

Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 5 (1923)

Artikel: Le champ électromagnétique d'un électron en mouvement
Autor: Wisniewski, Félix-Joachim de
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-741338>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 06.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

LE CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE

D'UN

ÉLECTRON EN MOUVEMENT

PAR

Félix-Joachim de WISNIEWSKI

Le but que je me propose ici est la solution des équations du champ électromagnétique d'un électron en mouvement par un procédé qui n'utilise pas les potentiels retardés.

Comme la solution obtenue au moyen des potentiels retardés conduit à des résultats qui ne s'accordent pas avec la stabilité des systèmes construits avec des électrons en mouvement, base des nouvelles théories de la structure des atomes, notre recherche d'une solution nouvelle est justifiée.

Désignons par ξ, η, ζ les coordonnées de l'électron, par x, y, z les coordonnées d'un point de l'espace et par R la distance entre l'électron et le point de l'espace.

$$R^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 .$$

Si $\Phi(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)$ désigne le potentiel scalaire et $A(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)$ le potentiel vecteur on a pour l'intensité électrique E et magnétique H du champ de l'électron les expressions:

$$E = -\nabla\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} ; \quad H = \text{rot } A .$$

A et Φ sont déterminées par les équations suivantes:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \Phi = 4\pi\rho ; \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \nabla^2 A = 4\pi \frac{\rho v}{c} ; \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \text{div } A = 0$$

où

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

et ρ signifie la densité de l'électricité au point x, y, z ; v la vitesse de l'électron.

$$v^2 = \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2.$$

J'admets ici que Φ et A sont des fonctions du temps uniquement par l'intermédiaire des coordonnées ξ, η, ζ de l'électron de sorte que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\dot{\xi}}{c} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\dot{\eta}}{c} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\dot{\zeta}}{c} \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= \frac{\dot{\xi}^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\dot{\eta}^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\dot{\zeta}^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \frac{\ddot{\xi}}{c^2} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\ddot{\eta}}{c^2} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\ddot{\zeta}}{c^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ &+ 2 \frac{\dot{\xi}}{c} \frac{\dot{\eta}}{c} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + 2 \frac{\dot{\xi}}{c} \frac{\dot{\zeta}}{c} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \zeta} + 2 \frac{\dot{\eta}}{c} \frac{\dot{\zeta}}{c} \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \zeta}. \end{aligned}$$

En tenant compte des relations:

$$\frac{\partial}{\partial(x, y, z)} = - \frac{\partial}{\partial(\xi, \eta, \zeta)}; \quad \frac{\partial^2}{[\partial(x, y, z)]^2} = \frac{\partial^2}{[\partial(\xi, \eta, \zeta)]^2}$$

on obtient l'équation différentielle de Φ :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \left(1 - \frac{\dot{\xi}^2}{c^2}\right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \left(1 - \frac{\dot{\eta}^2}{c^2}\right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \left(1 - \frac{\dot{\zeta}^2}{c^2}\right) \\ &+ \frac{\ddot{\xi}}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\ddot{\eta}}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\ddot{\zeta}}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \\ &- 2 \frac{\dot{\xi}}{c} \frac{\dot{\eta}}{c} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\dot{\xi}}{c} \frac{\dot{\zeta}}{c} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} - 2 \frac{\dot{\eta}}{c} \frac{\dot{\zeta}}{c} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} = -4\pi\rho \end{aligned}$$

et une équation analogue pour A .

Posons:

$$\begin{aligned} (u, u_0) &= \frac{(x, \xi)}{\sqrt{1 - \dot{\xi}^2/c^2}}; \quad (v, v_0) = \frac{(y, \eta)}{\sqrt{1 - \dot{\eta}^2/c^2}}; \\ (w, w_0) &= \frac{(z, \zeta)}{\sqrt{1 - \dot{\zeta}^2/c^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{\frac{\ddot{\xi}}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\xi}^2}{c^2}}} ; & b &= \frac{\frac{\ddot{\eta}}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\eta}^2}{c^2}}} ; & c &= \frac{\frac{\ddot{\zeta}}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\zeta}^2}{c^2}}} \\
 \alpha &= \frac{\frac{\dot{\xi}}{c} \cdot \frac{\dot{\eta}}{c}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\dot{\xi}^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{\dot{\eta}^2}{c^2}\right)}} ; & \beta &= \frac{\frac{\dot{\xi}}{c} \cdot \frac{\dot{\zeta}}{c}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\dot{\xi}^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{\dot{\zeta}^2}{c^2}\right)}} ; \\
 \gamma &= \frac{\frac{\dot{\eta}}{c} \cdot \frac{\dot{\zeta}}{c}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\dot{\eta}^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{\dot{\zeta}^2}{c^2}\right)}} .
 \end{aligned}$$

