

Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles
Band: 7 (1925)

Artikel: Sur la force qui tendrait à rapprocher un continent de l'équateur
Autor: Wavre, R.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-740676>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 07.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SUR LA FORCE

qui tendrait à rapprocher un continent de l'équateur

- PAR

R. WAVRE

(Avec 4 fig.)

MM. W. Koppen, P.-S. Epstein, W.-D. Lambert et E.-H.-L. Schweydar ont entrepris d'intéressantes études sur la force qui sollicite un continent à fuir le pôle. M. Wegener résume les principaux résultats obtenus par ces auteurs dans le dernier paragraphe de son livre « La genèse des continents et des océans »¹ et donne aussi les indications bibliographiques.

Hypothèse.

Le plus simple, dans ces études d'un problème local de géotectonique, est d'admettre que l'ellipsoïde des géodésiens est une figure d'équilibre et que la présence sur celui-ci d'un continent ne modifie sensiblement ni sa forme ni son mouvement autour de son axe de révolution. C'est là sans doute une hypothèse légitime, car le socle continental n'a qu'un volume très petit par rapport à celui de l'ellipsoïde.

Notre présente étude portera sur un élément de socle, de volume infiniment petit, de sorte qu'il nous suffit de *requérir* que l'on puisse, à partir d'un certain ordre de petitesse de l'élément, ne pas tenir compte de pareils troubles ou bien les envisager eux aussi comme infiniment petits. C'est fort peu demander, et cette hypothèse est peut-être une conséquence d'un théorème d'Euler sur la stabilité du mouvement. Nous éprouvions tout de même le besoin de l'explicitier. Elle revient à

¹ Trad. REICHEL, Blanchard, Paris, 1924.

demander que le mouvement à l'état limite soit la limite des mouvements dans les états voisins. Précisons le parti que nous tirerons de cette hypothèse.

Soit C une petite région de l'ellipsoïde et I et II deux répartitions des masses dans la région C.

Nous ferons abstraction des troubles dans le mouvement de l'ellipsoïde que pourrait apporter le passage de l'état I à l'état II, pourvu que la région C soit suffisamment petite.

Nous ferons abstraction également de la déformation de l'ellipsoïde, en dehors de la région C, qu'entraînerait cette modification des masses.

Soient alors g^I et g^{II} les champs de la pesanteur correspondant aux états I et II, puis f^I et f^{II} les pressions exercées sur l'unité de surface d'une paroi quelconque, intérieure au géoïde. Posons :

$$\Delta g = g^{II} - g^I, \quad \Delta f = f^{II} - f^I.$$

Notre hypothèse entraîne cette conséquence que les variations Δg et Δf tendent vers zéro lorsque la répartition II des masses tend vers la répartition I, ou encore, lorsque le volume de la région C tend lui-même vers zéro.

Le poids d'un volume V sera à l'état II :

$$P^{II} = \int \int \int_V e g^{II} dV = \int \int \int_V (g^I + \Delta g) e dV,$$

e étant la densité de masse; et ce poids doit être entendu comme la résultante générale des poids des différents éléments de V.

Il tendra vers la valeur qu'il a à l'état I lorsque les deux états tendent l'un vers l'autre. Plus que cela, si le volume V tend lui-même vers zéro, la variation des poids :

$$\Delta P = P^{II} - P^I = \int \int \int_V e \Delta g dV.$$

sera un infiniment petit d'un ordre supérieur à celui du poids P^I :

$$P^I = \int \int \int_V e g^I dV.$$

La même remarque s'appliquerait aux pressions, et aux pressions sur un élément de surface infiniment petit. L'erreur

relative commise en négligeant les variations Δ sera toujours infiniment petite.

Il ne faudra pas confondre les variations Δ prises en un même point, qui proviennent des altérations de la répartition des masses, avec les différences δ qui s'introduiront plus loin pour représenter des différences du champ de la pesanteur, en deux points, pour une seule et même répartition des masses.

* * *

La méthode.

1. Nous ne présupposerons pas que les actions des poids des différents éléments d'un socle se réduisent à une résultante appliquée au centre de gravité; et en effet, il convient de ne pas parler de centre de gravité puisque les forces de pesanteur ne sont pas parallèles et que c'est ce défaut même de parallélisme qui engendre la force que l'on cherche à mettre en évidence.

2. Par un artifice fort simple, nous éviterons le calcul des pressions sur la surface immergée du socle continental.

3. Nous discuterons séparément l'influence de la partie émergente et de la partie immergée sur l'intensité de la force translatrice et distinguerons trois répartitions du champ de la pesanteur à l'intérieur du géoïde.

4. Enfin nous critiquerons l'ordre de grandeur de cette force en cherchant les limites des erreurs commises dans les calculs approximatifs.

Soit E la partie émergente du continent, et J la partie immergée, c'est-à-dire comprise dans l'ellipsoïde. Par socle ou continent nous entendons l'ensemble de E et de J.

L'état I sera celui où le continent n'existerait pas, la partie J étant remplie par la substance dans laquelle il baigne, substance appelée *sima*.

L'état II sera l'état réel correspondant à la présence d'un continent.

Notre figure 1 représente ces deux états, mais ce n'est que pour la clarté que nous y avons dissocié les deux parties J.

Soit, en un point x , $e(x)$ la densité de masse du continent ou du socle, et $i(x)$ la densité de masse du sima.

Sous l'influence de l'attraction et de la force centrifuge synthétisées dans la pesanteur, il y a donc équilibre relatif dans l'état I entre la partie J à densité $i(x)$ et le reste du géoïde. Cette partie J que l'on peut, si cela semble bon, supposer solidifiée, est soumise aux forces suivantes:

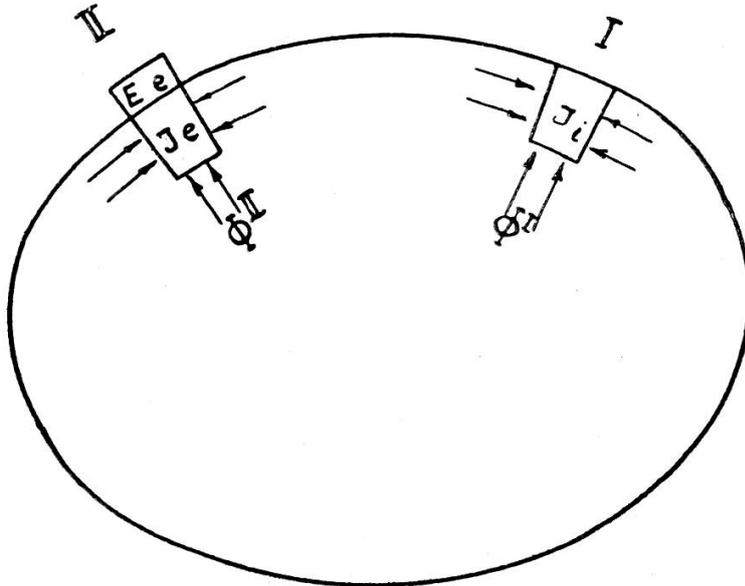


Fig. 1.

