

Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles
Band: 7 (1925)

Artikel: Sur la grandeur de la force qui tendrait à rapprocher un continent de l'équateur
Autor: Berner, R.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-740694>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 07.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SUR LA GRANDEUR DE LA FORCE qui tendrait à rapprocher un continent de l'équateur

PAR

R. BERNER

(Avec 1 fig.)

Dans l'important travail qu'il vient de publier¹, M. le professeur R. Wavre a traité en toute rigueur le problème de la recherche de la force qui sollicite un continent à fuir le pôle. C'est une utile contribution à « la théorie de la genèse des continents et des océans », de M. Wegener. D'autres mathématiciens et géodésiens se sont aussi occupés de cette question, et avant M. Wavre, mais les approximations qu'ils ont faites dans le but de simplifier leurs calculs, en considérant par exemple le rayon de courbure méridien comme constant, en remplaçant la latitude géographique par la latitude géocentrique, rendent très difficile l'appréciation du degré d'exactitude de leurs résultats.

M. Wavre a admis comme seule hypothèse que l'ellipsoïde des géodésiens est une figure d'équilibre, et que la présence, sur celui-ci, d'un petit continent ne modifie sensiblement ni sa forme ni son mouvement autour de son axe de révolution. Voici rappelée la formule qui donne la résultante du système de forces agissant sur le continent:

$$\begin{aligned} \vec{s} = & \int \int \int_{\mathbb{E}} e(x) g(x) \vec{g}(x) dE \\ & + \int \int \int e(x) g(x) \vec{g}(x) dJ - \int \int \int i(x) g(x) \vec{g}(x) dJ \quad (1) \end{aligned}$$

¹ *Archives* [5], 7, p. 163 (1925).

Pour l'explication des lettres qui figurent dans cette formule et dans celles qui vont suivre, nous renvoyons le lecteur au travail même de M. Wavre (pages 167 et 169).

Si M. Wavre a exprimé l'élément de volume:

$$dV = Rr \left(1 + h \cdot \frac{R \cos \varphi + r}{Rr} + \frac{h^2 \cos \varphi}{Rr} \right) d\sigma, \quad (2)$$

plus simplement par:

$$dV = d\sigma dh,$$

si, pour faciliter l'intégration des composantes:

$$\begin{aligned} s^x = \int_{\mathbb{R}} \int \int e_g \left(1 + \frac{\delta g}{g} \right) \delta \vec{g}^x dE \\ + \int \int \int (e - i) g \left(1 + \frac{\delta g}{g} \right) d\vec{g}^x dJ \end{aligned} \quad (3)$$

et

$$\begin{aligned} s^y = \int_{\mathbb{R}} \int \int e_g \left(1 + \frac{\delta g}{g} \right) (1 + \delta \vec{g}^y) dE \\ + \int \int \int (e - i) g \left(1 + \frac{\delta g}{g} \right) (1 + \delta \vec{g}^y) dJ, \end{aligned}$$

il a négligé les termes du second degré en δg et $\delta \vec{g}$ devant ceux du premier dans s^x , et les termes du premier devant l'unité dans s^y , il a par compensation discuté en fin d'étude toutes ces approximations, fixant ainsi des limites aux résultats obtenus.

Le travail de M. Wavre est un cadre algébrique, et les valeurs de e , i , h_E , adoptées par lui, peuvent être remplacées par d'autres.

Les géodésiens appellent d'ordinaire déviation de la verticale en un point, l'angle de la normale au géoïde avec la normale à un ellipsoïde fictif passant au point considéré. Ici nous appellerons avec M. Wavre déviation de la verticale, l'angle de la verticale au point considéré et de la verticale en un point pris pour origine.

Le champ de la pesanteur à l'intérieur de l'ellipsoïde n'étant pas très bien connu, M. Wavre a dû faire deux hypothèses extrêmes, 1^o) et 2^o), et une hypothèse vraisemblable, 3^o)

(v. la fig., p. 252). Cette dernière consiste à appliquer la formule suivante, que nous appellerons *formule approchée*:

$$\delta\varphi = \beta \frac{h}{a} \sin 2\varphi ,$$

au calcul de la déviation de la verticale $\delta\varphi$ à l'intérieur aussi bien qu'à l'extérieur de l'ellipsoïde.

Nous nous sommes proposé de discuter d'abord dans quelle mesure cette formule fournit bien une valeur approchée de la déviation de la verticale à l'intérieur de l'ellipsoïde et jusqu'à quelle profondeur; nous avons voulu donner ensuite deux limites plus resserrées entre lesquelles est comprise la force translatrice.

Nous sommes parti des travaux de Clairaut et des séries de Helmert.

Les travaux de Clairaut et de Helmert.

