles égaux, qu'on numérotera avec la suite des nombres naturels. On imaginera enfin une correspondance univoque et réciproque entre les valeurs que prendra le paramètre t en vertu des relations et celles de la suite donnée.

Si, par contre, nous avons une infinité de paramètres τ_1 τ_2, ... pour représenter le temps, nous devrons établir autant de correspondances entre les valeurs que prennent ces paramètres en vertu des équations et les instants exemplifiés par les points de la droite OT. Soit x_1^0, y_1^0, z_1^0, τ_1^0, x_2^0, y_2^0, z_2^0, τ_2^0 un système de valeurs satisfaisant à la transformation de Lorentz. Ces valeurs seront, par définition, « simultanées » au sens mathématique du mot ; mais cela n'implique pas nécessairement que les instants τ_1^0 et τ_2^0 soient « simultanés » dans le monde *sensible.*

Nous aurons donc deux possibilités :

a) τ_1^0, τ_2^0, ... sont des nombres différents relatifs à un *même* instant T^0 ; corrélativement $\Delta\tau_1^0$, $\Delta\tau_2^0$, ... sont des expressions numériques différentes d'une même durée ΔT^0.

b) τ_1^0, τ_2^0, ... désignent chacun un instant *différent*, c'est-à-dire un point différent sur la droite OT ; corrélativement, $\Delta\tau_1^0$, $\Delta\tau_2^0$, ... désignent chacun des durées *différentes.*

Une montre nous offre, quoique par un autre mécanisme, un exemple vulgaire de la première possibilité, puisque le temps y est indiqué par deux aiguilles à marches distinctes. Le cadran est divisé en 60 parties ; pendant *une* heure, la grande aiguille parcourt les 60 parties alors que la petite n'en parcourt que 5 : *les nombres 5 et 60 sont des expressions numériques différentes d'une même durée,* et nous disons que la petite aiguille va douze fois moins vite que la grande. Avec notre horloge nous devrons procéder autrement ; la montre comporte un cadran avec division unique et deux aiguilles ; comme nous n'avons qu'un index, nous devrons multiplier les divisions. Pour réaliser la montre, il suffit d'attribuer à OT deux subdivisions différentes, de manière qu'à 60 divisions de l'une des échelles correspondent exactement 5 divisions de la seconde, les traits 0, d'une part, et les traits 5 et 60, d'autre part, étant en coïncidence. La nature crée constamment des conditions analogues. Ainsi, l'ensemble continu des sources lumineuses de toutes couleurs, permet d'attribuer à chaque instant une infinité de nombres distincts.

Nous allons appliquer les considérations qui précèdent à l'étude de la transformation de Lorentz. Comme on le fait habituellement, nous nous bornerons au cas où il n'y a que deux systèmes, S_1 et S_2, en présence ; on les prend alors sous la forme de trirectangles euclidiens, placés de façon que les axes O_1x_1 et O_2x_2 coïncident et que les plans coordonnés $y_1O_1z_1$ et $y_2O_2z_2$ restent constamment parallèles lorsque les systèmes se déplacent l'un par rapport à l'autre avec une vitesse v dans la direction commune Ox. Pour fixer les idées, on peut imaginer que S_1 est une voie de direction Ox, sur laquelle circule un train très long représentant S_2. La transformation de Lorentz établit une correspondance entre les points de ces deux systèmes, et s'écrit comme suit dans le cas envisagé :

$$x_2 = \beta(x_1 - \alpha c_0\tau_1) \; ; \; y_2 = y_1 \; ; \; z_2 = z_1 \; ; \; c_0\tau_2 = \beta(c_0\tau_1 - \alpha x_1) \, , \qquad (1)$$

où $\beta = 1 : (1 - \alpha^2)$ est une constante liée à la vitesse v par la relation :

$$v = \alpha c_0 \, , \qquad (2)$$

c_0 représentant la valeur numérique de la vitesse de la lumière

pour le vide, mesurée dans un système quelconque. Cette vitesse est donc une constante, en ce sens que quelle que soit l'expérience faite dans un même système en vue de la déterminer, on trouvera toujours c_0 pour sa valeur. *(Principe de la constance de la vitesse de la lumière).* Bien entendu, nous pouvons prendre pour c_0 un nombre quelconque, par exemple l'unité ; on peut aussi poser

$$c_0 = 300\,000 \frac{\text{km}}{\text{sec-lumière}},$$

et définir de la sorte la « seconde-lumière », qui différera peu de la « seconde terrestre ».

Une remarque importante s'impose à propos de l'application physique du principe précédent. Du point de vue mathématique, la notion de « système de référence » est parfaitement claire. Il n'en est pas ainsi, malheureusement, pour le physicien, et celui-ci est incapable, pour l'instant tout au moins, de dire où finit le système-voie S_1 et où commence le système-train S_2 Lorsqu'une mouche pénètre dans un wagon par une fenêtre, à partir de quel moment peut-on dire que l'insecte fait partie du convoi ?

Dans l'application de la transformation de Lorentz, nous distinguerons deux cas, selon qu'on utilise la transformation comme transformation *ponctuelle* (cas intégral) ou comme transformation de *vitesses* (cas différentiel).

