Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 7 (1925)

Artikel: Quelques remarques sur la théorie des quanta
Autor: Juvet, G.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-740663

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 17.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

QUELQUES REMARQUES
SUR
LA THÉORIE DES QUANTA

PAR

G. JUVET

On sait que la théorie des quanta appliquée à l'atome de Bohr trouve son expression la plus élégante avec l'emploi des notions dues à Hamilton, à Jacobi et à Lie. Le principe de moindre action, l'intégration de certaine équation aux dérivées partielles, les transformations canoniques, permettent de trouver aisément — les principes de la théorie des quanta étant admis — les raies spectrales émises par un atome dont l'état dynamique n'est pas trop compliqué. Pour les cas de plus en plus compliqués, c'est à la théorie des perturbations que l'on a recours et, là encore, les idées fondamentales de la mécanique analytique sont d'une remarquable fécondité.

Nous voudrions faire ici quelques remarques sur les conditions quantiques que Schwarzschild, MM. Sommerfeld et Epstein ont proposées pour trouver les trajectoires stationnaires dans les problèmes que pose la dynamique de l'atome de Bohr, ainsi que sur l'unicité des trajectoires ainsi déterminées.

On sait que l'on a pu écrire jusqu'à maintenant les conditions quantiques pour les seuls problèmes conduisant à des mouvements quasi-périodiques. C'est de ceux-là que nous parlerons.

Soit un problème à n degrés de liberté; désignons par $q_1, q_2, \ldots q_n$ les coordonnées lagrangiennes et par $p_1, p_2, \ldots p_n$ les moments correspondants. On peut choisir les q de différentes manières.

Il y a cependant, comme nous le verrons, certains choix préférables. On sait que tous les problèmes de dynamique relatifs à des systèmes holonomes admettant une fonction de forces U et dont les liaisons sont indépendantes du temps conduisent à une équation aux dérivées partielles, dite de Jacobi:

$$H\left(q_1, \dots q_n, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \dots \frac{\partial V}{\partial q_n}\right) - \alpha_1 = 0 , \qquad (1)$$

la fonction $H(q_1, \dots q_n, p_1, \dots p_n)$, dans laquelle on a remplacé p_i par la dérivée partielle $\frac{\partial V}{\partial q_i}$, étant la fonction principale, ou hamiltonienne, du système différentiel canonique:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1, \dots n) , \qquad (2)$$

auquel satisfont les fonctions inconnues q_i et p_i. On sait que $H = T - U$ dans les cas que nous considérons, et que α_1 est la constante des forces vives [2T est la force vive].

Si l'on connaît une intégrale complète $V(q_1, \dots q_n, \alpha_1, \dots \alpha_n)$ de l'équation (1) dépendant de n constantes arbitraires $\alpha_1, \dots \alpha_n$, dont aucune ne soit additive, l'intégrale générale du système (2) est donnée par les formules suivantes:

$$\left\{ \begin{aligned} t - t_0 &= \frac{\partial V}{\partial \alpha_1}, \\ \beta_j &= \frac{\partial V}{\partial \alpha_j} \qquad (j = 2, \dots n) , \end{aligned} \right. \qquad (3)$$

$$p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i} \qquad (i = 1 \dots n) . \qquad (4)$$

La recherche d'une intégrale complète de l'équation (1) est facilitée dans certains cas fort importants en pratique, lorsque l'on a choisi certaines coordonnées $q_1, \dots q_n$ au moyen desquelles il est possible de trouver une solution de (1) de la forme:

$$V = f_1(q_1) + f_2(q_2) + \dots + f_n(q_n) , \qquad (5)$$

f_i ne dépendant que de q_i et des constantes. On dit alors que l'équation (1) se résout par la séparation des variables. Pour $n = 2$ et 3, MM. Levi-Civita[1] et Dell' Acqua[2] ont indiqué tous

[1] *Math. Ann.* Bd. 59, p. 363-397, 1904.
[2] *Math. Ann.* Bd. 66, p. 398-415, 1909.

les cas où une telle décomposition de l'intégrale V est possible. Pour n quelconque, il existe un cas très important où cela se produit, c'est le cas de Stäckel[1]. Nous supposons que nous sommes dans ce cas et que l'intégrale complète de (1) peut se mettre sous la forme (5).