Clairaut a cherché à déterminer la figure d'équilibre d'une masse fluide, hétérogène, en rotation autour d'un axe; il l'a supposée formée de couches infiniment minces, homogènes, dont la densité est fonction de leur distance au centre; chacun des éléments de ces couches est soumis à l'action newtonienne de la masse totale. *Ces couches sont des figures d'équilibre, des ellipsoïdes de révolution, et voici comment Clairaut en établit l'équation.*

Il rapporte les coordonnées des points à un système d'axes *Oxyz* dont l'origine est placée au centre de l'ellipsoïde. Il désigne par α l'aplatissement des différentes couches, et forme les composantes X, Y, Z de la force agissant sur un point, en fonction de la densité variable ρ des matières en présence:

$$\begin{aligned} X &= -\frac{4\pi k^2}{3} x \left[\frac{3K + L}{r^3} + \frac{3N}{5r^5} (1 - 5\sin^2\theta) - \frac{2}{5} F \right] , \\ Y &= -\frac{4\pi k^2}{3} y \left[\frac{3K + L}{r^3} + \frac{3N}{5r^5} (1 - 5\sin^2\theta) - \frac{2}{5} F \right] , \\ Z &= -\frac{4\pi k^2}{3} z \left[\frac{3K + L}{r^3} + \frac{3N}{5r^5} (3 - 5\sin^2\theta) + \frac{4}{5} F \right] . \end{aligned}$$

avec

$$K = \int_0^r \rho r^2 dr, \quad L = \int_0^r \rho d(r^2 \alpha), \quad N = \int_0^r \rho d(r^5 \alpha),$$

$$E = \int_0^r \rho r^4 dr, \quad F = \int_r^a \rho \frac{d\alpha}{dr} dr;$$

r désigne la distance d'une couche quelconque au centre commun; c'est le rayon équatorial des différentes couches.

Puis il exprime la condition nécessaire pour que la couche α soit une surface d'équilibre, et obtient alors les deux équations:

$$(X + \omega^2 x) dx + Z dz = 0, \quad x dx + z(1 + 2\alpha) dz = 0,$$

d'où il tire, par élimination de dx et de dz , l'équation:

$$\frac{X + \omega^2 x}{x} - \frac{Z}{z} = -\frac{2Z\alpha}{z}.$$

En y substituant les composantes X et Z de la force, il trouve une première relation entre r , α et ρ :

$$\frac{5\omega^2}{8\pi k^2} r^5 = 5\alpha r^2 K - N + r^5 F,$$

et par deux différentiations successives, il obtient l'équation finale:

$$\frac{d^2\alpha}{dr^2} + \frac{2\rho r^2}{K} \frac{d\alpha}{dr} + 2\alpha \left(\frac{\rho r}{K} - \frac{3}{r^3} \right) = 0.$$

C'est une équation différentielle linéaire qui donne la relation entre ρ , α et les dérivées de α par rapport à r .

Les mathématiciens en ont cherché les solutions en faisant différentes hypothèses sur la répartition des densités à l'intérieur de la terre. Nous noterons les développements tout numériques donnés par Helmert, que nous appliquerons dans notre problème:

$$\alpha = \frac{1}{372} \left[1 + 0,178 \left(\frac{r}{a} \right)^2 + 0,054 \left(\frac{r}{a} \right)^4 + 0,016 \left(\frac{r}{a} \right)^6 + \dots \right],$$

$$\rho = 11,3 \left[1 - 1,04 \left(\frac{r}{a} \right)^2 + 0,275 \left(\frac{r}{a} \right)^4 - \dots \right].$$

(4)

* * *

Calcul des limites supérieures et inférieures de $\delta\varphi$ en partant des travaux de Clairaut et de Helmert.

Nous remplacerons $\delta\varphi$ par $\text{tg } \delta\varphi$; cette approximation ne donne lieu qu'à une erreur relative inférieure à $\frac{1}{84\,680}$; on le montre facilement en partant du travail de M. Wavre.

On a en effet:

$$\text{tg } \delta\varphi = \frac{\sin \delta\varphi}{\cos \delta\varphi} = \frac{\theta' \delta\varphi}{\theta'' \delta\varphi} = \frac{\theta_{\delta\varphi}}{\theta_{\delta\varphi}} \cdot \delta\varphi .$$

Or:

$$\text{tg } \delta\varphi > \delta\varphi .$$

de sorte que:

$$\delta\varphi < \text{tg } \delta\varphi < \frac{1}{\sqrt{\frac{84\,680}{84\,681}}} \delta\varphi .$$

$$\delta\varphi < \text{tg } \delta\varphi < \sqrt{1 + \frac{1}{84\,680}} \cdot \delta\varphi < \left(1 + \frac{1}{84\,680}\right) \delta\varphi .$$

Reprenons le système d'axes de Clairaut. Ecrivons sans indice les lettres désignant des éléments en $d\sigma$, avec l'indice h celles qui se rapportent aux éléments d'un point à la profondeur h , et avec l'indice J celles qui se rapportent à l'extrémité inférieure du continent.