- a) le système P_J^I des poids des éléments de J à densité $i(x)$;
 b) le système Φ^I des pressions sur la surface immergée.
 Puisqu'il y a équilibre relatif, on doit avoir:

$$P_J^I + \Phi^I = 0 \quad (1)$$

Dans l'état II, le socle est soumis aux forces suivantes:

- a) le système P_E^{II} des poids de E à densité $e(x)$;
 b) le système P_J^{II} des poids de J à densité $e(x)$;
 c) le système Φ^{II} des pressions sur la surface immergée.

Le système Φ^{II} diffère probablement fort peu de Φ^I , de sorte que, dans cet aperçu de méthode, posons:

$$\Phi^I = \Phi^{II} \quad (2)$$

artifice que nous discuterons tantôt.

Soit alors S le système résultant des forces appliquées au socle:

$$S = P_E^{II} + P_J^{II} + \Phi^{II} .$$

Par (2) et (1), l'élimination de la pression Φ^{II} peut s'effectuer et donne :

$$S = P_E^{\text{II}} + P_J^{\text{II}} - P_J^{\text{I}} \quad (3)$$

Le système des forces appliquées au socle est ainsi ramené à trois systèmes de poids. Soit $g(x)$ l'intensité de la pesanteur en x , $\vec{g}(x)$ la direction de la verticale (c'est un vecteur de longueur unité) et $[x\vec{g}]$ le moment du vecteur \vec{g} , pris en x , par rapport à l'origine d'un système d'axes, dont il est inutile de préciser la position pour le moment.

Appelons s la résultante et $\vec{\Sigma}$ le moment résultant du système S. Soit dE l'élément du volume V_E de E et dJ l'élément du volume V_J de J.

En langage vectoriel, nous aurons :

$$\begin{aligned} \vec{s} = & \int \int \int_E e(x) g(x) \vec{g}(x) dE \\ & + \int \int \int_J e(x) g(x) \vec{g}(x) dJ - \int \int \int_J i(x) g(x) \vec{g}(x) dJ, \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{\Sigma} = & \int \int \int_E e(x) g(x) [x\vec{g}] dE \\ & + \int \int \int_J e(x) g(x) [x\vec{g}] dJ - \int \int \int_J i(x) g(x) [x\vec{g}] dJ. \quad (5) \end{aligned}$$

Mais en vertu de (3), nous devons prendre le champ de la pesanteur à l'état II dans les deux premiers termes des seconds membres, et à l'état I dans les derniers.

* * *

Remarque sur le cas d'un socle de volume infiniment petit.

La région C, où se produit une altération des masses, sera donc ici la région E + J. Dans le cas où celle-ci est de volume infiniment petit, la variation $\Delta\Phi = \Phi^{\text{II}} - \Phi^{\text{I}}$ du système des pressions est infiniment petite, aussi bien vis-à-vis de Φ^{I} que de $-P_J^{\text{I}}$, et les variations de nos intégrales seront également infiniment petites vis-à-vis de ces intégrales elles-mêmes.

De la sorte, nos expressions (4) et (5), dans lesquelles le champ serait pris à l'état I, donnent pour un socle infiniment petit l'ordre de grandeur de la force translatrice (c'est ici un infiniment petit, parce que non rapporté au poids du continent), avec une erreur relative infiniment petite et une erreur absolue du second ordre. L'artifice de tout à l'heure qui consiste à poser:

$$\Phi^{\text{II}} = \Phi^{\text{I}} ,$$

au lieu de:

$$\Phi^{\text{II}} = \Phi^{\text{I}} + \Delta\Phi ,$$

est bien légitime car l'erreur commise sur la pression est un infiniment petit d'un ordre supérieur à celui de la pression elle-même.

Nos formules (4) et (5) sont donc vraies à la limite, en vertu de notre hypothèse du début, lorsque le volume C tend vers zéro, et le champ de la pesanteur peut être pris à l'état I.

* * *

L'ellipsoïde de référence et la déviation de la verticale.

Rappelons la signification des différents signes qui s'introduisent avec cet ellipsoïde de révolution aplati dont le géoïde

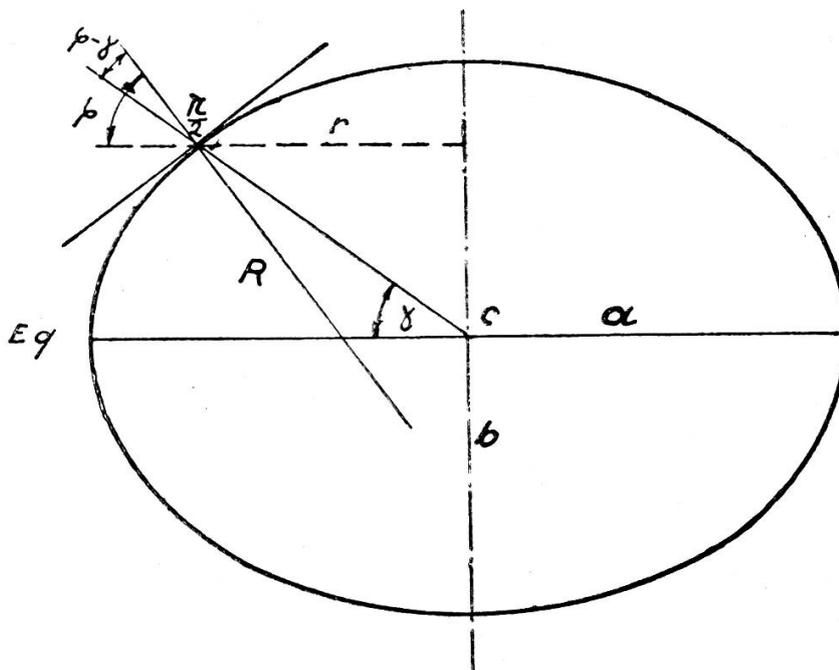


Fig. 2.

s'écarte fort peu et que certains géodésiens appellent l'ellipsoïde absolu. Soit (fig. 2) a le grand axe ou axe équatorial, b le petit axe ou axe polaire, α l'aplatissement, ε l'excentricité, φ la latitude géographique, angle de la normale à l'ellipsoïde avec le plan équatorial, γ la latitude géocentrique, R le rayon de courbure du méridien, r le rayon du parallèle.