Remarquons alors que p_i est une fonction de q_i seulement.

Si les circonstances initiales n'ont pas été choisies trop malheureusement[2], le mouvement du système peut se représenter dans l'espace à n dimensions $E_n(q_1, \dots q_n)$ par une « trajectoire » comprise à l'intérieur d'un parallélipipède rectangle à n dimensions et tangente aux « faces » de ce parallélipipède. Cette trajectoire peut être fermée, le mouvement est alors périodique; elle peut ne se fermer jamais et alors elle pourra passer aussi près que l'on veut de tous les points d'un domaine à 2 dimensions, ou à 3 dimensions, ... ou à $n-1$ dimensions compris dans le parallélipipède considéré, ou passer aussi près que l'on veut de tous les points de ce parallélipipède. Dans ces cas, le mouvement est *quasi-périodique*, mais il n'est dit *quasi-périodique non dégénéré* que dans le dernier cas. Dans l'avant-dernier, il est *quasi-périodique dégénéré d'ordre* 1 : c'est donc lorsque le domaine, où l'ensemble des points de la trajectoire est dense partout, est à $n-1$ dimensions; s'il est à $n-2$ dimensions, il est dégénéré d'ordre 2, etc. Un mouvement purement périodique est donc un mouvement quasi-périodique dégénéré d'ordre $n-1$.

Nous supposons que nous avons affaire à des mouvements quasi-périodiques non dégénérés. La fonction V est, par rapport à chaque q_i, une intégrale indéfinie d'une fonction admettant deux déterminations; en effet V est de la forme

$$V = \sum_{i=1}^{i=n} \int^{q_i} \frac{g_i(q_i)\, dq_i}{\sqrt{\Phi_i(q_i)}},$$

les g_i et les Φ_i étant univoques. Lorsque t varie, les variables

[1] Cf. CHARLIER, *Mechanik des Himmels*, Bd. I, *passim*.

[2] Cela veut dire que les racines les plus proches, en dessus et en dessous des valeurs initiales, q_i^0, de certaines fonctions $\Phi_1(q_1)$, ... $\Phi_n(q_n)$ sont toutes d'ordre un de multiplicité.

q_i oscillent entre 2 valeurs: a_i et b_i. t variant de $\frac{1}{\nu_i}$, q_i part de a_i, arrive à b_i et revient à a_i. Les n nombres ν_i ne sont liés par aucune relation linéaire et homogène à coefficients entiers. Cela signifie que, t variant de $\frac{1}{\nu_i}$ ou d'un multiple entier de fois $\frac{1}{\nu_i}$, les autres variables $q_1, q_2, \ldots q_{i-1}, q_{i+1}, \ldots q_n$ ne reviendront pas à leur point de départ.

Si l'on choisit pour $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ toutes les valeurs qu'on veut, on obtient, au moyen des équations (3), ∞^n trajectoires et l'on passe de l'une à l'autre par continuité.

La théorie des quanta nous force à n'utiliser qu'un ensemble discontinu de telles trajectoires, celles qui correspondent à des valeurs bien particulières des constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Cet ensemble discontinu est déterminé par les *conditions quantiques* suivantes, proposées par MM. Epstein et Sommerfeld:

$$\oint p_i \, dq_i = k_i h \qquad (i = 1, \ldots n) \tag{6}$$

où les nombres k_i peuvent prendre toutes les *valeurs entières*. Le signe $\oint$ signifie que l'intégrale qui porte sur une expression de la forme: fonction de q_i multipliée par dq_i, doit être prise sur l'intervalle complet de variation de q_i dans le mouvement quasi-périodique considéré, c'est-à-dire de a_i à b_i et retour à a_i (au retour, p_i prend les mêmes valeurs qu'à l'aller, changées de signes). Les conditions (6) déterminent les valeurs des $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ qui sont ainsi discrètes.

