Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles

Band: 4 (1922)

Artikel: À propos de la transformation de Lorentz

Autor: Juvet, G.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-741983

cable. Mais comme, d'autre part, la formule (2) doit être également vérifiée, on doit avoir dans ce cas limite :

$$K\,(1 + D)^{\frac{3}{2}} = \frac{2\,\sqrt{2\,\varepsilon/\mu}}{9}\,\frac{l}{r}\,.$$

Comme D devient considérable lorsque la distance entre l'anode et la grille diminue, K doit être nécessairement plus petit que la constante de Langmuir (second membre de la relation). Par conséquent, la formule de Langmuir utilisée jusqu'à présent fournit des valeurs trop élevées pour le coefficient angulaire de la caractéristique. La formule (7) doit mieux convenir aux conditions véritables.

G. JUVET) (Neuchâtel). — *A propos de la transformation de Lorentz.*

M^lle^ MUNARI a publié une note [1] sur le minimum d'hypothèses nécessaires à la déduction de la transformation de Lorentz; la note que nous publions ici en forme la suite logique.

On sait que la transformation de Lorentz la plus générale fait correspondre le quaterne (x, y, z, t) au quaterne $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$ par des formules linéaires telles que l'on ait l'identité:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 - c^2\bar{t}^2\,. \qquad (1)$$

Posons

$$x = x_1\,,\ y = x_2\,,\ z = x_3\,,\ ict = x_4\,,$$

la transformation de Lorentz s'exprime par des relations de la forme:

$$(2)\quad x_i = \sum_{k=1}^{k=4} \alpha_{ik}\,x_k \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{i=4} x_i^2 = \sum_{i=1}^{i=4} \bar{x}_i^2 \quad (2a)$$

Mon but est de montrer que cette transformation générale est le produit de deux transformations plus simples, dont l'une est la transformation de Lorentz telle que la répètent tous les ouvrages de vulgarisation et dont l'autre est une rotation purement spatiale.

[1] *Rendiconti dei Lincei*, 1914, 1^er^ sem.

Les transformations (2) compatibles avec ($2a$) forment un groupe que nous appellerons le groupe (G); le groupe (G) est le groupe des déplacements réels ou imaginaires de l'espace (x_1, x_2, x_3, x_4), l'origine (0, 0, 0, 0,) restant fixe.

Le problème qui se pose immédiatement, semble-t-il, consiste à trouver la structure du groupe G. Or dès l'instant où la transformation de Lorentz a un sens physique, il importe que les variables x, y, z, t soient réelles en même temps que $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, $\bar{t}$.

Si donc, on exprime la transformation (1) en distinguant la 4me variable, elle s'écrit:

$$\left.\begin{aligned} x_h &= \sum_{k=1}^{k=3} \alpha_{hk}\bar{x}_k + \alpha_{h2}\, ic\bar{t} \\ ict &= \sum_{k=1}^{k=3} \alpha_{4k}\bar{x}_k + \alpha_{44}\, ic\bar{t}\ . \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Pour qu'une telle transformation ait un sens physique, il faut et il suffit que les α_{hk} (h et $k \neq 4$) soient réels, ainsi que α_{44}, et que les α_{h4} et α_{4h} ($h \neq 4$) soient purement imaginaires. Le produit de deux transformations dont les coefficients satisfont à ces conditions est une transformation dont les coefficients y satisfont aussi; l'inverse d'une telle transformation en est une aussi. La transformation identique est soumise aux mêmes restrictions, donc l'ensemble des transformations de Lorentz forme un sous-groupe (G_L) du groupe (G). Si dans (2) on considère les x_i et les $\bar{x}_i$ ainsi que tous les α_{hk} comme des nombres réels, on obtient un ensemble de transformations qui forment un sous-groupe G_R du groupe G. G_R *est isomorphe à* G_L.

Pour avoir la structure de G_L, il suffit donc de connaître celle de G_R.

Les transformations de G_R sont des rotations autour de l'origine. JORDAN[1] a démontré que la rotation la plus générale d'un tétraèdre quadrirectangulaire revient à la succession de deux rotations autour de deux 2-plans absolument perpendiculaires. Voici une démonstration directe de cette proposition. Mon-

[1] *Bull. Soc. Math. de France*, III, 1875.

trons tout d'abord qu'une transformation de G_R : $x_i = \sum_{k=1}^{k=4} \alpha^{ik} x_k$ ne laisse en général aucune droite invariante, car si cela était, on pourrait déterminer des x_i non tous nuls tels que

$$\pm x_i = \sum \alpha_{ik} x_k$$

et par suite l'équation:

$$D(0) \equiv \begin{vmatrix} \alpha_{11} - s & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - s & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} - s & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} - s \end{vmatrix} = 0$$

admettrait pour racines $s = 1$ ou $s = -1$. Or on a:

$$D(s)\, D(-s) = s^n \begin{vmatrix} \frac{1}{s} - s & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \gamma_{14} \\ \gamma_{21} & \frac{1}{s} - s & \gamma_{23} & \gamma_{24} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \frac{1}{s} - s & \gamma_{34} \\ \gamma_{41} & \gamma_{42} & \gamma_{43} & \frac{1}{s} - s \end{vmatrix}$$

$$(\gamma_{ik} = \alpha_{ki} - \alpha_{ik})$$

Si l'on pose $\frac{1}{s} - s = z$, l'on aura $z = 0$ si $s = \pm 1$. Pour montrer que $D(\pm 1) \neq 0$, il suffit de montrer que l'équation en z

$$f(z) \equiv \begin{vmatrix} z & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \gamma_{14} \\ \gamma_{21} & z & \gamma_{23} & \gamma_{24} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & z & \gamma_{34} \\ \gamma_{41} & \gamma_{42} & \gamma_{43} & z \end{vmatrix} = 0$$

n'a pas de racines nulles. En effet le déterminant symétrique gauche $f(0)$ est un carré parfait non nul en général.