Rappelons les relations fondamentales :

$$\alpha = \frac{a - b}{a}, \quad \varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2},$$

$$r = a \cos \varphi (1 - \eta)^{-\frac{1}{2}}, \quad R = a (1 - \varepsilon^2) (1 - \eta)^{-\frac{3}{2}},$$

$$\varphi - \gamma = m \sin 2\varphi - \frac{m^2}{2} \sin 4\varphi + \frac{m^3}{3} \sin 6\varphi - \dots,$$

avec $\eta = \varepsilon^2 \sin^2 \varphi$ et $m = \frac{\varepsilon^2}{2 - \varepsilon^2}$.

L'élément d'aire limité aux parallèles de latitude φ et $\varphi + d\varphi$ et aux méridiens λ et $\lambda + d\lambda$ sera sur l'ellipsoïde :

$$d\sigma = R d\varphi \times r d\lambda,$$

et sur une surface parallèle à distance h :

$$d\sigma' = (R + h) d\varphi \times (r + h \cos \varphi) d\lambda.$$

L'élément de volume en coordonnées orthogonales φ , λ et h peut se mettre sous la forme :

$$dV = Rr \left(1 + \frac{h}{R}\right) \left(1 + \frac{h}{r} \cos \varphi\right) d\varphi d\lambda dh.$$

La formule de Newton donnant l'intensité de la pesanteur g à la surface de l'ellipsoïde et à la latitude φ est :

$$g = g_0 (1 + \beta \sin^2 \varphi),$$

g_0 est l'intensité de la pesanteur pour $\varphi = 0$, soit à l'équateur, et β est la constante 529×10^{-5} .

Pour l'angle $\delta\varphi$ de la déviation de la verticale à une hauteur h au-dessus de l'ellipsoïde, nous admettrons la formule suivante :

$$\delta\varphi = \beta \frac{h}{a} \sin 2\varphi. \quad (6)$$

Elle aurait besoin, ainsi que la précédente, d'être tant soit peu corrigée. Toutefois nous ne discuterons pas les approximations qui proviennent de son emploi pour la partie E, nous discuterons au contraire l'emploi que l'on pourrait en faire dans la partie J dont l'action est prépondérante, comme nous le verrons.

* * *

Force translatrice pour un élément vertical, rapport de cette force au poids de l'élément.

L'élément sera composé des normales à l'ellipsoïde, qui traversent une portion de surface $d\sigma$ de l'ellipsoïde, limitées à la hauteur h_E et à la profondeur h_J . Il s'agit donc d'un élément de fuseau dont la section par l'ellipsoïde est infiniment petite tandis que sa hauteur totale reste finie.

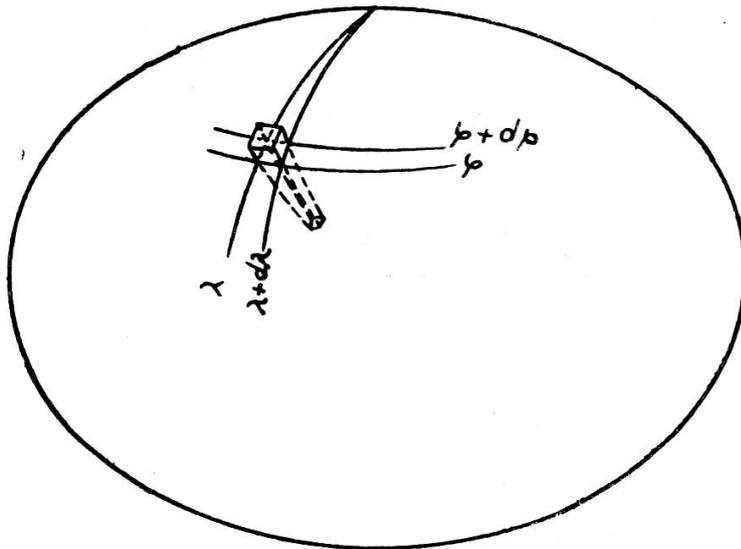


Fig. 3.

Le volume total V_c de l'élément étant infiniment petit, notre méthode s'y appliquera en toute rigueur, si l'on prend les intégrales de (4) et de (5) dans l'état I.

Nous supposons la densité e de cet élément constante et la densité du sima constante jusqu'à la profondeur h_J , et cela uniquement pour simplifier nos calculs. (Voir à ce propos la remarque de la fin de cet article.)

et s deviendra, en projection sur OX :

$$s^x = e g d \sigma \int_0^{h_E} \left(1 + \frac{\delta g}{g}\right) \delta \vec{g}^x dh + (e-i) g d \sigma \int_{-h_J}^0 \left(1 + \frac{\delta g}{g}\right) \delta \vec{g}^x dh . \quad (8)$$

Or $\delta \vec{g}^x$ est positif dans E, il ne peut être que négatif dans J, que l'ellipsoïde soit homogène ou qu'il y ait une forte concentration de masse en son centre, e est positif, $e-i$ est négatif, de sorte que les deux termes de s^x sont tous deux positifs.

Cette remarque purement qualitative permet d'affirmer l'existence d'une force translatrice dirigée vers l'équateur.

Elle nous montre que les effets dus à la partie E et à la partie J s'ajoutent, et cela que la condition d'isostasie soit satisfaite ou ne le soit pas.