Les trajectoires que l'on obtient ainsi sont dites *trajectoires stationnaires*, ou *trajectoires stables*.

Le problème que nous nous posons est alors le suivant.

Si par un choix différent des coordonnées lagrangiennes du système [$Q_1, \ldots Q_n$ par exemple, et $P_1, \ldots P_n$, les moments correspondants], l'équation de Jacobi s'intègre par séparation des variables, les trajectoires qu'on obtiendra en écrivant

$$\oint P_i \, dQ_i = K_i h \qquad (i = 1 \ldots n) \tag{7}$$

sont-elles les mêmes que celles que fournissent les équations

(6) ? Il nous semble que l'on n'ait jamais répondu rigoureusement à cette question. Il est vrai que M. Epstein [1] a montré qu'on peut donner une interprétation géométrique aux variables qui permettent la séparation, et il est possible d'esquisser, à partir de cette idée, une démonstration mi-analytique, mi-géométrique [2]. Il ne nous paraît pas cependant qu'une telle démonstration soit à l'abri de certaines objections et nous allons en indiquer une qui est purement analytique et qui, nous l'espérons, est rigoureuse.

Cette démonstration se fait aisément à partir des formules qui expriment les conditions quantiques telles que M. Brody [3] les a écrites; pour y arriver, il nous faut rappeler quelques notions.

Les variables Q_i et P_i, au moyen desquelles la séparation serait possible dans l'équation de Jacobi, sont des variables canoniquement conjuguées; elles sont liées aux variables primitives q_i et p_i par des relations

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_i = Q_i(q_1, \dots q_n, p_1, \dots p_n) \\ P_i = P_i(q_1, \dots q_n, p_1, \dots p_n) \end{array} \right. \tag{8}$$

telles que l'on ait:

$$\sum_{i=1}^{i=n} P_i \delta Q_i - \sum_{i=1}^{i=n} p_i \delta q_i = \delta S \ . \tag{9}$$

La transformation (8) est dite *canonique* et la relation (9) qui exprime que la forme de Pfaff $\Sigma P_i \delta Q_i$ diffère, en vertu

[1] Cf. SOMMERFELD, *La Constitution de l'Atome et les Raies spectrales* (trad. Bellenot), p. 664 et EPSTEIN, *Ann. der Phys.*, 51 (1916).

[2] Si l'on imagine la trajectoire représentée dans un espace à n dimensions, $\eta_n(x_1, x_2, \dots x_n)$, au moyen de coordonnées quelconques, on définira de la manière suivante les variables qui permettent la séparation. Il existe des hypersurfaces $(n\text{-}1)$ dimensionnelles qui sont tangentes aux diverses trajectoires que l'on obtient en variant les conditions initiales. Ces hypersurfaces, en nombre $2n$, se correspondent 2 à 2, on écrit les équations de chaque couple sous la forme:

$$q_i = \chi^i(x_1, x_2, \dots x_n) \qquad (i = 1, \dots n) ,$$

où q_i est constant sur chacune des surfaces de la $i^{\text{ème}}$ paire. On voit que cette définition, pour être précisée, exigerait d'assez longs préambules et de grandes précautions.

[3] Cf. *Zs. f. Phys.*, t. 6, p. 224, 1921.

de (8), de la forme de Pfaff $\Sigma p_i \delta q_i$ d'une différentielle totale exacte, cette relation, disons-nous, est tout à fait caractéristique des transformations canoniques. En admettant qu'il soit possible d'exprimer les $p_1 \dots p_n$ en fonction des Q et des q, c'est-à-dire, en admettant qu'il soit possible de résoudre, par rapport aux p, les n premières équations (8), on pourra exprimer S en fonction des Q et des q. D'une manière générale, toute transformation canonique peut se définir de la manière suivante. On prend une fonction $S(q_1, \dots q_n, Q_1, \dots Q_n)$ et l'on pose :

$$P_i = \frac{\partial S}{\partial Q_i}, \qquad p_i = -\frac{\partial S}{\partial q_i} \qquad (i = 1 \dots n) . \qquad (10)$$

Les équations (10), résolues [1] par rapport aux P et aux Q, définissent une transformation canonique; S en est dite la *fonction génératrice.*

Si les q et les p satisfont aux équations (2), les fonctions Q et P satisferont aussi à un système canonique dont la fonction principale $K(Q_1, \dots Q_n, P_1, \dots P_n)$ est égale à la fonction $H(q_1, \dots q_n, p_1, \dots p_n)$, où l'on a remplacé les q et les p par leurs expressions en fonction des Q et des P [2].