L'équation différentielle de Φ s'écrit alors en fonction des nouvelles variables u, v, w .

$$\nabla^2 \Phi + a \frac{\partial \Phi}{\partial u} + b \frac{\partial \Phi}{\partial v} + c \frac{\partial \Phi}{\partial w} - 2\alpha \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} - 2\beta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial w} - 2\gamma \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v \partial w} = -4\pi\rho$$

Orientons les axes des x, y, z dans l'espace de telle manière que l'axe des x soit parallèle à la direction instantanée de la vitesse v de l'électron.

Alors, on a :

$$\dot{\xi} = v ; \quad \dot{\eta} = \dot{\zeta} = 0 ; \quad \alpha = \beta = \gamma = 0 ; \quad dv = dy ; \quad dw = dz$$

$$a = \frac{\frac{\ddot{\xi}}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} ; \quad b = \frac{\ddot{\eta}}{c^2} ; \quad c = \frac{\ddot{\zeta}}{c^2} ;$$

$$(du, du_0) = \frac{(dx, d\xi)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} ; \quad dv_0 = d\eta ; \quad dw_0 = d\zeta .$$

Pour Φ et A on obtient ainsi les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 \Phi + a \frac{\partial \Phi}{\partial u} + b \frac{\partial \Phi}{\partial v} + c \frac{\partial \Phi}{\partial w} &= -4\pi\rho \\
 \nabla^2 A + a \frac{\partial A}{\partial u} + b \frac{\partial A}{\partial v} + c \frac{\partial A}{\partial w} &= -4\pi \frac{\rho \cdot v}{c}
 \end{aligned}$$

où

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} + \frac{\partial^2}{\partial w^2} .$$

En tenant compte des relations:

$$\frac{\partial}{\partial(u, v, w)} = - \frac{\partial}{\partial(u_0 v_0 w_0)} ; \quad \frac{\partial^2}{[\partial(u, v, w)]^2} = \frac{\partial^2}{[\partial(u_0 v_0 w_0)]^2}$$

on peut écrire les mêmes équations sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} \nabla_0^2 \Phi - a \frac{\partial \Phi}{\partial u_0} - b \frac{\partial \Phi}{\partial v_0} - c \frac{\partial \Phi}{\partial w_0} &= -4\pi\rho \\ \nabla_0^2 A - a \frac{\partial A}{\partial u_0} - b \frac{\partial A}{\partial v_0} - c \frac{\partial A}{\partial w_0} &= -4\pi \frac{c\nu}{c} ; \end{aligned}$$

où

$$\nabla_0^2 = \frac{\partial^2}{\partial u_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial v_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial w_0^2} .$$

Le mouvement uniforme.

Nous passons maintenant à l'étude du champ électromagnétique d'un électron en mouvement uniforme.

Dans ce cas, on a:

$$a = b = c = 0 ; \quad \ddot{\xi} = \ddot{\eta} = \ddot{\zeta} = 0 .$$

Les équations de Φ et de A deviennent alors:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial w^2} &= -4\pi\rho \\ \frac{\partial^2 A}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial w^2} &= -4\pi \frac{c\nu}{c} . \end{aligned}$$

Les solutions de ces équations sont:

$$\begin{aligned} \Phi &= \iiint \frac{\rho \cdot du_0 dv_0 dw_0}{\sqrt{(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2 + (w - w_0)^2}} \\ A &= \frac{\nu}{c} \cdot \Phi . \end{aligned}$$

Si l'on considère l'électron comme un point mathématique, on trouve pour Φ et A les expressions:

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{e}{\sqrt{\bar{X}^2 + \left(1 - \frac{\nu^2}{c^2}\right) (\bar{Y}^2 + Z^2)}} \\ A &= \frac{\nu}{c} \cdot \Phi \end{aligned}$$

car

$$\varepsilon = \iiint \rho \cdot d\xi, d\eta, d\zeta$$

$$\bar{X} = x - \xi ; \quad \bar{Y} = y - \eta ; \quad Z = z - \zeta .$$

Si l'on pose

$$R^2 = \bar{X}^2 + \bar{Y}^2 + Z^2$$

on obtient:

$$\Phi = \frac{\varepsilon}{R} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 (Rv)}}$$

$$A = \frac{v}{c} \cdot \frac{\varepsilon}{R} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 (Rv)}} .$$