Projetons s sur l'axe OY :

$$s^y = e g d \sigma \int_0^{h_E} \left(1 + \frac{\delta g}{g}\right) (1 + \delta \vec{g}^y) dh \\ + (e-i) g d \sigma \int_{-h_J}^0 \left(1 + \frac{\delta g}{g}\right) (1 + \delta \vec{g}^y) dh . \quad (9)$$

L'équation $s^y = 0$ exprime que le corps flotte sur le sima; ce sera donc la condition d'isostasie. Mais avant d'en venir là, remarquons ceci: les expressions (8) et (9) nous prouvent que les termes provenant des différences d'intensité de la pesanteur δg ne donnent lieu qu'à des termes du second degré en δg et $\delta \vec{g}$, petits vis-à-vis de ceux du premier dans (8), et des termes du premier et du second degré petits vis-à-vis de l'unité dans (9). *La déviation de la verticale produit donc un effet devant lequel on peut négliger, en première approximation, l'effet dû aux différences de l'intensité de la pesanteur.*

Nous discuterons plus tard cette approximation et ne maintiendrons ici que les parties prépondérantes. Alors (8) et (9) deviennent:

$$s^x = e g d \sigma \int_0^{h_E} \delta \vec{g}^x dh + (e-i) e g d \sigma \int_{-h_J}^0 \delta \vec{g}^x dh , \quad (10)$$

$$s^y = e g d \sigma h_E + (e-i) g d \sigma h_J . \quad (11)$$

La condition d'isostasie impose au corps de plonger de la quantité qu'il faut pour satisfaire à ce qui équivaut ici à la loi hydrostatique d'Archimède, condition essentielle dans la théorie de M. Wegener. Cette condition fournit l'équation:

$$s^Y = 0 ,$$

ou

$$eh_E = (i - e) h_J . \quad (12)$$

Multiplions les deux membres par $d\sigma$ pour passer aux volumes:

$$eV_E = (i - e) V_J . \quad (12')$$

Soient P_E et P_J les poids de E et de J, la pesanteur étant prise à l'origine O, conformément aux approximations que nous faisons pour le moment; soit P_c le poids total de l'élément; $P_c = P_E + P_J$.

Multiplions par g les deux membres de (12'), alors on aura:

$$P_E = \frac{i - e}{e} P_J ,$$

d'où:

$$P_J = \frac{e}{i - e} P_E , \quad P_E = \frac{i - e}{i} P_c , \quad P_J = \frac{e}{i} P_c .$$

Étudions l'ordre de grandeur de la force translatrice. C'est le champ de la pesanteur à l'intérieur de l'ellipsoïde qui nous est le moins bien connu et c'est ce champ qui est prépondérant dans le cas d'un continent, comme nous le verrons tout à l'heure.

Envisageons trois cas 1^o) 2^o) 3^o); les deux premiers concernent des distributions extrêmes du champ entre lesquelles la distribution réelle se trouve certainement, le troisième consiste à supposer que la déviation de la verticale est donnée à l'intérieur comme à l'extérieur par la formule (6).

Cette dernière distribution, que nous appellerons vraisemblable, fournit une excellente approximation pour l'iceberg, le bateau, et en général, pour les corps qui enfoncent peu dans l'eau ou dans quelque autre substance à la surface de la terre.

Sur la figure (4), à droite, nous avons tracé trois lignes de forces correspondant chacune à l'un de nos cas.

1^o) Supposons qu'il n'y ait pas de déviation de la verticale à l'intérieur de l'ellipsoïde. Alors $\delta \vec{g}^x = 0$ dans J, et il ne subsiste que l'effet dû à la partie émergente:

$$s_1^x = e g d \sigma \frac{\beta}{2} \sin 2\varphi \int_0^{h_E} h dh = h_E e g d \sigma \frac{\beta}{2} \frac{h_E}{a} \sin 2\varphi .$$

2^o) Supposons que dans J la direction de la verticale soit parallèle au rayon vecteur qui joint le point le plus bas de notre élément au centre C de l'ellipsoïde.

Alors $\delta \vec{g}^x$ est, avec une excellente approximation, égal à $\varphi - \gamma$ soit à $m \sin 2\varphi$ et nous avons:

$$\begin{aligned} s_2^x &= s_1^x + (i - e) g d \sigma m \sin 2\varphi \int_{-h_J}^0 dh \\ &= \left[h_E e g d \sigma \frac{\beta}{2} \frac{h_E}{a} + (i - e) m h_J g d \sigma \right] \sin 2\varphi . \end{aligned}$$

3^o) Supposons que la déviation dans J soit donnée par la même formule que dans E, alors:

$$\begin{aligned} s_3^x &= s_1^x + (i - e) g d \sigma \frac{\beta}{a} \sin 2\varphi \int_{-h_J}^0 h dh \\ &= \left[h_E e g d \sigma \frac{\beta}{2} \frac{h_E}{a} + (i - e) \frac{\beta}{2} \frac{h_J}{a} g d \sigma h_J \right] \sin 2\varphi . \end{aligned}$$

Nous constatons ainsi par la présence du facteur $\sin 2\varphi$ que la force translatrice est nulle à l'équateur et au pôle, qu'elle est maximum à 45° de latitude géographique.

Synthétisons les résultats correspondant à nos trois hypothèses dans le tableau suivant:

$$\begin{aligned} s^x &= h_E e g d \sigma \frac{\beta}{2} \frac{h_E}{a} \sin 2\varphi \\ &+ \begin{cases} 1^o & 0 \\ 2^o & (i - e) g d \sigma m h_J \sin 2\varphi \\ 3^o & (i - e) \frac{\beta}{2} \frac{h_J}{a} g d \sigma h_J \sin 2\varphi \end{cases} \quad (13) \end{aligned}$$

Exprimons enfin la force s^x au moyen des quantités les plus facilement accessibles aux mesures physiques, e , i , et h_E ; cela présente quelque intérêt au point de vue pratique et nous sera utile pour la critique des approximations. Remplaçons donc h_J par sa valeur tirée de la condition d'isostasie:

$$h_J = \frac{e}{i - e} h_E .$$

Alors:

$$s^x = h_E e g d \sigma \frac{\beta}{2} \frac{h_E}{a} \sin 2\varphi + \left. \begin{array}{l} 1^\circ \\ 2^\circ \\ 3^\circ \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0 \\ h_E e g d \sigma m \sin 2\varphi \\ \frac{\beta}{2} \frac{h_E}{a} \frac{e}{i - e} e g d \sigma h_E \sin 2\varphi . \end{array} \quad (14)$$