1° *Cas intégral.* — Dans ce mode d'emploi, on énonce habituellement une phrase comme, celle-ci : « A l'indication τ_1 de la montre de l'observateur placé en $P_1(x_1, y_1, z_1)$ sur S_1, correspond l'indication τ_2 de la montre de l'observateur placé en $P_2(x_2, y_2, z_2)$ sur S_2 ». Que faut-il entendre par là ? Que τ_1 et τ_2 désignent des instants *différents*, donc des points différents sur la droite OT ? Les indications τ_1 et τ_2, comptées sur la même échelle, ne seraient donc pas supposées simultanées. C'est là une assertion toute platonique. Pour le physicien, les indications de deux horloges n'ont de relation que si l'on dispose d'un moyen de communication, dont on connaisse la loi de transmission ou de propagation, et qui permette de comparer les horloges entre elles ; mais alors x_1 et x_2 deviennent des fonctions du temps ; il

n'y a plus qu'une seule variable indépendante, et nous tombons sur le cas différentiel examiné ci-après. Nous sommes donc ici dans l'arbitraire. Nous avons *deux* variables indépendantes, et nous pourrons leur donner les valeurs qui nous plairont. En particulier, on peut avoir à la fois :

$$\tau_1 \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \tau_2 = 0 \ ,$$

ou vice-versa, sans qu'il en résulte de contradiction. Selon qu'on pose telles ou telles relations, les points se groupent différemment à un même instant pour former la configuration d'ensemble des systèmes, et ce groupement dépendra, en général, du système sur lequel on se suppose placé pour envisager le tout.

2° *Cas différentiel.* — Tout autre est la question dans le second cas, lorsqu'on considère un phénomène déterminé. Celui-ci se déroule dans le temps, qui devient l'unique variable indépendante. Afin d'analyser ce qui se passe, nous allons décrire une expérience *fictive*, celle-là même que l'on imagine pour établir habituellement la transformation de Lorentz. Nous disons bien « expérience fictive », et nous ne rechercherons pas le dispositif qu'il faudrait employer pour observer réellement quelque chose. Ce « quelque chose », d'ailleurs, serait sans nul doute en relation très compliquée avec les phénomènes schématiques que nous envisageons, et qui ne doivent être considérés que comme des supports de la pensée. Cela dit, reprenons l'image du train, et supposons qu'un opérateur lance de son wagon un signal lumineux bref. D'après la théorie, l'onde émise forme, à chaque instant, une *sphère* emportée avec le train et dont le rayon croît proportionnellement au temps. Que « verra » un observateur placé le long de la voie ? La théorie veut que ce même signal donne naissance, pour le système-voie, à une onde *sphérique* identique. Désignons par S_1 ce dernier système et par S_2 le système-train. Soient

$$\Delta u_1 = c_0 \Delta \tau_1 \tag{4}$$

l'accroissement du rayon de la sphère de S_1 et

$$\Delta u_2 = c_0 \Delta \tau_2 \tag{4'}$$

celui de la sphère *conjuguée* dans S_2. En introduisant l'expression de « sphères conjuguées », nous comprenons en particu-

lier le cas où S_1 et S_2 « observeraient » la *même* sphère, puisqu'il suffit alors d'admettre que l'une d'elles se confond avec sa conjuguée. Les accroissements conjugués Δu_1 et Δu_2, supposés très petits, satisfont aux relations suivantes, comme il est facile de le vérifier :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta x_1^2 + \Delta y_1^2 + \Delta z_1^2 = \Delta u_1^2 \\ \Delta x_2^2 + \Delta y_2^2 + \Delta z_2^2 = \Delta u_2^2 . \end{array} \right. \tag{5}$$

Il y a complète symétrie dans les équations ; il n'y a pas parfaite symétrie dans les phénomènes puisque nous avons imaginé que le signal était produit dans le système-train, qui devient le système-cause ; mais les équations resteraient les mêmes si nous avions supposé le foyer lumineux sur le système-voie ; elles sont donc indépendantes de ce que nous convenons d'appeler « cause » et « effet ».

En conclusion, rien ne s'oppose à ce que nous admettions que les *accroissements concomitants* Δu_1, *et* Δu_2 *soient rigoureusement simultanés ; ils ont donc nécessairement même durée.*

C'est ce qui ressort encore du fait suivant. Les accroissements considérés satisfont évidemment à la relation :

$$\Delta u_2 = \beta(\Delta u_1 - \alpha \Delta x_1) \ ;$$

supposons pour un instant que leurs durées soient différentes, par exemple que Δu_1 s'accomplissent en un temps plus long que Δu_2. Nous pourrons alors partager la durée de Δu_1 en deux intervalles, et la longueur Δu_1 en deux portions $\Delta u_1'$ et $\Delta u_1''$ telles que $\Delta u_1'$ et Δu_2 s'accomplissent simultanément pendant la premier intervalle, alors que $\Delta u_1''$ aurait lieu seul lors du second intervalle. En d'autres termes, dans la formule ci-dessus, nous devrions poser pour tout intervalle de temps compris dans le second intervalle :

$$\delta u_1 \neq 0$$
$$\delta u_2 = 0 \ ,$$

ce qui exigerait que :

$$\frac{\delta x_1}{\delta \tau_1} = \frac{c_0}{\alpha} > c_0 \ ,$$

car $\alpha < 1$; or, ce résultat est impossible, puisque, par hypothèse, x_1 se meut avec la vitesse de la lumière, c'est-à-dire, que

$$\frac{\delta x_1}{\delta \tau_1} = c_0 .$$

Nous devons conclure de ce qui précède que $\frac{\Delta u_1}{c_0}$ et $\frac{\Delta u_2}{c_6}$ *ne peuvent être que des mesures différentes d'une même durée,* ou, d'une façon plus précise, *d'un même intervalle de temps* ΔT.