Soient x, y, z , les coordonnées de $d\sigma$. Nous supposons la normale en cet élément dans le plan xOz , de sorte que, sur la normale, les y sont nuls. Si φ est la latitude géographique de $d\sigma$, ε l'excentricité de l'ellipsoïde, un calcul facile donne:

$$x = \frac{a \cos \varphi}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{et} \quad z = \frac{a (1 - \varepsilon^2) \sin \varphi}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} .$$

Par un point du continent à la profondeur h passe un ellipsoïde de Clairaut d'aplatissement α_h ; sa normale φ_h en ce point fournit la direction de la verticale, et la différence $\varphi - \varphi_h$, l'angle de déviation de celle-ci.

Le point de profondeur h a pour coordonnées:

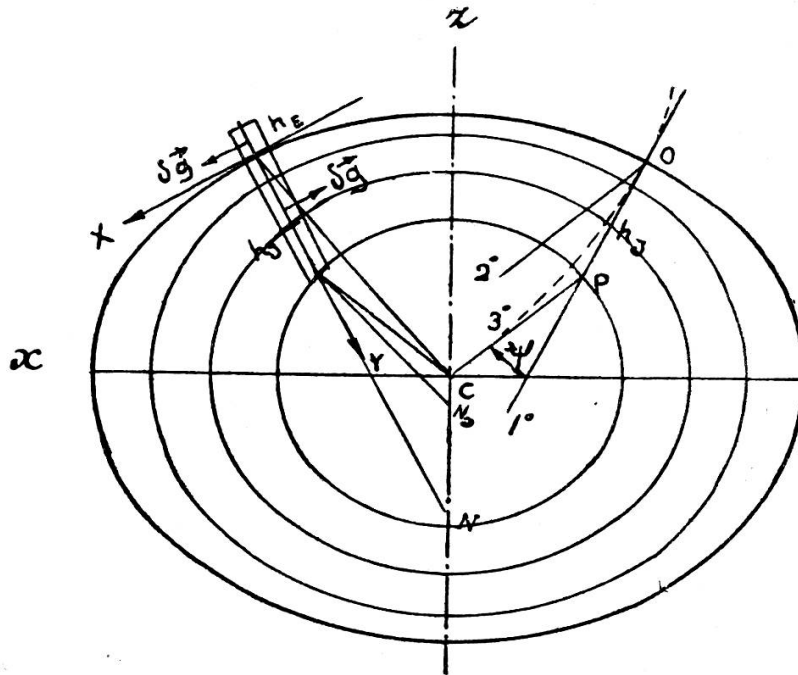
$$x_h = x + h \cos \varphi ,$$

$$z_h = z + h \sin \varphi ;$$

h est un nombre relatif; il est négatif.

Le coefficient angulaire de la normale en x_h, z_h est:

$$\operatorname{tg} \varphi_h = \frac{z_h}{x_h} \frac{1}{(1 - \alpha_h)^2} . \quad (5)$$



En effet, l'équation de l'ellipse méridienne:

$$\frac{x_h^2}{a_h^2} + \frac{z_h^2}{b_h^2} = 1 .$$

peut s'écrire en remplaçant b_h par $a_h(1 - \alpha_h)$:

$$\frac{x_h^2}{a_h^2} + \frac{z_h^2}{a_h^2(1 - \alpha_h)^2} = 1 ,$$

et cette équation donne par différentiation:

$$-\frac{dx_h}{dz_h} = \frac{z_h}{x_h} \frac{1}{(1 - \alpha_h)^2} .$$

Il est donc inutile, pour déterminer le coefficient angulaire de la normale en un point, de calculer les axes de l'ellipsoïde de Clairaut passant par ce point.

Remarquons que $\operatorname{tg} \varphi_{h_2}$ est toujours plus petit que $\operatorname{tg} \varphi_{h_1}$, si $h_2 < h_1$. C'est presque évident géométriquement puisque, d'après Clairaut et Helmert, on a :

$$\alpha_1 > \alpha_2 .$$

Cette remarque a une telle importance pour la suite que nous croyons utile d'en faire la démonstration analytique.

Le rapport $\frac{z_{h_1}}{x_{h_1}}$ des coordonnées d'un point à la profondeur h_1 est plus grand que le rapport $\frac{z_{h_2}}{x_{h_2}}$ des coordonnées d'un point h_2 lorsque $h_1 > h_2$.