Rapportons la force translatrice aux poids des parties E et J d'une part et au poids total P_c de l'élément d'autre part. Alors:

$$s^x = \frac{\beta}{2} \frac{h_E}{a} \sin 2\varphi P_E + \left. \begin{array}{l} 1^\circ \\ 2^\circ \\ 3^\circ \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0 \\ \frac{i - e}{e} m \sin 2\varphi P_J \\ \frac{i - e}{e} \frac{\beta}{2} \frac{h_J}{a} \sin 2\varphi P_J \end{array} \quad (15)$$

et

$$s^x = \frac{i - e}{i} \frac{\beta}{2} \frac{h_E}{a} \sin 2\varphi P_c + \left. \begin{array}{l} 1^\circ \\ 2^\circ \\ 3^\circ \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0 \\ \frac{i - e}{i} m \sin 2\varphi P_c \\ \frac{i - e}{i} \frac{\beta}{2} \frac{h_J}{a} \sin 2\varphi P_c . \end{array} \quad (16)$$

Explicitons les coefficients ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 de P_c ; ce sont les quotients de la force translatrice par le poids du continent, et les quantités

$$\rho_1 g, \quad \rho_2 g, \quad \rho_3 g,$$

sont égales à l'accélération que communiquerait au corps la

force translatrice, si celui-ci baignait dans un sima qui ne lui oppose aucune résistance:

$$\begin{aligned} \varrho_1 &= \frac{i - e}{i} \frac{\beta}{2} \frac{h_E}{a} \sin 2\varphi, & s_1^X &= \varrho_1 P_c; \\ \varrho_2 &= \frac{i - e}{i} \left[\frac{\beta}{2} \frac{h_E}{a} + m \right] \sin 2\varphi, & s_2^X &= \varrho_2 P_c; \\ \varrho_3 &= \frac{i - e}{i} \frac{\beta}{2} \frac{h_E + h_J}{a} \sin 2\varphi, & s_3^X &= \varrho_3 P_c. \end{aligned}$$

La force s_3^X est celle que l'on obtiendrait en supposant que les poids de E et de J se réduisent à une résultante appliquée au centre de gravité, comme l'ont fait pour un socle de dimension finie MM. Epstein et Lambert, et en utilisant judicieusement la formule (6).

Pour nous faire une première idée de l'ordre de grandeur des coefficients ϱ_1 , ϱ_2 , et ϱ_3 dans le cas d'un continent, prenons les valeurs suivantes de e , i , et h_E :

Densité moyenne du socle continental $e = 2,9$.

» » du sima jusqu'à une profondeur de 100 km
 $i = 3$.

Hauteur moyenne de la surface continentale au-dessus du niveau du sima après adjonction à celui-ci du tiers de la profondeur moyenne des océans, $h_E = 3,2$ km, ce qui nous donne par la condition d'isostasie $h_J = 96$ km.

Enfin prenons:

$$\beta = 529 \times 10^{-5}, \quad a = 6378 \text{ km}, \quad \alpha = \frac{1}{298,3}.$$

d'où

$$\frac{1}{150} < \varepsilon^2 < \frac{1}{149} \quad \text{et} \quad \frac{1}{299} < m < \frac{1}{297}.$$

Nous devrions prendre pour a une valeur légèrement plus faible que 6378 km, par exemple 6376 km, rayon équatorial du sphéroïde de sima diminué des deux tiers de la profondeur moyenne des océans, mais l'erreur ainsi commise est insignifiante et si nous prenons la valeur ordinaire du rayon équatorial, c'est pour que toutes nos formules algébriques ne cessent de s'appliquer au cas de l'iceberg, du bateau et en général des corps flottants à la surface des mers.

Ceci étant, les valeurs de nos coefficients sont approximativement les suivantes :

$$\rho_1 = \frac{\sin 2\varphi}{22.606.000}, \quad \rho_2 = \frac{\sin 2\varphi}{8904}, \quad \rho_3 = \frac{\sin 2\varphi}{753.540}.$$

Ces chiffres nous prouvent par leurs écarts combien il serait important d'étudier la répartition réelle du champ de la pesanteur à l'intérieur du géoïde. Le premier coefficient ρ_1 est celui qui mesure la force translatrice créée par la partie émergente seule, le dernier ρ_3 mesure l'effet de ces deux parties, émergente et immergée, réunies, et ρ_3 est 30 fois plus grand que ρ_1 . L'action de J est donc 29 fois plus forte que celle de E; comme nous l'avions annoncé, elle est prépondérante.

La force translatrice serait donc, approximativement, à 45° , au plus le 8904^{ième} du poids total du continent, au moins le 22.606.000^{ième}, et une valeur vraisemblable serait le 753.540^{ième}.

C'est ainsi que la force translatrice communiquerait à un continent primitivement au repos en une seconde une vitesse de l'ordre du $1/75$ ^{ième} de millimètre, vraisemblablement, en supposant qu'il n'y ait pas de résistance du milieu. Mais nous ne voulons ni entrer ici dans l'étude des coefficients de viscosité du sima, ni nous abandonner aux recherches, évidemment un peu illusoire, du mouvement vers l'équateur, avec une faible déviation vers l'ouest, pareille à celle des vents alisés, que créerait la force translatrice. Nous préférons procéder à la critique des approximations faites dans les calculs précédents. Mais cette critique étant fastidieuse et n'étant pas essentielle pour la géologie, traitons tout d'abord le cas d'un socle de section finie.

* * *

Cas d'un socle de dimension finie.

Tant que le corps flottant est de volume infinitésimal, le passage de l'état I à l'état II n'altère le champ de gravitation que dans une mesure infiniment petite. Nous passerions de notre élément de fuseau à un tronçon de fuseau compris entre deux plans méridiens infiniment voisins λ et $\lambda + d\lambda$ et deux

parallèles à distance finie φ_1 et φ_2 , par une simple intégration en φ . Nous pourrions par exemple calculer la pression sur l'équateur pour un fuseau symétrique par rapport à lui.