L'ensemble des transformations canoniques forme un *groupe* comme il est aisé de s'en rendre compte.

On sait, d'autre part, que l'expression $\int \Sigma p_i \delta q_i$, l'intégrale étant prise le long d'une courbe fermée de l'espace $e_{2n}(q_1, \dots q_n, p_1, \dots p_n)$, est un *invariant intégral*, c'est-à-dire une quantité indépendante du temps, si les q et les p satisfont aux équations (2). C'est un invariant intégral relatif car il porte sur une courbe fermée. On sait par les travaux de Poincaré que l'on peut former immédiatement un invariant intégral absolu, mais qui est exprimé alors par une intégrale double:

$$\int\int \Sigma \delta p_i \delta q_i .$$

[1] Cela est toujours possible si la fonction S n'a pas été trop mal choisie. On peut d'ailleurs échanger le rôle de certains p et des q correspondants, moyennant un changement de signes.

[2] Nous nous limitons ici aux transformations canoniques (8) dans les seconds membres desquelles t n'entre pas. V ne dépend donc pas explicitement de t.

étendue à une variété quelconque à deux dimensions de l'espace $e_{2n}(q_1, \dots q_n, p_1, \dots p_n)$. D'une manière générale, on sait que les intégrales doubles, quadruples, ... $2n$-uples suivantes sont des invariants intégraux pour les équations canoniques (2):

$$\left\{\begin{aligned} I_1 &= \int\int \sum_{i=1}^{i=n} \delta p_i \delta q_i \,, \\ I_2 &= \int\int\int\int \sum_{i,k} \delta p_i \delta q_i \delta p_k \delta q_k \,, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ I_{2n} &= \int \dots \int \delta p_1 \delta q_1 \delta p_2 \delta q_2 \dots \delta p_n \delta q_n \,, \end{aligned}\right. \tag{11}$$

les domaines d'intégration étant respectivement des domaines quelconques à $2, 4, \dots 2n$ dimensions de l'espace $e_{2n}(q_1, \dots q_n, p_1, \dots p_n)$.

Une transformation canonique (9) portant sur les formes de différentielles qui figurent dans les seconds membres de (11) en conserve l'aspect, les intégrales étant prises alors sur les domaines correspondants de l'espace $E_{2n}(Q_1, \dots Q_n, P_1, \dots P_n)$. On a donc:

$$\left\{\begin{aligned} I_1 &= \int\int \Sigma \delta p_i \delta q_i = \int\int \Sigma \delta P_i \delta Q_i \,, \\ I_2 &= \int\int\int\int \sum_{i,k} \delta p_i \delta q_i \delta p_k \delta q_k = \int\int \sum_{i,k} \delta P_i \delta Q_i \delta P_k \delta Q_k \,, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ I_n &= \underbrace{\int \dots \int}_{(2n)} \delta p_1 \delta q_1 \dots \delta p_n \delta q_n = \underbrace{\int \dots \int}_{(2n)} \delta P_1 \delta Q_1 \dots \delta P_n \delta Q_n \,. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Ces choses-là étant rappelées, voici comment M. Brody[1] écrit les conditions quantiques. Il pose:

$$\left\{\begin{aligned} I_1 &= (k_1 + \dots k_n) h \,, \\ I_2 &= (k_1 k_2 + k_1 k_3 + \dots + k_{n-1} k_n) h^2 \,, \\ I_3 &= (k_1 k_2 k_3 + \dots \qquad + k_{n-2} k_{n-1} k_n) h^3 \,, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ I_n &= (k_1 k_2 \dots k_n) h^n \,; \end{aligned}\right. \tag{13}$$

[1] *Loc. cit.*

les nombres $k_1 \dots k_n$ étant des entiers; mais il faut remarquer que cela suppose que l'on ait choisi tout d'abord les domaines sur lesquels portent les intégrales doubles, quadruples, etc., dont il est question. Il ne nous paraît pas que ce choix, M. Brody l'ait indiqué avec précision.