Ainsi, alors que dans le cas intégral nous ne pouvions savoir si τ_1 et τ_2 désignaient, sur la droite OT, des instants différents, dans le cas différentiel les accroissements différents $\Delta\tau_1$ et $\Delta\tau_2$ doivent nécessairement être considérés comme des mesures différentes d'une seule et unique durée, de même que nous avions considéré les nombres 5 et 60 comme des mesures différentes de l'heure.

Avant de poursuivre, une remarque encore à propos de ce dernier exemple. Soient t et t' les mesures d'un intervalle de temps T par la grande et la petite aiguille d'une montre, comptées sur les 60 divisions du cadran. On a évidemment :

$$t = 12\, t' .$$

Appelons *périodes* les temps d'une révolution entière, et désignons-les par Θ et Θ'. Pendant que la grande aiguille fait un tour complet, la petite ne fait qu'un douzième de tour ; la période de cette dernière est donc douze fois plus *grande :*

$$\Theta' = 12\,\Theta .$$

Les équations précédentes sont exactement l'inverse l'une de l'autre ; leurs significations physiques ne doivent pas être confondues. Dans la première il serait absurde de dire que t et t' représentent des mêmes unités, des « minutes » par exemple ; on arriverait en effet au résultat qu'une heure vaut cinq minutes ! Dans la seconde, au contraire, Θ' et Θ sont nécessairement exprimées à l'aide de la même unité de temps, des « heures » pour fixer les idées ; on dira alors que la période de la grande aiguille est d'une heure et celle de la petite de douze heures. Des deux relations précédentes, on tire les égalités évidentes :

$$\Theta \,.\, t = \Theta' .\, t' = \ldots \; ; \qquad \text{(I)}$$

elles signifient que les nombres qui mesurent une *même* durée sont en raison inverse des périodes des horloges utilisées.

La méconnaissance de cette simple remarque a conduit à des résultats inacceptables, comme nous allons le constater à propos du « temps propre » de Minkowski. Pour avoir le temps propre de S_2, par exemple, Minkowski pose :

$$\Delta x_2 = \Delta y_2 = \Delta z_2 = 0$$

ce qui donne en vertu des relations (1) :

$$\Delta \tau_2 = \Delta \tau_1 \sqrt{1 - \alpha^2} \; . \qquad (6)$$

Remarquons qu'il est curieux, du point de vue physique, de poser tous les accroissements Δx_2, Δy_2 et Δz_2 égaux à zéro. Cela présuppose qu'il n'y a aucun mouvement dans S_2 ; comme Δu_2 représente un chemin parcouru par la lumière, on est obligé d'imaginer que ce mouvement s'effectue dans la quatrième dimension. Cette particularité aide à comprendre pourquoi Minkowski a voulu faire du temps la quatrième dimension de l'espace. Mais on voit alors nettement la nécessité de bien distinguer les particularités qui dérivent de l'algorithme employé d'avec les possibilités réalisables physiquement.

Pour mettre en évidence la signification du temps propre, on utilise habituellement l'illustration suivante. Le système S_2, imagine-t-on, se meut par rapport à S_1 avec une vitesse voisine de celle de la lumière ; elle n'en différera, par exemple, que d'un vingt-millième ; S_2 poursuit son voyage pendant un an dans un sens, puis rebrousse chemin pour revenir à son point de départ, toujours avec la même vitesse. Nous aurons dans ces hypothèses :

$$\alpha = 0{,}99995 \; ; \qquad \beta = 100 \; ;$$

d'où pour l'aller et le retour :

$$\Delta \tau_2 = \quad 2 \text{ ans}$$
$$\Delta \tau_1 = 200 \quad »$$

Ainsi, alors que les voyageurs emmenés dans S_2 auraient fait dans les espaces interstellaires une randonnée de deux ans, en

revenant sur la Terre ils trouveraient celle-ci vieillie de deux siècles! On voit que ce résultat paradoxal provient de ce que nous écrivons la même unité « ans » après les nombres 2 et 200, au lieu de les considérer comme des mesures différentes d'une seule et même durée.

D'où a pu provenir cette erreur qui conduit à un résultat manifestement en contradiction avec le principe de relativité? Il est vrai qu'on a essayé de répondre à cette dernière objection en réintroduisant le système absolu de Newton; S_1 serait le système lié aux étoiles fixes, et seul S_2 aurait un mouvement « réel »; comme le retour en arrière de S_2 ne peut avoir lieu sans accélération, et que celle-ci a un sens absolu dans la Mécanique, on croit avoir trouvé là l'élément de disymétrie nécessaire pour rendre compte de la disymétrie des durées.

Si l'on ne veut pas s'égarer, il faut s'en tenir strictement aux significations physiques des grandeurs qui entrent dans la formule, et, par suite, préciser l'expression « eine auf S_2 *ruhende Uhr,* welche von S_1 aus *beurteilt* ist », que l'on trouve dans tous les exposés allemands. Qu'est-ce qu'une « ruhende Uhr » et qu'est-ce que la « beurteilen » ? De ce que le support d'une horloge est immobile dans S_2, il n'en faut pas conclure qu'il ne se passe rien à l'intérieur et dans le voisinage de l'horloge. Sans mouvements pas d'horloge, et ces mouvements doivent avoir lieu conformément à la Théorie.