Exprimons, en effet, la relation :

$$\frac{z_{h_1}}{x_{h_1}} - \frac{z_{h_2}}{x_{h_2}} > 0 ,$$

qu'on peut écrire :

$$\frac{z + h_1 \sin \varphi}{x + h_1 \cos \varphi} - \frac{z + h_2 \sin \varphi}{x + h_2 \cos \varphi} > 0 .$$

Cette inégalité est vraie si :

$$\begin{aligned} zx + zh_2 \cos \varphi + xh_1 \sin \varphi + h_1 h_2 \sin \varphi \cos \varphi - zx - zh_1 \cos \varphi \\ - xh_2 \sin \varphi - h_1 h_2 \sin \varphi \cos \varphi > 0 , \end{aligned}$$

ou, après réduction, si :

$$z \cos \varphi (h_2 - h_1) - x \sin \varphi (h_2 - h_1) > 0 .$$

Nous divisons cette inégalité par $h_2 - h_1$; cette différence est négative ; il faut que :

$$z \cos \varphi - x \sin \varphi < 0 ,$$

ou :

$$\frac{z}{x} < \operatorname{tg} \varphi .$$

Or :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{z}{x} \cdot \frac{1}{(1 - \alpha)^2} = \frac{z}{x} \frac{1}{1 - \varepsilon^2} ;$$

il faut donc que:

$$\frac{z}{x} < \frac{z}{x} \frac{1}{1 - \varepsilon^2},$$

ou:

$$1 < \frac{1}{1 - \varepsilon^2},$$

et cette relation est satisfaite.

Nous avons d'une part:

$$\frac{z_{h_1}}{x_{h_1}} > \frac{z_{h_2}}{x_{h_2}},$$

et d'autre part:

$$\frac{1}{(1 - \alpha_1)^2} > \frac{1}{(1 - \alpha_2)^2},$$

puisque $\alpha_1 > \alpha_2$; d'où par multiplication membre à membre:

$$\frac{z_{h_1}}{x_{h_1}} \frac{1}{(1 - \alpha_1)^2} > \frac{z_{h_2}}{x_{h_2}} \frac{1}{(1 - \alpha_2)^2}.$$

Le premier membre est $\operatorname{tg} \varphi_{h_1}$, le second $\operatorname{tg} \varphi_{h_2}$; la proposition est ainsi démontrée.

Posons:

$$\operatorname{tg} \delta \varphi = - \operatorname{tg} (\varphi - \varphi_h),$$

ou encore:

$$\operatorname{tg} \delta \varphi = - \frac{\xi_h z x_h - \xi x z_h}{x x_h \xi \xi_h + z z_h},$$

ainsi que cela résulte du développement de $\operatorname{tg} (\varphi - \varphi_h)$ et de la formule (5); nous avons remplacé $(1 - \alpha_h)^2$ par ξ_h et $(1 - \alpha)^2$ par ξ .

Or:

$$x_h = x + h \cos \varphi,$$

$$z_h = z + h \sin \varphi.$$

Le second membre peut donc être développé sous la forme:

$$\begin{aligned} & \frac{\xi_h z (x + h \cos \varphi) - \xi x (z + h \sin \varphi)}{x \xi \xi_h (x + h \cos \varphi) + z (z + h \sin \varphi)} \\ &= - \frac{(\xi_h z x - \xi x z) + (\xi_h z \cos \varphi - \xi x \sin \varphi) h}{(x^2 \xi \xi_h + z^2) + (x \xi \xi_h \cos \varphi + z \sin \varphi) h} \end{aligned}$$

Ecrivons:

$$\begin{aligned}xz(\xi_h - \xi) &= \alpha, \\z\xi_h \cos \varphi - x\xi \sin \varphi &= \beta, \\x^2\xi\xi_h + z^2 &= \gamma, \\x\xi\xi_h \cos \varphi + z \sin \varphi &= \vartheta,\end{aligned}$$

et l'angle de la déviation de la verticale avec la profondeur sera donné par la relation:

$$\operatorname{tg} \delta \varphi = - \frac{\alpha + \beta h}{\gamma + \vartheta h}.$$

Les fonctions $\alpha, \beta, \gamma, \vartheta$ dépendent de h par ξ_h , et varient avec la profondeur. Mais on peut, en première approximation, les supposer constantes en remplaçant les ellipses de Clairaut par des ellipses homothétiques.

Nous les remplacerons d'abord par des ellipses homothétiques à l'ellipse $h = 0$, en substituant ξ à ξ_h , ce qui nous donnera une limite inférieure à $|\operatorname{tg} \delta \varphi|$ que nous noterons $|\underline{\delta \varphi}|$.