Le voici indiqué pour les systèmes quasi-périodiques. Supposons que les q soient les variables qui permettent d'obtenir la solution de l'équation de Jacobi par séparation des variables. On sait alors que

$$p_i = \Phi_i(q_i) \cdot$$

Dans le plan (q_i, p_i), cette équation représente une courbe fermée c_i, symétrique par rapport à l'axe q_i et admettant, aux deux points où elle coupe cet axe, une tangente parallèle à l'axe des p_i. Il y a donc n courbes analogues à considérer dans les plans $(q_1 p_1)$, $(q_2 p_2)$, ... $(q_n p_n)$. Ces courbes enferment des aires que nous appellerons $d_1, d_2, \dots d_n$. Si les variables Q_i permettent aussi la séparation dans l'équation de Jacobi, il conviendra de définir des domaines $D_1, \dots D_n$ dans les plans $(Q_1 P_1) \dots (Q_n P_n)$.

Les intégrales $I_1 \dots I_n$ portent alors sur des domaines à 2, 4, ... $2n$ dimensions de l'espace $e_{2n}(q_1, \dots q_n, p_1, \dots p_n)$ [ou respectivement de l'espace $E_{2n}(Q_1, \dots Q_n, P_1, \dots P_n)$] qui se projettent sur les plans $(q_1 p_1)$, ... $(q_n p_n)$ [ou sur les plans $(Q_1 P_1)$, ... $(Q_n P_n)$] à l'intérieur et sur la frontière des domaines $d_1, \dots d_n$ (ou $D_1, \dots D_n$). Pour être précis, voyons d'un peu plus près comment il faut définir le domaine sur lequel porte I_3 par exemple.

On exprimera les points de d_i en fonction de 6 paramètres $\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_6$:

$$\begin{cases} q_i = q_i(\zeta_1, \dots \zeta_6) \\ p_i = p_i(\zeta_1, \dots \zeta_6) \end{cases} \quad (i = 1 \dots n) , \tag{14}$$

et on fera en sorte que les ζ soient compris dans des intervalles de façon que, les ζ variant, les q_i et les p_i représentent dans le plan $(q_i p_i)$ les coordonnées d'un point qui reste à l'intérieur de la courbe c_i ou sur cette courbe elle-même. Le choix des fonctions qui figurent dans les seconds membres de (14) est encore très arbitraire. Nous verrons que ce choix se précisera plus loin. Les domaines d'intégration de l'espace E_{2n} seront les domaines correspondants.

LABORATOIRE DE PHYSIQUE UNIVERSITE NEUCHATEL

La démonstration de l'unicité des conditions quantiques sera immédiate lorsqu'on aura fait voir que les équations (13) entraînent les relations:

$$\oint p_i dq_i = k_i h \ ,$$

car alors elles entraînent aussi les relations:

$$\oint \mathrm{P}_i d\mathrm{Q}_i = l_i h \ ,$$

les l_i étant entiers.

On arrive à cela par un changement de variables canonique.

Ce changement de variables a été déjà proposé par M. Sommerfeld [1]. On pose

$$\oint p_i dq_i = \nu_i \ .$$

Ces ν_i sont des constantes, les variables canoniquement conjuguées u_i sont des fonctions linéaires du temps.

Remarquons tout d'abord que ν_i est la quantité dont varie la fonction

$$\mathrm{V} = \sum_{i=1}^{i=n} \int^{q_i} p_i dq_i \ ,$$

lorsque le point q_i décrit le segment $(a_i b_i)$ aller et retour, ou si l'on préfère, lorsque le point q_i décrit dans son plan complexe $[q_i = \varkappa_i + \sqrt{-1}\,\lambda_i]$ un chemin fermé entourant les deux points $q_i = a_i$ et $q_i = b_i$. Les ν_i s'appellent les modules de périodicité de la fonction multiforme V, laquelle se trouve être d'ailleurs l'action maupertuisienne du système.