Or, dans la Théorie, l'unité de temps dans chaque système est définie par le fait même qu'on *donne* une valeur numérique à la *vitesse* de la lumière. Tout rayon lumineux peut donc servir d'horloge. Supposons qu'un train d'ondes planes sinusoïdales de fréquence ν_1 tombe obliquement sur l'axe O_1x_1 de S_1; si pendant l'intervalle ΔT, il parcourt la distance Δu_1, le train d'onde conjugué dans S_2 parcourra la distance Δu_2; en désignant par φ_1 et φ_2 les angles des faisceaux avec les axes O_1x_1 et O_2x_2 respectivement, nous aurons évidemment :

$$\Delta x_1 = \Delta u_1 \cos \varphi_1 \; ; \quad \Delta x_2 = \Delta u_2 \cos \varphi_2 \; .$$

En outre, on sait qu'entre les fréquences ν_1 et ν_2 et les angles φ_1 et φ_2, il y a les relations suivantes, qui expriment le phénomène de Doppler et l'aberration (voir le tableau, p. 136; dans ce ta-

bleau $l = \cos \varphi_1$ et $l' = \cos \varphi_2$) :

$$\nu_1 = \nu_2 \beta (1 + \alpha \cos \varphi_2) \; ; \qquad \cos \varphi_1 = \frac{\cos \varphi_2 + \alpha}{1 + \alpha \cos \varphi_2} \, . \qquad (7)$$

Or, pour définir le temps propre de S_2, Minkowski annule Δx_2, ce qui exige que φ_2 soit égal à $\pi : 2$, c'est-à-dire que le faisceau tombe à angle droit sur l'axe $O_2 x_2$. Le faisceau conjugué fait alors un angle φ_1 dont le cosinus est $\alpha = v : c_0$. Quant aux fréquences, on voit immédiatement que leur relation se simplifie puisque $\cos \varphi_2$ est nul; en introduisant leurs inverses, c'est-à-dire les périodes Θ_1 et Θ_2, on peut écrire :

$$\Theta_1 = \Theta_2 \sqrt{1 - \alpha^2} \; ; \qquad (8)$$

elle est bien l'inverse de (6), qui donne le temps propre, comme il le faut; et ici, les variables de nature temporelles Θ_1 et Θ_2 doivent être exprimées avec la *même* unité de temps, en « secondes-lumière » par exemple; la période Θ_1 est plus courte que la période Θ_2.

Cela posé, comparons ce résultat à celui auquel parviennent les relativistes. Voici comment ils raisonnent : supposons, disent-ils, qu'une horloge soit entraînée avec S_2 ; comme horloge nous pouvons prendre n'importe quel phénomène périodique, une source lumineuse par exemple ; *celle-ci étant au repos dans S_2, it faut poser* Δx_2 *égal à zéro*. En ce faisant on tombe sur la formule (6) du temps propre ; puis, confondant dans celle-ci les intervalles $\Delta \tau_1$, $\Delta \tau_2$ avec des *périodes*, ils introduisent les fréquences ν_1 et ν_2, et écrivent la formule :

$$\nu_1 = \nu_2 \sqrt{1 - \alpha^2} \, ,$$

manifestement *incompatible* avec la relation (8), c'est-à-dire avec *l'hypothèse* $\Delta x_2 = 0$. Remarquons d'ailleurs qu'exprimée en mots, cette formule conduit à la proposition suivante : « lorsqu'une source lumineuse passe devant un observateur, elle lui apparaîtra plus rouge qu'une source identique, au repos par rapport à lui ». Or, si l'on braque une lunette perpendiculairement à la trajectoire de la source, il faut évidemment annuler $\cos \varphi_1$, c'est-à-dire Δx_1 et non pas Δx_2. On vérifie facilement sur les relations (7) que l'on parvient bien à la formule précédente.

L'erreur, on le voit, consiste essentiellement à confondre une formule afférente à une durée bien déterminée avec une relation entre deux périodes ; puis, en outre, à considérer l' « horloge », — en l'espèce la source lumineuse, — comme un bloc rigide, alors qu'elle ne peut agir sur S_1 que grâce à l'agitation de ses électrons et aux rayons qu'ils émettent.

Il est d'ailleurs aisé d'établir directement une relation entre durées et périodes, analogue à la relation (I) donnée plus haut. Il suffit d'envisager le tableau suivant :

$\sin \frac{2\pi}{\Theta}\left(\tau - \frac{lx + my + nz}{c_0}\right)$	$x = c_0\tau l \;;\; y = c_0\tau m \;;\; z = c_0\tau n$
$\sin \frac{2\pi}{\Theta'}\left(\tau' - \frac{l'x' + m'y' + n'z'}{c_0}\right)$	$x' = c_0\tau' l' \;;\; y' = c_0\tau' m' \;;\; z' = c_0\tau' n'$
$l = \frac{l' + \alpha}{1 + \alpha l'}$	$l = \frac{l' + \alpha}{1 + \alpha l'}$
$m = \frac{m'}{\beta(1 + \alpha l')}$	$m = \frac{m'}{\beta(1 + \alpha l')}$
$n = \frac{n'}{\beta(1 + \alpha l')}$	$n = \frac{n'}{\beta(1 + \alpha l')}$
$\Theta = \frac{\Theta'}{\beta(1 + \alpha l')}$	$\tau = \tau'\beta(1 + \alpha l')$
$\searrow$	$\swarrow$

$$\underline{\Theta \,.\, \tau = \Theta' \,.\, \tau' \,.}$$

Dans la première colonne on identifie deux sinusoïdes, représentant un train d'ondes planes, au moyen de la transformation de Lorentz ; on trouve les trois expressions connues de l'aberration et le phénomène de Doppler-Fizeau. Dans la seconde colonne, on exprime, dans la transformation, les coordonnées en fonction des chemins que parcourt simultanément la lumière par rapport à chacun des systèmes. On trouve des relations identiques deux à deux, ce qui exige que la relation soulignée soit satisfaite. Elle est bien de la forme prévue.