Dès qu'il n'y a pas de droite invariable, il n'y a pas de 3- plan invariable, car alors la perpendiculaire au 3-plan issue de l'origine serait invariable. Il est donc impossible de trouver une forme linéaire $\sum_{i=1}^{i=4} A_i x_i$ telle que la transformation la multiplie par un nombre réel s, c'est-à-dire telle que:

$$\sum_{i,k}^{i=4} A_i \alpha_{ik} x_k = s \sum_{i=1}^{i=4} A \; x_i$$

s satisfierait alors à l'équation $D(0) = 0$. Cette équation n'admettant pas de racines réelles, voyons ce que donne un couple de racines imaginaires conjuguées $s_1 \pm is_2$. La forme $\sum_{k=1}^{k=4} A_k x_k$ (à coefficients complexes) se trouve multipliée par $s_1 + is_2$ et la forme $\sum_{k=1}^{k=4} \bar{A}_k x_k$ ($\bar{A}_k$ est la conjuguée de A_k) par $s_1 - is_2$.

Posons:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{k=1}^{k=4} A_k x_k &= P + iQ \\ \sum_{k=1}^{k=4} \bar{A}_k x_k &= P - iQ \end{aligned}\right| \quad \text{P et Q réels}$$

alors $P + iQ$ est multiplié, dans la transformation, par $s_1 + is_2$, c'est-à-dire que

$$\begin{array}{llll} P & \text{se change en} & & s_1 P - s_2 Q \\ Q & \text{»} & \text{»} & s_2 P + s_1 Q \end{array}$$

Le 2-plan réel $P = 0$, $Q = 0$ se transforme en le 2-plan réel $s_1 P - s_2 Q = 0$, $s_2 P + s_1 Q = 0$; or ces deux variétés sont identiques. Il existe donc en général un 2-plan qui se transforme en lui-même. Prenons-le comme 2-plan des $x_1 x_2$. Alors les points $(x_1, x_2, 0, 0)$ se transforment en $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0, 0)$, c'est-à-dire que

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11} \bar{x}_1 + \alpha_{12} \bar{x}_2 \\ x_2 &= \alpha_{21} \bar{x}_1 + \alpha_{22} \bar{x}_2 \end{aligned} \qquad \text{(I)}$$

Mais puisque $\Sigma x_i^2 = \Sigma \bar{x}_i^2$ et que $\alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 = \alpha \quad + \alpha_{22}^2 = 1$, on a: $\alpha_{31} = \alpha_{32} = \alpha_{41} = \alpha_{42} = 0$, et par suite:

$$\begin{aligned} x_3 &= \alpha_{33} \bar{x}_3 + \alpha_{34} \bar{x}_4 \\ x_4 &= \alpha_{43} \bar{x}_3 + \alpha_{44} \bar{x}_4 \end{aligned} \qquad \text{(II)}$$

La transformation générale est bien le produit de deux rotations autour de deux 2-plans absolument perpendiculaires.

On voit alors facilement que la transformation correspondante du groupe G_L est le produit des deux transformations:

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11}\,\overline{x}_1 + \alpha_{12}\,\overline{x}_2 \\ x_2 &= \alpha_{21}\,\overline{x}_1 + \alpha_{22}\,\overline{x}_2 \\ x_3 &= \overline{x}_3 \\ x_4 &= \overline{x}_4 \end{aligned}\right.$$

et

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= \overline{x}_1 \\ x_2 &= \overline{x}_2 \\ x_1 &= \alpha_{33}\,\overline{x}_3 + \frac{\alpha_{34}}{i}\,\overline{x}_4 \\ x_4 &= i\alpha_{43}\,\overline{x}_3 + \alpha_{44}\,\overline{x}_4 \end{aligned}\right.$$

La seconde est la transformation de Lorentz sous sa forme classique, la première est une transformation purement spatiale peu intéressante pour le physicien.

Ch. WILLIGENS (Interlaken). — *Sur l'interprétation géométrique du temps universel, dans la représentation de M. P. Gruner.*

Considérons un système d'axes rectangulaires X O U que nous désignerons par S_0 et considérons dans ce système les droites:

$$(Ox) \quad U = mX\,, \qquad (Ou) \quad U = \frac{1}{m}X\,;$$
$$(Ox') \quad U = -\,mX\,, \qquad (Ou') \quad U = -\,\frac{1}{m}X\,.$$

M. Gruner prend comme axes de coordonnées Ox, Ou que nous désignons par S et $Ox'\,Ou'$ que nous désignons par S'. Ox et Ox' sont symétriques par rapport à OX, Ou *et* Ou' par rapport à OU. Si nous désignons par φ l'angle que ces axes forment avec OX ou OU nous obtenons facilement les formules de transformation de coordonnées:

$$\left.\begin{aligned} X &= x\cos\varphi + u\sin\varphi \\ U &= x\sin\varphi + u\cos\varphi \end{aligned}\right\}\ (S_0\,,\ S)$$

$$\left.\begin{aligned} X &= \,x'\cos\varphi - u'\sin\varphi \\ U &= -\,x'\sin\varphi - u'\cos\varphi \end{aligned}\right\}\ (S_0\,,\ S')\,.$$