On sait d'autre part que V, qui est l'intégrale complète de l'équation de Jacobi, dépend de n constantes et que par suite, les V_i sont des fonctions de ces seules constantes; on peut donc trouver ces constantes en fonction des ν_i et exprimer V en fonction des ν_i; on obtient ainsi une fonction:

$$\mathcal{V}(q_1, \dots q_n, \nu_1, \dots \nu_n) \ ,$$

qui nous permettra de former une transformation canonique, celle qui précisément fera passer des (q, p) aux (u, ν). Si nous

[1] *Loc. cit.*, app. 7.

prenons, en effet, les ν comme des moments et les u comme des coordonnées de position, en posant:

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_i}, \qquad u_i = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \nu_i},$$

ces formules définissent une transformation canonique puisque:

$$\Sigma p_i \delta q_i - \Sigma \nu_i \delta u_i = \delta (V - \Sigma u_i \nu_i) .$$

La fonction H transformée est la fonction principale pour les (u, ν). Puisque les ν sont des constantes, H ne dépendra pas des u, et l'on aura:

$$\overline{H} = \varphi(\nu_1, \ldots \nu_n) ,$$

et par suite:

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{\partial \overline{H}}{\partial \nu_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_i} = \nu_i ,$$

d'où $u_i = \nu_i t + \varepsilon_i$.

Or on sait que si q_j décrit son domaine entier de variation, les autres q restant constants, $\mathcal{V}$ augmente de ν_j, c'est-à-dire de son module de périodicité. M. Sommerfeld [1] a montré que, dans ces conditions, u_j varie de l'unité. En effet, si $\mathcal{V}_d$ et $\mathcal{V}_f$ désignent respectivement les valeurs de $\mathcal{V}$ au début et à la fin du voyage de q_j, on a:

$$\mathcal{V}_f - \mathcal{V}_d = \nu_j .$$

Le premier membre est une fonction des ν; dérivons-la, il vient:

$$\frac{\partial \mathcal{V}_p}{\partial \nu_i} - \frac{\partial \mathcal{V}_d}{\partial \nu_i} = \begin{matrix} 0 & (\text{si } i \neq j) \\ 1 & (\text{si } i = j) \end{matrix} ,$$

Mais en employant une notation analogue pour les u, on aura:

$$u_{i/f} - u_{i/d} = \begin{matrix} 0 & (\text{si } i \neq j) \\ 1 & (\text{si } i = j) \end{matrix} .$$

Ces circonstances prouvent que q_j est une fonction de u_j, périodique et de période 1.

Revenons dès lors à l'étude des intégrales $I_1, \ldots I_n$. A l'espace

[1] Cf. *loc. cit.*, app. 7, *i*.

$e_{2n}(q_1, \dots q_n, p_1, \dots p_n)$ correspond l'espace $\varepsilon_{2n}(u_1, \dots u_n, v_1, \dots v_n)$; aux domaines $d_2, d_4, \dots d_{2n}$ correspondent des domaines $\delta_2, \delta_4, \dots \delta_{2n}$ qui se projettent sur les plans (u_i, v_i) suivant des rectangles. En effet, la courbe c_i est décrite lorsque v_i reste constant et que u_i varie de l'unité, elle a donc pour correspondante une ligne qui se projette suivant la droite $A_i B_i$ parallèle à l'axe des u_i et de longueur égale à l'unité. Les points intérieurs à c_i ont pour correspondants des points qui se projettent intérieurement au rectangle $A_i B_i C_i D_i$, D_i étant l'origine et C_i le point sur l'axe u_i d'abscisse 1, car lorsqu'on modifie les constantes dont dépend p_i de façon que p_i tende vers zéro d'une manière quelconque, v_i tendra aussi vers zéro; la courbe C_i se réduira à un segment de l'axe des q_i compté doublement, et sa correspondante aura pour projection le segment $D_i C_i$. Ainsi l'intérieur de c_i aura pour correspondant un domaine qui se projette suivant le rectangle $A_i B_i C_i D_i$.