Si l'on admet que la trajectoire de l'électron est une droite parallèle à l'axe des x , on a pour les composantes de E et de H , en remarquant que:

$$\frac{\partial A_x}{\partial t} = - \frac{\partial A_x}{\partial \xi} \frac{d\xi}{cdt} = \frac{v^2}{c^2} \cdot \frac{\varepsilon \cdot \bar{X}}{\left[\sqrt{\bar{X}^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) (\bar{Y}^2 + Z^2)} \right]^3}$$

les expressions suivantes:

$$(E_x, E_y, E_z) = - \frac{\varepsilon}{R^3} \cdot \frac{1 - v^2/c^2}{\left[\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 (Rv)} \right]^3} \cdot (\bar{X}, \bar{Y}, Z)$$

$$H_x = 0 ; \quad H_y = + \frac{v}{c} E_z ; \quad H_z = - \frac{v}{c} E_y .$$

Posons:

$$(E_u, E_v, E_w) = \frac{(u - u_0) (v - v_0) (w - w_0) \varepsilon}{r^3}$$

où

$$r^2 = (u - u_0)^2 + (v - v_0)^2 + (w - w_0)^2 .$$

Il vient alors:

$$E_x = E_u ; \quad E_y = \frac{E_v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} ; \quad E_z = \frac{E_w}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

et

$$H_x = 0 ; \quad H_y = \frac{-\frac{v}{c} E_w}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} ; \quad H_z = \frac{v}{c} \cdot \frac{E_v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} .$$

En comparant ces relations avec les équations de transformations déduites du principe de relativité, on voit que les axes u , v , w doivent être considérés comme liés à l'électron.

Cette solution des équations du champ électromagnétique fournit donc directement les relations de M. Einstein.

Le mouvement accéléré.

Dans le cas du mouvement accéléré de l'électron, nous allons calculer directement les intensités E et H du champ électromagnétique sans passer par l'intermédiaire des expressions de Φ et de A .

Les équations du champ électromagnétique sont:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} H - \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} &= 4\pi \frac{\rho v}{c} ; \quad \operatorname{rot} E + \frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t} = 0 ; \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho v) = 0 \\ \operatorname{div} E &= 4\pi \rho ; \quad \operatorname{div} H = 0 . \end{aligned}$$

On déduit de ces équations

$$\begin{aligned} \nabla^2 E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} &= 4\pi [\nabla \rho - v(v \nabla \rho)] + 4\pi \rho \left[\frac{dv}{dt} - v \cdot \operatorname{div} v \right] \\ \nabla^2 H - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} &= - \operatorname{rot} \frac{\rho v}{c} \cdot 4\pi . \end{aligned}$$

Comme ces équations ont la même forme que les équations déterminant Φ et A , on peut leur appliquer les mêmes transformations

$$\begin{aligned} \nabla_0^2 E - a \frac{\partial E}{\partial u_0} - b \frac{\partial E}{\partial v_0} - c \frac{\partial E}{\partial w_0} &= - 4\pi [\nabla_1 \rho - v(v \nabla_1 \rho)] \\ \nabla_0^2 H - a \frac{\partial H}{\partial u_0} - b \frac{\partial H}{\partial v_0} - c \frac{\partial H}{\partial w_0} &= \operatorname{rot}_1 \frac{\rho v}{c} \cdot 4\pi . \end{aligned}$$

On a en effet

$$\frac{dv}{dt} - v \operatorname{div} v = 0 ,$$

vu que

$$\frac{dx}{dt} = v ; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0 .$$

Posons:

$$\nabla_1 = i \frac{\partial}{\partial \xi} + j \frac{\partial}{\partial \eta} + k \frac{\partial}{\partial \zeta}$$

$$\text{rot}_1 \mathbf{S} = i \left(\frac{\partial S_z}{\partial \eta} - \frac{\partial S_y}{\partial \zeta} \right) + j \left(\frac{\partial S_x}{\partial \zeta} - \frac{\partial S_z}{\partial \xi} \right) + k \left(\frac{\partial S_y}{\partial \xi} - \frac{\partial S_x}{\partial \eta} \right).$$