En effet, par cette substitution nous majorons:

$$\operatorname{tg} \varphi_h = \frac{z_h}{x_h} \cdot \frac{1}{\xi_h},$$

car ξ est plus petit que ξ_h . Mais nous ne changeons pas le signe de $\operatorname{tg}(\varphi - \varphi_h)$, car φ_h reste inférieur à φ puisque:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{z}{x} \cdot \frac{1}{\xi},$$

et que la nouvelle valeur de $\operatorname{tg} \varphi_h$ serait:

$$\frac{z_h}{x_h} \cdot \frac{1}{\xi};$$

$\frac{z_h}{x_h}$ étant plus petit que $\frac{z}{x}$, $\operatorname{tg} \varphi_h$ reste plus petit que $\operatorname{tg} \varphi$.

Nous remplacerons ensuite les ellipses de Clairaut par des ellipses homothétiques à celle qui passe par h_1 ; nous substituerons donc ξ_1 à ξ_h ; nous diminuerons ainsi $\operatorname{tg} \varphi_h$ et majorerons $\operatorname{tg}(\varphi - \varphi_h)$. Nous obtiendrons ainsi pour $|\operatorname{tg} \delta \varphi|$ une limite supérieure que nous noterons $|\overline{\delta \varphi}|$.

Dans $\underline{\delta\varphi}$, nous aurons:

$$\begin{aligned}\alpha &= 0, \\ \beta &= \xi(z \cos \varphi - x \sin \varphi), \\ \gamma &= x^2 \xi^2 + z^2, \\ \mathfrak{D} &= x \xi^2 \cos \varphi + z \sin \varphi,\end{aligned}$$

et dans $\overline{\delta\varphi}$:

$$\begin{aligned}\alpha &= zx(\xi_J - \xi), \\ \beta &= z\xi_J \cos \varphi - x\xi \sin \varphi, \\ \gamma &= x^2 \xi \xi_J + z^2, \\ \mathfrak{D} &= x\xi \xi_J \cos \varphi + z \sin \varphi.\end{aligned}$$

Ainsi, en confondant l'angle de la déviation de la verticale avec sa tangente, on devra avoir:

$$|\underline{\delta\varphi}| < |\delta\varphi| < |\overline{\delta\varphi}|;$$

et puisque ces déviations sont négatives:

$$\underline{\delta\varphi} > \delta\varphi > \overline{\delta\varphi}.$$

Discussion de l'emploi de la formule approchée:

$$\delta\varphi = \beta \frac{h}{a} \sin 2\varphi.$$

Nous ferons $\varphi = 45^\circ$ et $h_J = -100$ km.

La formule (4), d'Helmert (p. 250), nous a donné pour l'aplatissement α_J de l'ellipsoïde passant à 100 km de profondeur le chiffre $\frac{1}{300,8}$ que nous remplacerons par $\frac{1}{301}$, augmentant ainsi la déviation de la verticale.

Le calcul nous a montré que la valeur de $\delta\varphi$ donnée par la formule approchée restait comprise entre nos limites $\underline{\delta\varphi}$ et $\overline{\delta\varphi}$ jusqu'à une profondeur d'environ 75,324 km, et que, pour une profondeur plus grande, $\delta\varphi$ sortait de ces limites par des valeurs absolues supérieures à $|\overline{\delta\varphi}|$.

Voici calculées pour quelques profondeurs les valeurs de $\delta\varphi$ tirées de la formule approchée et des limites $\overline{\delta\varphi}$ et $\underline{\delta\varphi}$.

	$\underline{\delta\varphi}$	$\overline{\delta\varphi}$	$\delta\varphi$	
$h = 0$	0	$-\frac{1}{44897}$	0	} $ \underline{\delta\varphi} < \delta\varphi < \overline{\delta\varphi} $
$h = -50$	$-\frac{1}{37675}$	$-\frac{1}{20470}$	$-\frac{1}{24113}$	
$h = -75.324$	$-\frac{1}{24908}$	$-\frac{1}{16006}$	$-\frac{1}{16010}$	
$h = -96$	$-\frac{1}{19479}$	$-\frac{1}{13573}$	$-\frac{1}{12569}$	} $ \underline{\delta\varphi} < \overline{\delta\varphi} < \delta\varphi $

Il sera donc préférable d'effectuer les calculs de la déviation de la verticale au moyen de nos valeurs $\overline{\delta\varphi}$ et $\underline{\delta\varphi}$, tout au moins à partir de 73 km de profondeur.

* * *

Détermination plus serrée des limites des facteurs d'approximation $\theta_h^E, \theta_h^J, \theta_{\delta g}^E, \theta_{\delta g}^J$, et des symboles θ^E, θ^J , introduits par M. Wavre.