L'intégrale qu'il faudrait envisager est sur l'ellipsoïde :

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} Rr \sin 2\varphi d\varphi = 2a^2(1 - \varepsilon^2) \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\cos^2 \varphi \sin \varphi}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^2} d\varphi ;$$

elle est facile à calculer. En l'effectuant sur la sphère, c'est-à-dire en faisant $\varepsilon = 0$, on en obtiendrait une valeur approchée, égale à :

$$\frac{2a^2}{3} (\cos^3 \varphi_1 - \cos^3 \varphi_2) .$$

On pourrait éventuellement procéder à cette intégration en tenant compte des dénivellements moyens d'un profil continental pris à longitude constante.

Passons maintenant à l'*élément de volume fini* et mettons en évidence un terme nouveau dont il faudrait à tout prix tenir compte, si l'on tenait à rester rigoureux, quitte à constater que ce terme est d'ailleurs pratiquement très faible et peut être négligé en première approximation. Admettons provisoirement que le système des pressions Φ^{II} soit égal au système Φ^{I} , et soient $\delta \vec{g}_{\text{I}}$ et $\delta \vec{g}_{\text{II}}$ les déviations de la verticale correspondant aux états I et II. Reprenons l'expression (4) de la force translatrice (p. 167) et projetons sur l'axe des X :

$$s^x = \int_{\text{E}} \int_{\text{J}} \int e g \delta \vec{g}_{\text{II}}^x dE + \int_{\text{J}} \int_{\text{J}} \int e g d \vec{g}_{\text{II}}^x dJ - \int_{\text{J}} \int_{\text{J}} \int i g \delta \vec{g}_{\text{I}}^x dJ .$$

Quant à la condition d'isostasie, elle reste la même à cet ordre d'approximation.

Introduisons la variation Δ de la déviation de la verticale dans le passage de l'état I à l'état II :

$$\Delta = \delta \vec{g}_{\text{II}}^x - \delta \vec{g}_{\text{I}}^x .$$

Alors on vérifie aisément que s^x prend la forme :

$$\begin{aligned} s^x = & \int_{\text{E}} \int_{\text{J}} \int g e \delta \vec{g}_{\text{I}}^x dE - \int_{\text{J}} \int_{\text{J}} \int g (i - e) \delta \vec{g}_{\text{I}}^x dJ \\ & - \int_{\text{E}} \int_{\text{E}} \int g e \Delta dE - \int_{\text{J}} \int_{\text{J}} \int g e \Delta dJ . \end{aligned}$$

Les deux premiers termes, dont les effets s'ajoutent, sont ceux que l'on obtiendrait en étendant, par simple intégration, au socle total, la force translatrice qui agit sur un élément vertical. Les deux derniers termes, qui se réduisent à un seul :

$$Z = \int_{E+J} \int \int g e \Delta dV ,$$

sont de l'ordre de Δ , et la difficulté porte ici sur la détermination de cet ordre de grandeur.

La variation Δ provient du passage de la répartition des masses dans l'état I à la répartition dans l'état II, c'est cette variation qui engendrerait la déformation du géoïde dans son ensemble, et par contrecoup la variation du système des pressions $\Phi^I - \Phi^{II}$. Pour sortir des abstractions précédentes, disons que c'est ce terme Δ qui mesurerait par exemple l'attraction du continent sur les particules d'eau de l'océan qui l'entoure. Si l'on voulait en tenir compte, il faudrait à cet ordre de grandeur envisager également l'influence qu'aurait le passage I \rightarrow II sur la direction de l'axe de rotation de la terre, pour autant qu'on peut parler d'un axe pendant que s'effectue ce passage qui déforme le géoïde dans son ensemble.

Sans prétendre à la rigueur, montrons pourquoi l'influence du terme Δ sur la force translatrice est probablement extrêmement faible.

a) Le champ des vecteur Δ est sensiblement symétrique par rapport à la latitude moyenne du continent, car l'écart Δ , en un point donné, provient de la différence dans les champs d'attraction correspondant à l'état I et à l'état II, ou encore de la substitution de E + J à densité e , à J à densité i .

b) La masse totale de matière reste constante en vertu de la condition d'isostasie; la hauteur h_E étant faible, Δ est petit vis-à-vis de $\delta \vec{g}_I^x$ sauf, peut-être, au voisinage de E.

c) Le champ de vecteur Δ étant sensiblement symétrique, la différence $\Phi^I - \Phi^{II}$ est faible; de plus, dans l'intégration Z, les termes provenant de deux particules symétriquement placées par rapport à la latitude moyenne, $eg\Delta$ et $-eg\Delta$, s'entredétruisent de sorte que Z a une valeur extrêmement faible.

d) Le terme Z, étant faible vis-à-vis de ceux en $\delta \vec{g}_I^x$ dont les effets s'ajoutent, ne contribue très probablement pas à renverser le signe de la force translatrice.

Pour toutes ces raisons, il me *semble* que l'on peut en première approximation étendre par simple intégration à un socle de dimension finie les expressions de la force translatrice d'un élément infinitésimal.

Le terme Δ est probablement maximum au bord des continents, et ce maximum pourrait être révélé par des mesures combinées de physique et de géodésie. Les travaux des géodésiens nous donneraient dès aujourd'hui son ordre de grandeur.

Les déformations du champ qui se synthétisent en ce terme Δ sont très complexes. Des expériences précises, ou l'ensemble des observations géodésiques, ou encore de très longs et minutieux calculs permettraient de déterminer dans quelle mesure on pourrait tenir compte du faible effet de la variation Δ sur la force translatrice.

* * *

Critique des approximations dans le cas d'un élément vertical de section infiniment petite.

Nous désignerons par la lettre θ affectée de différents indices des quantités susceptibles de varier entre certaines limites que nous déterminerons dans la suite.

Posons :

$$R = a \theta_R, \quad dV_E = d\sigma dh \theta_h^E, \quad \left(1 + \frac{\delta g}{g}\right)_E = \theta_{\delta g}^E,$$

$$r = a \cos \varphi \cdot \theta_r, \quad dV_J = d\sigma dh \theta_h^J, \quad \left(1 + \frac{\delta g}{g}\right)_J = \theta_{\delta g}^J,$$

$$\delta \vec{g}^x = \delta \varphi \cdot \theta_{\delta \varphi}^x, \quad 1 + \delta \vec{g}^y = \theta_{\delta \varphi}^y.$$

Calculons la plus grande déviation de la verticale que nous ayons à envisager, c'est-à-dire la déviation ψ en un point P de profondeur h_J dans l'hypothèse 2^o où la pesanteur serait dirigée vers le centre C de l'ellipsoïde. La condition isostatique donnera $h_J < 100$. Nos calculs sont faits en forçant et prenant $h_J = 100$ km.