Nous résumons ce qui précède dans la proposition suivante, très importante :

Les paramètres temporels τ ou t, *pas plus que leurs accroissements $\Delta\tau$ ou Δ*t, *ne peuvent être considérés comme des périodes.*

Ce résultat est non seulement fondamental pour la compréhension de la Théorie, mais il montre l'impossibilité d'accepter tel quel le calcul du déplacement des raies spectrales dans les champs de gravitation, puisque ce calcul repose justement sur le fait que les paramètres temporels sont traités comme des périodes[1]. Un examen attentif s'impose d'autant plus que le déplacement observé dans la lumière solaire ne correspond nullement à la valeur calculée[2].

Reprenons maintenant l'étude de la transformation de Lorentz. Revenons à l'image du train, et envoyons obliquement à la voie, c'est-à-dire à l'axe O_1x_1 de S_1 des rayons lumineux parallèles, faisant un angle φ_1 dont le cosinus soit égal à α. Envisageons plus spécialement les rayons qui passent sous le train, autrement dit entre le plancher du wagon et la voie. Comment les observateurs placés le long de la voie vont-ils raisonner ? Ils diront ceci : puisque le train, qui forme le système S_2, est animé d'une vitesse v, ces rayons doivent avoir, perpendiculairement à O_2x_2 une vitesse relative dont la valeur est $\sqrt{c_0^2 - v^2}$. Si donc pendant le temps ΔT les rayons parcourent un chemin Δu_1 sur la voie, ces mêmes rayons ne doivent parcourir par rapport à S_2 qu'un chemin Δu_2 donné par la relation :

$$\frac{\Delta u_1}{c_0} = \frac{\Delta u_2}{\sqrt{c_0^2 - v^2}} .$$

Il serait naturel de conclure de cette formule que la vitesse relative des rayons qui passent sous le train est moindre que c_0 et égale à

$$c_2 = \sqrt{c_0^2 - v^2} .$$

Les relativistes ont trouvé plus commode d'attribuer à c_2 la

[1] EINSTEIN, A., Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie, Leipzig, 1916, p. 62 et *Ann. d. Phys.*, **49**, 1916.

[2] *Bulletin de la Société Astronomique de France*, décembre, 1919, p. 494. A l'occasion d'une des dernières séances de la « Deutsche physikalische Gesellschaft », il a été affirmé que le déplacement en question échappait encore à nos instruments actuels. En outre, d'après une communication personnelle de M. Einstein à l'auteur, il faut compter deux ans pour que le monde savant soit fixé d'une façon définitive sur cette question (février 1920).

même valeur numérique c_0 ; par contre, ils mesurent le temps dans S_2 avec des horloges qui établissent exactement la compensation, en d'autres mots qui vont plus lentement dans la proportion :

$$\frac{\Delta\tau_1}{\Delta\tau_2} = \frac{c_0}{\sqrt{c_0^2 - v^2}} . \tag{9}$$

On voit immédiatement pourquoi la compensation est rigoureuse : les temps de propagation sont mesurés par les chemins que parcourent les rayons lumineux eux-mêmes.

Ainsi, des deux formules

$$c_0\Delta t = \frac{c_2\Delta t}{\sqrt{1-\alpha^2}} \quad \text{et} \quad c_0\Delta\tau_1 = \frac{c_0\Delta\tau_2}{\sqrt{1-\alpha^2}} , \tag{10}$$

on a jusqu'ici préféré la seconde, dans laquelle évidemment le même intervalle ΔT est exprimé par deux nombres différents $\Delta\tau_1$ et $\Delta\tau_2$, au lieu de l'être par un seul et même nombre Δt. Pourquoi cette préférence ? Portons notre attention sur les rayons qui « pénètrent » dans S_2, c'est-à-dire qui peuvent être considérés comme appartenant à ce système ; nous avons vu plus haut que des rayons faisant avec O_1x_1 l'angle φ_1 dont le cosinus est α, avaient pour conjugués dans S_2 des rayons à angle droit avec O_2x_2 ; de plus leur vitesse mesurée dans S_2 a aussi pour valeur numérique c_0. Dès lors, la seconde formule (10) offre un certain avantage ; elle est pour ainsi dire à double entrée et peut être déduite immédiatement de la transformation de Lorentz en posant

$$\Delta x_2 = 0 .$$

Si, d'une façon générale, nous représentons conventionnellement le temps par plusieurs paramètres, il en résulte des conséquences dont la plus curieuse est certainement la célèbre « contraction » de Lorentz. Désignons par [T] un nombre afférent à l'instant T sur une échelle quelconque. Plaçons-nous sur S_1, pour préciser ; les points P_1', P_1'', P_1''', ... seront, par convention, envisagés simultanément lorsqu'on pose :

$$\tau_1' = \tau_1'' = \tau_1''' = \ldots = [T] .$$

Soient deux points P_1' et P_1'' seulement ; P_2' et P_2'' leurs conjugués

sur S_2 à l'instant T ; les coordonnées et les valeurs correspondantes des τ doivent satisfaire à la transformation, qu'il faut appliquer *deux* fois ; on a en particulier

$$x_2'' = \beta (x_1'' - \alpha c_0 [T])$$

$$x_2' = \beta (x_1' - \alpha c_0 [T])$$

dont on tire par soustraction :