Les facteurs d'approximation sont définis par les équations:

$$dV_E = d\sigma dh \theta_h^E ; \quad \left(1 + \frac{\delta g}{g}\right)_E = \theta_{\delta g}^E ;$$

$$dV_J = d\sigma dh \theta_h^J ; \quad \left(1 + \frac{\delta g}{g}\right)_J = \theta_{\delta g}^J ;$$

et les symboles θ^E et θ^J par:

$$\theta^E = \theta_{\delta g}^E \theta_{\delta\varphi} \theta_h^E \quad \text{et} \quad \theta^J = \theta_{\delta g}^J \theta_{\delta\varphi} \theta_h^J .$$

Nous prendrons pour ce calcul:

$$h_E = 3,2 \text{ km} ; \quad h_J = -100 \text{ km} .$$

Nous forçons ce dernier chiffre, et nous obtiendrons des limites très larges, car la condition d'isostasie donne pour h_J une valeur absolue inférieure à 96 km, avec les valeurs que nous choisirons pour les densités du socle et du sima.

Pour les facteurs θ_h^E et θ_h^J , il n'est pas possible de calculer des limites plus serrées que celles de M. Wavre.

Les voici :

$$1 < \theta_h^E < 1,000963 ,$$

$$0,9687 < \theta_h^J < 1 .$$

Nous avons calculé à nouveau le facteur $\theta_{\delta g}^E$ en admettant que la force centrifuge est égale au plus au $\frac{1}{289}$ de l'attraction. En comparant la variation δg au pôle, où elle est maximum, à l'accélération g à l'équateur, où celle-ci est minimum, nous avons obtenu :

$$\left| \frac{\delta g}{g} \right| < \frac{1}{998} ,$$

de sorte que :

$$0,9989985 < \theta_{\delta g}^E < 1 .$$

Pour les limites du facteur $\theta_{\delta g}^J$, nous utiliserons l'intégrale de l'équation de Clairaut ¹ :

$$g = \frac{4\pi k^2}{R^2} \int_0^R \rho r^2 dr , \quad (6)$$

qui donne g en fonction du rayon R et de la densité ρ .

Nous différencions chaque membre de cette équation et trouvons :

$$dg = 4\pi k^2 \left(\rho - \frac{2}{3} \rho_m \right) dR ,$$

ρ_m désignant la densité moyenne de la terre.

La valeur maximum de δg sera donnée alors par :

$$g_{h=h_J} - g_{h=0} = 4\pi k^2 \int_R^{R+h_J} \left(\rho - \frac{2}{3} \rho_m \right) dR . \quad (7)$$

La densité ρ est fonction de R .

Nous pourrions effectuer l'intégration en remplaçant, sous le signe intégral, ρ par le développement d'Helmert (4) (p. 250).

¹ Voir *Encyclopédie math.*, vol. VI, p. 116.

Mais d'après ce développement, ρ croît de la surface vers l'intérieur tout en restant inférieur à $\frac{2}{3}\rho_m$ dans nos limites d'intégration, de sorte qu'en remplaçant la densité ρ par sa valeur ρ_0 en $d\sigma$, où elle est minimum, nous obtenons par intégration une limite supérieure de δg . Après cette substitution dans (7), l'intégration donne:

$$\delta g = 4\pi k^2 h_J \left(\rho_0 - \frac{2}{3}\rho_m \right).$$

L'intégrale (6) donne:

$$g = \frac{4\pi k^2}{3} \rho_m \cdot R.$$

de sorte que:

$$\lim \frac{\delta g}{g} = \frac{3 \left(\rho_0 - \frac{2}{3}\rho_m \right) h_J}{\rho_m R}.$$

h_J est négatif; ρ_0 est plus petit que $\frac{2}{3}\rho_m$; le rapport $\frac{\delta g}{g}$ est donc positif.

R est compris entre a et b . En prenant $R=b$, nous obtenons un g minimum, et en divisant $\lim. \sup. \delta g$ par $g \min.$, nous trouvons une limite supérieure à $\frac{\delta g}{g}$. En choisissant comme les plus probables les chiffres de densités donnés par Helmert ¹,

$$\rho_0 = 2,65 \quad \text{et} \quad \rho_m = 5,515,$$

nous avons calculé que:

$$\left(\frac{\delta g}{g} \right)_J < \frac{1}{114}.$$

Notre approximation $\theta_{\delta g}^J$ est donc comprise entre les limites:

$$1 < \theta_{\delta g}^J < 1,00938.$$

Le facteur $\theta_{\delta g}$ étant compris entre $\sqrt{\frac{84680}{84681}}$ et 1, nos symboles θ^E et θ^J ont pour limites:

$$0,998992 < \theta^E < 1,000963;$$

$$0,968694 < \theta^J < 1,00938.$$

¹ Voir *Encyclopédie math.*, vol. VI, p. 118.