Considérons le triangle OPC dont deux côtés sont représentés sur la partie droite de la figure 4 (p. 171).

La relation des sinus:

$$\frac{\sin \psi}{OC} = \frac{\sin (\varphi - \gamma)}{CP}$$

donne:

$$\sin \psi = \frac{OC}{CP} \sin (\varphi - \gamma) ,$$

soit, puisque:

$$\sin (\varphi - \gamma) < \varphi - \gamma \quad \text{et} \quad CP > OC - OP ,$$

$$\sin \psi < \frac{1}{1 - \frac{h_J}{b}} (\varphi - \gamma) < \frac{60}{59} (\varphi - \gamma) .$$

La relation:

$$\varphi - \gamma = m \sin 2\varphi - \frac{m^2}{2} \sin 4\varphi + \frac{m^3}{3} \sin 6\varphi - \dots$$

montre d'une part que $\varphi - \gamma$ s'annule avec $\sin 2\varphi$, c'est-à-dire au pôle et à l'équateur, car $\sin n 2\varphi$ contient $\sin 2\varphi$ en facteur, et d'autre part:

$$\varphi - \gamma < m + m^2 + m^3 + \dots ,$$

soit:

$$\varphi - \gamma < \frac{m}{1 - m} .$$

Or $m < \frac{1}{297}$, donc $\varphi - \gamma < \frac{1}{296}$ et $\sin \psi < \frac{1}{291}$.

La relation évidente:

$$\sin |\delta\varphi| \leq |\delta\varphi| \leq \text{tg} |\delta\varphi|$$

donne:

$$1 \leq \frac{\delta\varphi}{\sin \delta\varphi} \leq \frac{1}{\cos \delta\varphi} , \quad \text{puis} \quad 1 \geq \frac{\sin \delta\varphi}{\delta\varphi} \geq \cos \delta\varphi .$$

Les relations:

$$\delta \vec{g}^X = \sin \delta\varphi = \delta\varphi \cdot \theta'_{\delta\varphi} \quad \text{et} \quad \cos \delta\varphi = 1 + \delta \vec{g}^Y = \theta''_{\delta\varphi}$$

montrent que:

$$\cos \delta\varphi \leq \theta'_{\delta\varphi} \leq 1 \quad \text{et} \quad \cos \delta\varphi = \theta''_{\delta\varphi} \leq 1 .$$

Or $|\delta\varphi| < \psi$ de sorte que $\cos \psi \leq \cos \delta\varphi$.

Représentons $\theta'_{\delta\varphi}$ et $\theta''_{\delta\varphi}$ par une même lettre $\theta_{\delta\varphi}$, et ses limites de variabilité seront:

$$\cos \psi \leq \theta_{\delta\varphi} \leq 1 .$$

Or:

$$\cos \psi = \sqrt{1 - \sin^2 \psi} ,$$

$$\cos \psi > \sqrt{1 - \left(\frac{1}{291}\right)^2} ,$$

d'où:

$$1 \geq \theta_{\delta\varphi} \geq \sqrt{\frac{84\,680}{84\,681}} .$$

L'approximation qui consiste à prendre l'angle $\delta\varphi$ au lieu de son sinus et l'unité au lieu de son cosinus ne donne lieu qu'à une erreur relative, inférieure à $\frac{1}{84\,681}$.

Pour le calcul des limites d'indétermination de $\theta_{\delta g}^E$ et de $\theta_{\delta g}^J$ nous avons envisagé deux cas extrêmes:

a) celui où l'attraction augmenterait en raison inverse du carré de la distance au centre de l'ellipsoïde, ce qui reviendrait à supposer que la masse totale y fût concentrée; et b) celui où l'attraction diminuerait proportionnellement à la distance au centre, ce qui serait le cas d'une sphère homogène. Il faut, bien entendu, combiner l'attraction avec la force centrifuge.

Les travaux de Clairaut et de ses successeurs sur les sphéroïdes hétérogènes en rotation permettraient de resserrer ces deux limites.

Les calculs des autres limites d'indétermination n'offrent pas de difficultés, et voici les résultats auxquels nous sommes arrivé; elles aussi pourraient être resserrées:

$$0,9999 < \theta_{\delta\varphi} \leq 1 ,$$

$$0,99888 \leq \theta_{\delta g}^E \leq 1,00112 ,$$

$$0,9782 \leq \theta_{\delta g}^J \leq 1,0378 ,$$

$$1 \leq \theta_h^E \leq 1,000963 ,$$

$$0,9687 \leq \theta_h^J \leq 1 ,$$

$$0,99327 \leq \theta_R \leq 1,0034 ,$$

$$1 \leq \theta_r \leq 1,0034 .$$

Introduisons les symboles :

$$\theta^E = \theta_{\delta g}^E \theta_{\delta \varphi} \theta_h^E ,$$

$$\theta^J = \theta_{\delta g}^J \theta_{\delta \varphi} \theta_h^J ,$$

qui donnent lieu aux inégalités :

$$0,9986 < \theta^E \leq 1,0022 ,$$

$$0,94748 < \theta^J \leq 1,0378 .$$

Alors :

$$s^X = ed\sigma g \theta^E \int_0^{h_E} \delta \varphi dh + \frac{e-i}{e} ed\sigma g \theta^J \int_{-h_J}^0 \delta \varphi dh ,$$

$$s^Y = ed\sigma g \theta^E h_E + (e-i) ed\sigma g \theta^J h_J .$$

La condition d'isostasie s'écrit :

$$\theta^E e h_E = \theta^J (i - e) h_J , \quad (17)$$

soit :

$$h_J = \frac{\theta^E}{\theta^J} \frac{e}{i - e} h_E .$$

Pour les valeurs précédemment admises de e , i et h_E on trouve :

$$89,3 \text{ km} \leq h_J \leq 98,2 \text{ km} .$$

Nous ne discuterons pas l'approximation qui provient de l'emploi de la formule :

$$\delta \varphi = \beta \frac{h}{a} \sin 2\varphi$$

à l'extérieur de l'ellipsoïde, mais nous distinguerons à nouveau les trois cas 1^o) 2^o) 3^o) de répartition du champ à l'intérieur.