$$x_1'' - x_1' = (x_2'' - x_2') \sqrt{1 - \alpha^2}$$

relation d'où résulte la célèbre « contraction ». Quelle signification convient-il, raisonnablement, de lui donner ? La plus simple possible. Nous n'attribuerons aucune existence à la « contraction », ni réelle ni apparente. Lorsque nous écrirons la relation précédente nous ne ferons qu'assigner deux nombres différents $(x_1'' - x_1)$ et $(x_2'' - x_2)$ à un seul et même segment. Nous réalisons ainsi pour l'espace la proposition corrélative de celle que nous avons introduite pour le temps, et nous arriverons à des conclusions parallèles. Si, en effet, la longueur reste la même mais que les nombres qui l'expriment diffèrent, il faut en conclure que nous ne nous servons pas du même instrument pour évaluer cette longueur dans les deux cas. Supposons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse d'une règle de d mètres de longueur. Plaçons-la sur S_2

$$x_2'' - x_2' = d \ ,$$

et pour S_1 elle sera mesurée par le nombre :

$$d_1 = d \sqrt{1 - \alpha^2} \ .$$

Cela exige que les étalons de longueur utilisés dans les deux cas soient liés par la relation

$$\Lambda_1 \sqrt{1 - \alpha^2} = \Lambda \ ,$$

de façon qu'on ait l'égalité :

$$\Lambda_1 d_1 = \Lambda d \ , \qquad \text{(II)}$$

corrélative de la relation (I) entre les périodes et les mesures d'une même durée. Quelle signification faut-il accorder aux Λ ? Pour le voir, dérivons par rapport à t la relation de Lorentz :

$$u_1 = \beta(u_2 + \alpha x_2) ,$$

nous obtenons :

$$c_1 = \beta(c_2 + \alpha q_2) ,$$

et comme la règle est immobile sur S_2, sa vitesse q_2 est nulle ; on a donc

$$c_2 = c_1 \sqrt{1 - \alpha_2} .$$

L'on voit ainsi que

$$\frac{\Lambda_1}{\Lambda} = \frac{c_1}{c_2} ,$$

autrement dit, les étalons de longueur sont proportionnels aux vitesses de la lumière dans chacun des systèmes pour le cas particulier envisagé. Cela revient à mesurer la longueur par le temps qu'un *même* rayon lumineux mettrait à la parcourir, la vitesse de ce rayon étant rapportée tantôt à l'un, tantôt à l'autre système. Posons :

$$\Lambda = 1 \qquad \text{d'où} \qquad \Lambda_1 = \frac{c_1}{c_2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2}} ;$$

nous obtenons pour les mesures de la règle :

$$\frac{d}{1} \qquad \text{et} \qquad d_1 = \frac{d}{\Lambda_1} = d\sqrt{1 - \alpha^2} ;$$

on retrouve bien la formule de la contraction. Il est à peine besoin de remarquer que l'expérience présupposée dans les affirmations précédentes ne peut être que fictive. Puisqu'on annule q_2, le rayon mensurateur est perpendiculaire à x_2 ; il chemine ici dans la quatrième dimension et correspond au temps propre de Minkowski. Un peu plus loin, à propos de l'expérience de Michelson et Morley, on verra facilement que si l'on mesurait la longueur d en la faisant parcourir à l'aller et au retour par un rayon lumineux, on obtiendrait une relation analogue avec $q_1 = \pm c_0$. Quant à l'impossibilité d'une vérification expérimentale, il se présente une remarque semblable à celle de la page 143.

Pour parachever la justification de notre point de vue, il nous reste à faire voir qu'en introduisant une autre convention sur la représentation du temps, on peut faire disparaître complètement la « contraction ». Il suffit de substituer la représentation monoparamétrique à la polyparamétrique.

A cet effet, intégrons les relations suivantes :

$$\frac{\Delta u_1}{c_1} = \frac{\Delta u_2}{c_2} = \Delta t \ ,$$

corrélatives de (4) et de (4′) ; nous obtenons :

$$u_1 = c_1 t + r_1$$
$$u_2 = c_2 t + r_2 \ .$$

En disposant de c_1 , c_2 et des deux constantes arbitraires r_1 et r_2 de manière à satisfaire à la transformation de Lorentz tout en sauvegardant la relativité, qui exige l'équivalence complète des des deux systèmes, on peut mettre ces relations sous la forme :

$$\left\{ \begin{aligned} c_0\tau_1 &= \frac{c_0}{\beta}\, t + \frac{\beta - 1}{\alpha\beta}\, x_1 = c_0 t + \frac{\beta - 1}{\alpha\beta}\, x_2 \\ c_0\tau_2 &= c_0 t - \frac{\beta - 1}{\alpha\beta}\, x_1 = \frac{c_0}{\beta}\, t - \frac{\beta - 1}{\alpha\beta}\, x_2 \end{aligned} \right.$$

dont on tire l'équation

$$x_1 = x_2 + vt \ ,$$

qui montre immédiatement que la « contraction » a disparu ; les deux systèmes se meuvent l'un pour l'autre, *comme* s'ils étaient des « touts » rigides ordinaires.

Ainsi la « contraction » s'évanouit automatiquement. Ce résultat remarquable a été commenté longuement dans notre premier travail, auquel nous renvoyons.

C'est ici l'endroit de rendre hommage à Henri Poincaré, qui a su entrevoir les résultats qui précèdent.