* * *

Les limites de la force translatrice s_x .

La force s_x est la somme de 2 intégrales:

$$\int \int \int_E e g \left(1 + \frac{\delta g}{g}\right) \delta \vec{g}^x dE \quad \text{et} \quad \int \int \int_J (e - i) g \left(1 + \frac{\delta g}{g}\right) \delta \vec{g}^x dJ .$$

La densité e est supposée constante dans E; la différence $i - e$, constante dans J; i est la variable ρ de Clairaut et de Helmert.

Ces intégrales peuvent s'écrire avec les facteurs d'approximation:

$$s^x = e d\sigma g \theta^E \int_0^{h_E} \delta \varphi dh \quad \text{et} \quad (e - i) d\sigma g \theta^J \int_{h_J}^0 \delta \varphi dh .$$

En admettant que, dans la première intégrale, l'angle de déviation de la verticale soit donné par la formule approchée, nous trouvons en intégrant:

$$\theta^E h_E e g d\sigma \frac{\beta}{2} \frac{h_E}{a} \sin 2\varphi .$$

Pour l'intégration de la seconde, nous admettrons que $\delta \vec{\varphi}^x$ est calculé au moyen des ellipsoïdes de Clairaut.

Nous aurons donc à intégrer:

$$- \theta^J (e - i)_J g d\sigma \int_{h_J}^0 \frac{\alpha + \beta h}{\gamma + \mathfrak{S} h} dh .$$

L'intégration est très difficile; α , β , γ et \mathfrak{S} sont des fonctions de α_h , et α_h est donné par la formule (4) d'Helmert. Il nous suffira de trouver des limites de l'intégrale en substituant à $\delta \varphi$ les limites $\underline{\delta \varphi}$ et $\overline{\delta \varphi}$ définies plus haut. Il serait sans doute plus simple encore de remplacer $|\delta \varphi|$ par son minimum, puis par son maximum: mais le minimum étant nul, nous trouverions zéro pour la borne inférieure de l'intégrale, et il en résulterait un grand écart pour les limites de notre force.

Les coefficients α, β, γ et \mathfrak{S} sont constants dans $\underline{\delta\varphi}$ et $\overline{\delta\varphi}$. L'intégration donne:

$$\begin{aligned}
 & - \theta^J (e - i) g d\sigma \int_{h_J}^0 \frac{\alpha + \beta h}{\gamma + \mathfrak{S} h} dh = \\
 & - \theta^J (e - i) g d\sigma \left\{ \frac{\alpha}{\mathfrak{S}} [\log \gamma - \log (\gamma + \mathfrak{S} h_J)] \right. \\
 & \left. + \beta \left\{ - \frac{\gamma}{\mathfrak{S}^2} [\log \gamma - \log (\gamma + \mathfrak{S} h_J)] - \frac{h_J}{\mathfrak{S}} \right\} \right\}.
 \end{aligned}$$

La limite h_J doit être déduite de la condition d'isostasie ¹:

$$\theta^E e h_E = \theta^J (i - e)_J |h_J|.$$

Représentons par I_i et I_s la borne inférieure et la borne supérieure de l'intégrale:

$$- \int_{h_J}^0 \frac{\alpha + \beta h}{\gamma + \mathfrak{S} h} dh ;$$

alors les limites entre lesquelles est comprise la force s_x seront:

$$\begin{aligned}
 & eg d\sigma h_E \frac{\beta}{2} \frac{h_E}{a} \sin 2\varphi \theta^E \\
 & + (i - e)_J g d\sigma \theta^J I_i < s_x < eg d\sigma h_E \frac{\beta}{2} \frac{h_E}{a} \sin 2\varphi \theta^E \\
 & \quad + (i - e)_J g d\sigma \theta^J \cdot I_s. \tag{8}
 \end{aligned}$$

* * *

Le poids du socle.

Nous définissons poids du socle, la somme des projections des poids de E et de J sur la normale en $d\sigma$. Ce poids est donné par les intégrales:

$$\begin{aligned}
 P_c &= \int_E eg \left(1 + \frac{\delta g}{g}\right) (1 + \delta \vec{g}^Y) dE + \int_J eg \left(1 + \frac{\delta g}{g}\right) (1 + \delta \vec{g}^Y) dJ \\
 &= \theta^E eg d\sigma \int_0^{h_E} dh + \theta^J g d\sigma \int_{h_J}^0 edh.
 \end{aligned}$$

¹ Voir le mémoire cité de M. Wavre, *Archives*, 1925, p. 183.