Alors :

$$s^X = \theta^E e g d \sigma h_E \frac{\beta}{2} \frac{h_E}{a} \sin 2\varphi + \theta^J (i - e) g d \sigma \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \frac{\beta}{2} \frac{h_J}{a} \sin 2\varphi \cdot h_J ; \\ \frac{1}{291} h_J \end{array} \right. ; \quad (18)$$

et en exprimant h_J au moyen de la condition d'isostasie:

$$s^x = \theta^E \frac{\beta}{2} \frac{h_E}{a} e g d \sigma h_E \sin 2\varphi$$

$$+ \begin{cases} 1^\circ & 0 \\ 2^\circ & \theta^J \frac{\theta^E}{\theta^J} \frac{1}{291} \cdot e g d \sigma h_E \sin 2\varphi \\ 3^\circ & \theta^J \left(\frac{\theta^E}{\theta^J} \right)^2 \frac{e}{i - e} \frac{\beta}{2} \frac{h_E}{a} e g d \sigma h_E \sin 2\varphi \end{cases} \quad (19)$$

Cette dernière expression (19) est à comparer avec l'expression (14) (p. 175).

Exprimons le rapport de la force translatrice au poids du continent. Mais que faut-il entendre par poids, maintenant que nous nous astreignons à tenir compte des variations du champ de la pesanteur? Il est bien naturel d'appeler ici *poids de l'élément* la projection de la résultante des poids des différentes particules de E et de J, sur l'axe vertical OY. Cela s'impose même dans notre cas et permet d'exprimer la condition d'isostasie sans faire intervenir de facteur θ , tandis que toute formule approchée, qui aurait lié les poids de E et de J au moyen de h_E et de h_J , aurait augmenté le nombre des symboles d'approximation θ dans l'expression de s^x .

Pour nous rendre compte comment, avec nos nouvelles définitions des poids, la condition d'isostasie peut s'exprimer sans facteur d'approximation, réintroduisons le système des pressions Φ sur la surface immergée de l'élément. En désignant par Q_E , Q_J , Q_C les poids de E, de J et de E + J, et par Ψ la projection de la résultante du système Φ sur l'axe vertical, la condition d'isostasie s'écrit:

$$Q_E + Q_J + \Psi = 0 .$$

soit en désignant par Q_J^i le poids qu'aurait J à densité de masse i :

$$Q_E + Q_J - Q_J^i = 0 .$$

Mais on a:

$$Q_J^i = \frac{i}{e} Q_J ,$$

de sorte que la condition d'isostasie s'écrit :

$$Q_E + Q_J \left(1 - \frac{i}{e}\right) = 0 ,$$

ou encore :

$$Q_E = \frac{i-e}{i} Q_c \text{ et } Q_J = \frac{e}{i} Q_c . \quad (20)$$

En passant des poids aux hauteurs par les relations :

$$Q_E = \theta^E e g d \sigma h_E \quad \text{et} \quad Q_J = \theta^J e g d \sigma h_J , \quad (21)$$

on retrouve la condition d'isostasie avec les facteurs d'approximation :

$$\theta^E e h_E = \theta^J (i - e) h_J . \quad (17')$$

Les relations (18), (20) et (21) permettent d'exprimer la force translatrice au moyen du poids total :

$$s^x = \frac{\theta^E}{\theta^E} \frac{\beta}{2} \frac{h_E}{a} \frac{i-e}{i} \sin 2\varphi Q_c + \frac{\theta^J}{\theta^J} \frac{i-e}{i} \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \frac{1}{291} Q_c \\ \frac{\beta}{2} \frac{h_J}{a} \sin 2\varphi Q_c \end{array} \right. . \quad (22)$$

La formule (19) exprime la force translatrice au moyen des quantités les plus facilement accessibles aux mesures physiques : e , i et h_E ; elle montre à quel degré d'approximation l'expression (14) de la force translatrice était exacte.

La formule (22) au contraire ne peut pas être comparée sans précautions à la formule (16) (p. 175), il faudrait tenir compte de ce que P_c est une expression approchée du poids, tandis que Q_c mesure véritablement la pression normale qu'exercerait l'élément sur le plan horizontal, tangent à l'ellipsoïde, mené par l'origine de notre système d'axes, si, dans sa position réelle, il ne s'appuyait que sur ce plan. On a d'ailleurs :

$$Q_c = \theta^J P_J + \theta^E P_E .$$

En remplaçant les θ par leurs limites d'intétermination, nous verrions que la force translatrice est à 45° supérieure au

22.690.000^{me} du poids Q_c de l'élément, qu'elle est inférieure au 8124^{me} du poids Q_c . Il est intéressant de savoir d'autre part quelles sont les limites de l'erreur dans le cas dit vraisemblable. Remplaçons h_J , par sa valeur tirée de (17) (p. 183), dans (22), 3^o; nous trouverons:

$$s^x = \frac{\beta}{2} \frac{h_E}{a} \left(\frac{\theta^E}{\theta^E} \frac{i - e}{i} + \frac{\theta^J}{\theta^J} \cdot \frac{\theta^E}{\theta^J} \cdot \frac{e}{i} \right) \sin 2\varphi Q_c .$$

La force translatrice est donc dans le cas 3^o comprise entre les deux limites suivantes, pour les valeurs choisies de e , i et h_E :

$$\frac{\sin 2\varphi}{853.700} Q_c \quad \text{et} \quad \frac{\sin 2\varphi}{652.500} Q_c .$$

comme le montre le calcul de s^x .

* * *

Remarque.

Nous avons supposé que la densité i était constante, ainsi que e , dans la région C; sans compliquer le calcul de s^x , on peut admettre, et c'est très naturel, que e et i sont variables, $i - e$ étant constant. Un de mes élèves a entrepris de déterminer la variation de i en profondeur et la déviation de la verticale dans le géoïde en partant *des travaux classiques de Clairaut sur la masse fluide hétérogène en rotation et des études plus récentes de Helmholtz qui s'y rapportent.*

Cela permettra de remplacer notre distribution 3^o par une distribution du champ plus exacte et de calculer l'intensité de la force translatrice en étant encore plus avare d'hypothèses.