Dans *Science et Méthode,* parlant de la « contraction » introduite d'abord comme hypothèse physique, l'illustre mathématicien demande quelle utilité peut avoir cette hypothèse si aucune expérience ne peut permettre de la vérifier. « C'est que mon exposition a été incomplète, explique-t-il ; je n'ai parlé que des mesures que l'on peut faire avec un mètre ; mais on peut mesurer aussi une longueur par le temps que la lumière met à la parcourir, à la condition que l'on admette que la vitesse de la lumière est constante et indépendante de la direction. Lorentz aurait pu rendre compte des faits en supposant que la vitesse de la lumière est *plus grande* dans la direction du mouvement

de la Terre que dans la direction perpendiculaire. Il a préféré admettre que la vitesse est la même dans ces diverses directions, mais que les corps sont plus petits dans les unes que dans les autres. »

Montrons comment le calcul vérifie les affirmations du grand géomètre. Nous aurons ainsi l'occasion de parler de l'expérience de Michelson et Morley, qui a joué un si grand rôle dans la genèse de la théorie.

Revenons pour un instant aux anciennes idées et admettons l'existence de l'éther. L'éther immobile forme notre système S_1 et sera solidaire du système-voie. Sur le train nous installerons deux règles de longueur d, l'une parallèle, l'autre perpendiculaire à la voie, c'est-à-dire au mouvement. Un rayon lumineux se propage dans l'éther comme un rayon sonore dans l'air. Si c_0 est la valeur de la vitesse de propagation par rapport à l'éther et si nous considérons, comme plus haut des rayons faisant avec la voie un angle dont le cosinus est $\frac{v}{c_0}$, la vitesse relative de ceux-ci par rapport au train sera $\sqrt{c_0^2 - v^2}$ de sorte que le temps de parcours de la longueur d aura pour valeur $d : \sqrt{c_0^2 - v^2}$. Introduisons un faisceau symétrique du premier ; le cosinus de l'angle avec la voie sera $- v : c_0$, mais la vitesse ralative aura la même valeur, et le temps de parcours sera égal au précédent. Le temps total est donc

$$\Delta t_{1y} = \frac{2d}{\sqrt{c_0^2 - v^2}} .$$

Considérons maintenant les rayons parallèles au train, se propageant dans un sens ou dans l'autre. Pour ceux qui vont dans le même sens, la vitesse relative est plus faible et égale à $c_0 - v$; pour ceux qui vont en sens contraire, la vitesse relative est plus grande et a pour valeur $c_0 + v$. La somme des durées des parcours est donc :

$$\frac{d}{c_0 - v} + \frac{d}{c_0 + v} = \frac{2dc_0}{c_0^2 - v^2} ;$$

elle est différente du temps qu'emploient les rayons transversaux à parcourir la règle perpendiculaire au mouvement. Pour

établir l'égalité, Lorentz et Fitzgerald ont supposé que la règle parallèle au mouvement subissait, du fait de celui-ci, une contraction qui lui donnait la longueur $d\sqrt{1-\alpha^2}$. Si, en effet, on substitue à d cette valeur moindre dans l'expression ci-dessus, on trouve bien l'égalité des temps. Or, au lieu de réduire les numérateurs d, Lorentz aurait pu augmenter les dénominateurs, et admettre que les vitesses dans le sens du mouvement sont plus grandes, conformément à la remarque de Poincaré. Il suffit, en effet, de leur attribuer les valeurs $\beta(c_0 - v)$ et $\beta(c_0 + v)$ pour retrouver l'égalité des durées.

Voyons comment on peut déduire ces vitesses de la transformation de Lorentz. Si nous appelons respectivement q_{1x}, c_1, c_2 les dérivées par rapport à t des coordonnées x_1, u_1, u_2 la dernière des relations (1) donne :

$$c_2 = \beta(c_1 - \alpha q_{1x}) .$$

Or, dans S_1, nous avons pour les rayons lumineux parallèles à l'axe O_1x_1

$$q_{1x} = c_1 = \pm c_0 ,$$

d'où en substituant dans la relation précédente :

$$(c_2)_{+x} = \beta(c_0 - v) \; ; \quad (c_2)_{-x} = \beta(c_0 + v) .$$

Ce sont justement les valeurs prévues, et l'on a bien

$$\Delta t_{1x} = \frac{d}{\beta}\left(\frac{1}{c_0 - v} + \frac{1}{c_0 + v}\right) = \frac{2d}{\sqrt{c_0^2 - v^2}} ,$$

c'est-à-dire :

$$\Delta t_{1x} = \Delta t_{1y} .$$

Empressons-nous de remarquer d'ailleurs qu'on ne voit nullement la possibilité de vérifier cette relation expérimentalement et de déterminer les durées Δt_{1x} et Δt_{1y}. Il faudrait, en effet, que les règles d du système-train fussent parcourues par des rayons qui *n'appartiennent pas* au système. Si l'on réalise l'expérience, comme c'est le cas dans les célèbres recherches de Michelson et Morley, les rayons appartiennent nécessairement au système qui porte les appareils, en l'espèce la Terre ; dans ce cas, la vitesse

des rayons est c_0 pour toutes les directions, et les durées sont

$$\Delta t_{2x} = \Delta t_{2y} = \frac{2d}{c_0} \quad ;$$

elles sont nécessairement différentes des précédentes. Nous nous heurtons ici à la difficulté signalée au début et qui provient de ce que nous ignorons l'envergure du système physique de référence.