Les domaines $\delta_2, \dots \delta_{2n}$ se projetteront donc à l'intérieur de ces rectangles et sur leurs bords; ils ne sont pas pour autant définis. Nous les définirons et, par là même, nous définirons rigoureusement les domaines $d_2, \dots d_{2n}$ sur lesquels plane encore beaucoup d'arbitraire, de la manière suivante. δ_2 est la portion de 2-plan qui se projette suivant les rectangles $A_i B_i C_i D_i$; δ_4 est la portion de 4-plan qui se projette suivant les dits rectangles, etc. δ_{2n} est un parallélipipède rectangle n-dimensionnel qui se projette aussi suivant ces rectangles. Or les intégrales $I_1, \dots I_n$ étendues à ces domaines $\delta_2, \dots \delta_{2n}$ porteront sur des éléments différentiels de même forme qu'auparavant, puisque les (q, p) sont transformés canoniquement en les (u, v); on aura par suite:

$$I_1 = \int\int \Sigma\, dv_i\, du_i = (k_1 + k_2 + \dots + k_n)\, h\ ,$$

$$I_2 = \int\int\int\int \sum_{ij} dv_i\, du_i\, dv_j\, du_j = (k_1 k_2 + \dots + k_{n-1} k_n)\, h^3\ ,$$

. . . . . .

$$I_n = \underbrace{\int \dots \int}_{(2n)} dv_1\, du_1 \dots dv_n\, du_n = (k_1 k_2 \dots k_n)\, h^n\ .$$

Or par le choix des domaines d'intégration, les intégrales précédentes se décomposeront. Si l'on écrit:

$$\int\int dv_i\, du_i = x_i \ ,$$

l'intégrale double étant prise sur le rectangle $A_i B_i C_i D_i$, on aura:

$$\sum_i x_i = \left(\sum_i k_i\right) h \ ,$$

$$\sum_{ij} x_i x_j = \left(\sum_{ij} k_i k_j\right) h^2 \ ,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$x_1 \ldots x_n = (k_1 \ldots k_n)\, h^n \ ,$$

et l'on en tire, en résolvant par rapport aux x_i:

$$x_i = k_i h \ .$$

Or

$$\int\int dv_i\, du_i = v_i \int_0^1 du_i = v_i \ ,$$

et par conséquent

$$\underline{v_i = k_i h} \ .$$

On voit donc que les conditions quantiques écrites sous la forme (13) sont équivalentes aux conditions écrites sous la forme:

$$\oint p_i\, dq_i = k_i h \ ,$$

pour autant que les domaines $d_2, \ldots d_{2n}$, ont été choisis comme il vient d'être dit[1].

Supposons alors qu'on ait trouvé d'autres variables $Q_1 \ldots Q_n$ qui permettent la séparation des variables dans l'équation de Jacobi. Les conditions quantiques s'écriront dès lors:

$$\int\int \Sigma\, dP_i\, dQ_i = (k_1 + \ldots + k_n)\, h \ ,$$

$$\int\int\int\int \sum_{ij} dP_i\, dQ_i\, dP_j\, dQ_j = (k_1 k_2 + \ldots k_{n-1} k_n)\, h^2 \ ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\underbrace{\int \ldots \int}_{2n} dP_1\, dQ_1 \ldots dP_n\, dQ_n = (k_1 k_2 \ldots k_n)\, h^n \ ,$$

[1] Les calculs sont ceux de M. Brody, mais nous avons précisé, plus qu'il ne l'a fait, la détermination des domaines d'intégration.

les domaines d'intégration D_2, D_4 ... D_{2n} étant les correspondants, par la transformation $(q, p) \rightarrow (Q, P)$, des domaines d_2, d_4 ... d_{2n}. Ils se projettent à l'intérieur des courbes fermées C_i d'équations $P_i = P_i(Q_i)$.