La densité e est variable dans J ; elle croît avec la profondeur; en vertu de notre hypothèse, $i - e$ est constant. Nous intégrerons néanmoins comme si e était constant dans tout le socle et égal à sa valeur en $d\sigma$; nous multiplierons ensuite le résultat de la seconde intégrale par un facteur θ_e^J dont on trouvera les limites en supposant la densité une première fois partout égale à e en $d\sigma$, une deuxième fois égale à sa valeur à la profondeur h^J où elle est maximum en vertu de la formule (4) d'Helmert.

Voici calculées, avec les densités trouvées au moyen de la formule d'Helmert et pour une profondeur de 100 km, les limites de variabilité de ce facteur θ_e^J :

$$1 < \theta_e^J < 1,09804 .$$

L'intégration de P_c nous donne alors:

$$P_c = \theta^E e g d\sigma h_E + \theta^J \theta_e^J e g d\sigma \cdot h_J ,$$

ce qui peut s'écrire en tenant compte de la condition d'isostasie:

$$P_c = \theta^E e g d\sigma h_E + \theta^J \theta_e^J \frac{\theta^E}{\theta^J} e g d\sigma \cdot \frac{e}{(i - e)_J} h_E . \quad (9)$$

* * *

Les limites du rapport de la force translatrice au poids du socle.

L'inégalité (8) (p. 261) nous donne les limites de la force translatrice, la formule (9) le poids du continent. Voici donc l'expression des limites de leur rapport:

$$\frac{\theta^E \frac{\beta}{2} \frac{h_E}{a} \sin 2\varphi + \theta^J \frac{(i - e)_J}{e} \frac{I_i}{h_E}}{\theta^E + \theta^J \theta_e^J \frac{\theta^E}{\theta^J} \frac{e}{(i - e)_J}} < \frac{s_x}{P_c} < \frac{\theta^E \frac{\beta}{2} \frac{h_E}{a} \sin 2\varphi + \theta^J \frac{(i - e)_J}{e} \frac{I_s}{h_E}}{\theta^E + \theta^J \theta_e^J \frac{\theta^E}{\theta^J} \frac{e}{(i - e)_J}} .$$

* * *

Valeurs numériques des limites du rapport $\frac{s_x}{P_c}$ à la latitude géographique $\varphi = 45^\circ$.

Nous prendrons pour les dimensions de l'ellipsoïde terrestre

les chiffres de Helmert donnés dans l'Encyclopédie Mathématique, vol. VI (1921) :

$$a = 6378,2 \text{ km} ,$$

$$b = 6356,8 \text{ km} ,$$

$$\alpha = \sim \frac{1}{299} .$$

Nous poserons $h_E = 3,2 \text{ km}$. La densité du sima à la surface de l'ellipsoïde, calculée par la formule (4), est environ 2,65. Si nous admettons $h_J = -92 \text{ km}$, il résulte de la condition d'isostasie pour $(i-e)_J$ la valeur 0,089, et pour e , dans E, la valeur 2,56. Les documents pour la différence $(i-e)_J$ des densités du sima et du sial nous manquent. Les géologues ont des opinions fort différentes sur la profondeur du socle continental. M. Wegener l'estime entre 90 et 100 km. Il est bien entendu que notre rapport de la force au poids variera dans une large mesure avec les valeurs adoptées pour e et $i - e$.

La condition d'isostasie donne, avec les facteurs d'approximation, les limites suivantes pour $|h_J|$:

$$91,09 < |h_J| < 95,11 .$$

Nous ferons $h_J = -91,09$ dans I_i et $h_J = -95,11$ dans I_s .

La force translatrice a pour limites :

$$0,0000801403 \text{ eg } d\sigma < s_x < 0,00016430268 \text{ eg } d\sigma ,$$

et le poids du continent :

$$108,618 \text{ eg } d\sigma > P_c > 91,435 \text{ eg } d\sigma .$$

Voici finalement les limites du rapport $\frac{s_x}{P_c}$:

$$\frac{1}{1355350} < \frac{s_x}{P_c} < \frac{1}{556502} .$$

La moyenne arithmétique de ces deux limites est :

$$\frac{1}{789903} .$$

* * *

Conclusion.

Le rapport de la force translatrice au poids du continent est donc extrêmement faible; elle est insuffisante pour créer des montagnes, et n'en crée point sur l'équateur à l'heure actuelle.

Mais les choses se présenteraient sous un jour différent, si à cet effet statique s'ajoutait un effet dynamique.

La résistance du sima n'empêche pas les continents de se mouvoir; et dans le cas où deux continents se rencontreraient sur l'équateur ou à d'autres latitudes, la force vive que chacun perdrait devrait bien être récupérée sous une forme ou sous une autre.

Erratum. — Dans l'article cité: *Archives* (V), 7 (1925), à la page 176, au lieu de $h_J = 96$ km, lisez $h_J = 92,8$ km. — 96 km représentent la hauteur totale $h_E + h_J$.

R. W.