Pour résumer les résultats de la présente étude, nous dirons qu'on peut employer indifféremment la représentation monoparamétrique en polyparamétrique du temps ; elles sont équivalentes et conduisent aux mêmes interprétations des formules. On utilisera de préférence les équations aux accroissements Δx, Δy, Δz, Δu ; ceux-ci sont alors « simultanés », au sens mathématique et au sens concret. Dès lors, chacun fonctionne comme une horloge et donne une mesure du temps ; à nous de choisir la plus commode.

La question du temps se trouve ainsi complètement éclaircie. Une des plus importantes à traiter maintenant est, sans contredit, la question des « vraies » vitesses des systèmes. Si trois systèmes S_1, S_2, S_3 sont animés de translations relatives uniformes et parallèles, leurs vitesses, d'après la Mécanique classique, satisfont à la relation :

$$V_{13} = V_{12} + V_{23} \, .$$

D'après la Théorie de la relativité, par contre, les vitesses doivent remplir la condition :

$$v_{13} = \frac{v_{12} + v_{23}}{1 + v_{12} v_{23}} \, ,$$

ce que nous avons exprimé en disant qu'il y avait mouvement avec *aberration*. Cette aberration provient de ce que les vitesses v_{13}, v_{12}, v_{23} ne se composent pas suivant une figure *fermée*, comme c'est le cas dans toutes les cinématiques, euclidiennes ou non-euclidiennes. Si donc on veut trouver les vitesses « vraies », il faut chercher des fonctions Ω_{12}, Ω_{13}, Ω_{23} des vitesses v, qui donnent une figure fermée, c'est-à-dire s'additionnent *linéairement*. En un mot, les vitesses vraies doivent satisfaire à l'équation

fonctionnelle suivante :

$$\Omega_{13}(v_{13}) = \Omega_{12}(v_{12}) + \Omega_{23}(v_{23}) \ .$$

Or il est très remarquable que l'Analyse réponde immédiatement à cette question, et d'une façon qui exclut tout arbitraire : il suffit, en effet, de prendre pour Ω les arguments dont les tangentes hyperboliques sont justement les v. Ce n'est certes pas par hasard qu'une telle solution s'offre à nous, et nous ne devons pas la rejeter sans l'avoir consciencieusement examinée. Il en résulterait que les trajectoires vraies des points matériels seraient des géodésiques de surfaces à courbure constante négative.

La conséquence la plus curieuse concerne la vitesse « vraie » de la lumière. Celle-ci s'obtient en posant :

$$v = 1 \ , \qquad \text{d'où} \qquad \Omega = \infty \ .$$

Cette solution fait bien apparaître le caractère *limite* de la vitesse lumineuse, caractère qui se rencontre à chaque pas dans la Théorie. Or, qui dit limite dit *tendance*. On sait que dans la théorie restreinte, l'énergie rayonnante n'est pas parfaitement identique à la matière ; la masse d'un corps augmente avec la vitesse et deviendrait infinie si ce corps pouvait atteindre la vitesse de la lumière ; celle-ci constituerait donc une limite inaccessible à la substance. Or, tout tend à nous prouver que l'énergie jouit des mêmes propriétés physiques que les corps. Si nous posons d'une façon générale le *principe de l'équivalence physique de l'énergie et de la matière,* nous serons conduits à une image comme celle-ci : un rayon s'élance d'une source lumineuse ; son énergie aurait la tendance à cheminer aussi vite que possible ; mais, par le fait même de son mouvement, elle se « matérialiserait », ce qui l'obligerait à ralentir son élan et à acquérir une vitesse de *régime* légèrement inférieure à la limite c_0 ; la vitesse « vraie » Ω_0 ne serait plus infinie. Avec cette image le principe de la *constance* de la vitesse de la lumière, si mystérieux, recevrait une ébauche d'explication. Ce régime se présente comme un *continu* pour la Théorie ; si l'on suit les tendances modernes, on sera conduit à croire qu'en réalité, il est formé d'un nombre énorme de processus élémentaires. Peut-être y aurait-il là un

germe qui permettrait de pénétrer le mécanisme encore inconnu des *quanta* d'énergie. A l'avenir de répondre.

Rectification.

Dans notre premier travail (*Archives* (4). *46,* 1918, pp. 281 et suivantes), il s'est glissé quelques erreurs dont voici la rectification :

Page 300, 1re formule (1), remplacer les indices 1 par les indices 2 dans le second membre.

Page 303, 9me ligne, lire : *lentement* au lieu de *vite.*

Page 304, formule (4), mettre le signe — devant $\frac{\Delta x_2}{\Delta \tau_2}$.

Dans les figures et les formules qui s'y rapportent, la vitesse de la lumière doit être multipliée par l'unité imaginaire i.

Page 322, il faut mettre le signe — devant Q_{31} dans la dernière relation.

BULLETIN SCIENTIFIQUE

Louis Rougier. — *La matérialisation de l'énergie*, Gauthier-Villars, Paris.

L'ouvrage que vient de publier M. Rougier, professeur agrégé de philosophie, sur la matérialisation de l'énergie est de nature à intéresser non seulement les philosophes, mais tous ceux parmi les physiciens qu'intéresse la haute portée philosophique des récentes découvertes de la physique. Ils y trouveront d'abord un résumé très clair des résultats les plus importants que les nouvelles conceptions, grâce au principe de relativité et à la théorie des quanta, ont introduits dans la physique moderne ; et cela sous une forme bien faite pour en faire ressortir l'importance philosophique.

« Il arrive souvent, nous dit l'auteur de cet ouvrage, dans sa préface, que les problèmes métaphysiques réputés insolubles,