On pourra de nouveau faire un changement de variables $(Q_i, P_i) \rightarrow (U_i, V_i)$, les V_i étant les modules de périodicité de la fonction

$$W = \sum_{i=1}^{i=n} \int^{Q_i} P_i \, dQ_i \, ,$$

W étant encore l'action maupertuisienne, mais exprimée cette fois en fonction des $Q_1, \ldots Q_n$. Mais dans l'espace $\mathcal{E}_{2n}$ $(U_1, \ldots U_n, V_1, \ldots V_n)$, il n'est pas évident que les domaines $\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_4, \ldots \mathcal{D}_{2n}$, correspondant aux domaines D_2, D_4, ... D_{2n}, se projettent à l'intérieur de certains rectangles. Il en est bien ainsi toutefois, car les nouveaux modules de périodicité, V_1 ... V_n, sont liés aux anciens par des relations linéaires à coefficients entiers de déterminant égal à l'unité. Il en est de même pour les équations qui lient les U aux u. Cela prouve que les domaines $\delta_2, \ldots \delta_{2n}$ ont pour correspondants des domaines $\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_4, \ldots \mathcal{D}_{2n}$ qui sont des parties de variétés linéaires se projetant suivant des rectangles sur les plans (U_i, V_i). On en déduit que l'on a bien encore:

$$\underline{\oint P_i \, dQ_i = l_i h \, ,}$$

les l_i étant les nombres k_i pris dans un ordre qui peut être différent.

Le théorème que nous avions en vue est donc démontré. Enonçons-le:

Si l'équation de Jacobi relative à un système peut se résoudre par séparation des variables pour plusieurs choix des coordonnées lagrangiennes, et si le mouvement obtenu est quasi-périodique non dégénéré, les conditions quantiques s'écrivent toujours, quelles que soient les variables, sous la forme:

$$\oint p_i \, dq_i = k_i h \, , \qquad (i = 1 \ldots n) \, .$$

BIBLIOTHÈQUE DE L'UNIVERSITÉ NEUCHATEL

La manière dont M. Brody a écrit les conditions quantiques (cf. éq. (13)) nous a servi à faire la démonstration de ce théorème. Il convient de faire des remarques sur le choix des domaines sur lesquels sont prises les intégrales $I_1, \ldots I_n$. Ces domaines ont été choisis de manière que leurs correspondants dans l'espace $\varepsilon_{2n}(u_1, \ldots u_n, v_1 \ldots v_n)$ entraînassent la décomposition des intégrales et permissent de les mettre sous la forme des fonctions symétriques élémentaires de certaines intégrales doubles (les x_i). Un problème qui nous paraît avoir un grand intérêt est le suivant: quels sont les caractères des domaines $d_2, d_4, \ldots d_{2n}$ ou des domaines $D_2, D_4, \ldots D_{2n}$? Peut-on les définir simplement et immédiatement sans avoir besoin de passer par les domaines linéaires $\delta_2, \ldots \delta_{2n}$ ou $\mathcal{D}_2, \ldots \mathcal{D}_{2n}$? Il serait intéressant de trouver ces caractères, car cela permettrait, croyons-nous, de généraliser les conditions quantiques pour des mouvements plus compliqués que les mouvements quasi-périodiques, et l'idée ingénieuse de M. Brody aurait une portée plus considérable.

Remarquons enfin pour terminer que si les q_i permettent la séparation des variables, le changement de variables:

$$q_i = q_i(Q_i) \qquad (i = 1 \ldots n) \ ,$$

permettra une nouvelle séparation. Ce cas est banal et se traite aisément lorsqu'on prolonge la transformation ponctuelle précédente. Notre démonstration permet de montrer que, s'il existe d'autres variables séparables que celles qu'on peut définir d'une manière aussi banale, les conditions quantiques s'expriment de la même manière avec ces nouvelles variables. Il y aurait intérêt à prouver rigoureusement et d'une manière directe le théorème que nous venons de démontrer d'une manière assez longue.