On a comme solutions de ces équations:

$$E(u, v, w) = \iiint [\nabla_1 \varphi - v(\nu \nabla_1 \varphi)] \varphi(u, v, w, u_0 \nu_0 w_0) du_0 dv_0 dw_0$$

$$H(u, v, w) = \iiint \text{rot}_1 \frac{\varphi \nu}{c} \cdot \varphi(u, v, w, u_0 \nu_0 w_0) du_0 dv_0 dw_0$$

où φ est l'intégrale particulière de l'équation adjointe.

$$(\delta) \quad \nabla_0^2 \varphi + a \frac{\partial \varphi}{\partial u_0} + b \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_0} + c \frac{\partial \varphi}{\partial w_0} = 0$$

φ doit être une fonction régulière dans tout l'espace sauf au point (u, v, w) . Pour intégrer l'équation (δ) posons

$$\varphi(u, v, w, u_0 \nu_0 w_0) = \lambda(u, v, w, u_0 \nu_0 w_0) e^{+\frac{a}{2}(u-u_0) + \frac{b}{2}(\nu-\nu_0) + \frac{c}{2}(w-w_0)}$$

et introduisons cette expression dans l'équation (δ) . On obtient alors une équation qui détermine λ .

$$\nabla_0^2 \lambda - z^2 \cdot \lambda = 0$$

où

$$z = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Nous allons nous servir des trois intégrales suivantes de cette équation:

$$(\lambda_u, \lambda_\nu, \lambda_w) = \left[\frac{1}{r^3} + z \frac{1}{r^2} \right] e^{-zr} \cdot (u - u_0), (\nu - \nu_0), (w - w_0)$$

où

$$r^2 = (u - u_0)^2 + (\nu - \nu_0)^2 + (w - w_0)^2.$$

Pour φ on obtient, par conséquent:

$$(\varphi_u, \varphi_\nu, \varphi_w) = \left[\frac{1}{r^3} + z \frac{1}{r^2} \right] e^{-zr[1-\cos(zr)]} \cdot (u - u_0)(\nu - \nu_0)(w - w_0)$$

Mais

$$i_u[\nabla_1 \rho - v(v \nabla_1 \rho)] = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \frac{\partial \rho}{\partial \xi}$$

$$j_v[\nabla_1 \rho - v(v \nabla_1 \rho)] = \frac{\partial \rho}{\partial \eta} ; \quad k_w[\nabla_1 \rho - v(v \nabla_1 \rho)] = \frac{\partial \rho}{\partial \zeta} ,$$

car

$$i_u = \frac{i_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} ; \quad j_v = j_y ; \quad k_w = k_z$$

$$i_u^2 = j_u^2 = k_w^2 = 1 \quad (i_u j_v) = (i_u k_w) = (j_v k_w) = 0$$

et

$$j_v \operatorname{rot}_1 \frac{\rho v}{c} = \frac{v}{c} \frac{\partial \rho}{\partial \zeta} ; \quad k_w \operatorname{rot}_1 \frac{\rho v}{c} = -\frac{v}{c} \frac{\partial \rho}{\partial \eta} ; \quad i_u \operatorname{rot}_1 \frac{\rho v}{c} = 0$$

parce qu'on a :

$$v = -\nabla s ; \quad \dot{\xi} = v ; \quad \dot{\eta} = \dot{\zeta} = 0 .$$

Or, comme

$$\varepsilon = \iiint \rho d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta ,$$

et

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \iiint du \cdot dv \cdot dw \cdot \rho .$$

il suit de la relation

$$\iiint \nabla_1 \rho du_0 dv_0 dw_0 = \frac{n}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \iint \rho d\sigma = \frac{\mu \varepsilon}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

où

$$n = i_u + j_v + k_w ,$$

que

$$\begin{aligned} \iiint \frac{\partial \rho}{\partial \xi} du_0 dv_0 dw_0 &= \iiint \frac{\partial \rho}{\partial \eta} du_0 dv_0 dw_0 \\ &= \iiint \frac{\partial \rho}{\partial \zeta} du_0 dv_0 dw_0 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} . \end{aligned}$$

En tenant compte de toutes ces relations et en considérant l'électron comme un point mathématique, on obtient pour les

composantes de E et H les relations suivantes:

$$(E_x, E_y, E_z) = E_{0x}, E_{0y}, E_{0z})$$

$$\left[1 + zR \cdot \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \cos^2(Rv)}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right] e^{-zR} \cdot \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2(Rv)}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left[1 - \cos \left(z, R \cdot \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2(Rv)}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) \right]$$

$$H_x = 0$$

$$(H_y, H_z) = \frac{v}{c} [E_z, -E_y]$$

où

$$(E_{0x}, E_{0y}, E_{0z}) = -\frac{\varepsilon}{R^3} \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left[\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2(Rv)}\right]^3} \cdot (\bar{X}, \bar{Y}, Z)$$

Posons

$$(E_u, E_v, E_w) = -\varepsilon \left[\frac{1}{r^3} + z \frac{1}{r^2} \right] e^{-zr(1 - \cos(zr))} \cdot (u - u_0)(v - v_0)(w - w_0)$$

Alors on obtient

$$E_x = E_z ;$$

$$(E_y, E_z) = \frac{(E_v, E_w)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \cdot (H_y, H_z) = \frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \cdot (E_w, -E_v)$$

Ce sont là les relations de M. Einstein.

E_u, E_v, E_w sont les composantes du champ électromagnétique de l'électron par rapport à un système d'axes (u, v, w) qui à l'instant considéré a la même vitesse v que l'électron. Par rapport au système de référence (u, v, w) , l'électron est à cet instant en repos, mais il est accéléré.

Nous allons encore calculer l'énergie électrique μ et magnétique M de l'électron, rapportée au système d'axes (x, y, z) .

On a

$$\mu = \frac{1}{8\pi} \iiint (E_x^2 + E_y^2 + E_z^2) dx dy dz$$

expression que l'on peut aussi mettre sous la forme:

$$\mu = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{8\pi} \iiint E_u^2 du dv dw + \frac{1}{8\pi \sqrt{1 - v^2/c^2}} \cdot \iiint (E_v^2 + E_w^2) du dv dw .$$

En introduisant à la place de $\cos(\alpha\varphi)$ la valeur moyenne 0, on obtient:

$$\overline{E_u^2} = \overline{E_v^2} = \overline{E_w^2} = \frac{1}{3} \frac{\varepsilon^2}{r^4} [1 + \alpha r]^2 e^{-\alpha r}$$

car on a:

$$\overline{(u - u_0)^2} = \overline{(v - v_0)^2} = \overline{(w - w_0)^2} = \frac{1}{3} r^2$$

d'où l'on déduit:

$$\mu = \frac{\varepsilon^2}{8\pi} \left[\sqrt{1 - v^2/c^2} + \frac{2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right] \frac{1}{3} \int \frac{[1 + \alpha r]^2}{r^2} \cdot 4\pi dr$$

parce que:

$$\int \int \int du dv dw = 4\pi \int r^2 dr .$$

Posons

$$\frac{\partial S(r)}{\partial r} = \frac{(1 + \alpha r)^2}{r^2} e^{-\alpha r} .$$

Alors il vient:

$$\mu = \frac{\varepsilon^2}{6} \left[\sqrt{1 - v^2/c^2} + \frac{2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right] [S(\infty) - S(\sigma)] .$$

Or, dans le voisinage de $r = 0$, on a approximativement:

$$\frac{\partial S(r)}{\partial r} = \frac{1}{r^2} ; \quad S(r) = -\frac{1}{r} ,$$

donc

$$S(\sigma) = -\frac{1}{\sigma} \quad (\sigma = \text{rayon de l'électron}) .$$

Pour r très grand, on a

$$\frac{\partial S}{\partial r} = \alpha e^{-\alpha r} \quad S(r) = -e^{-\alpha r}$$

d'où

$$S(\infty) = 0 .$$

Il s'en suit que:

$$\mu = \frac{\varepsilon^2}{6\sigma} \left[\sqrt{1 - v^2/c^2} + \frac{2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right] .$$

Pour l'énergie magnétique M, on obtient pareillement:

$$M = \frac{\varepsilon^2}{3\sigma} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right] - \frac{\varepsilon^2}{3\sigma} [\sqrt{1 - v^2/c^2} - 1] .$$

Pour l'énergie totale, on trouve par conséquent:

$$\mu + M = \frac{2}{3} \frac{\varepsilon^2}{\sigma} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right] - \frac{1}{6} \frac{\varepsilon^2}{\sigma} [\sqrt{1 - v^2/c^2} - 1] + \frac{2}{3} \frac{\varepsilon^2}{\sigma} .$$

Cette expression présente exactement la même valeur que si l'électron n'était pas accéléré.