

Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles
Band: 7 (1925)

Artikel: À propos du problème des marées : une généralisation du problème des courbes de Lissajous
Autor: Tiercy, G.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-740696>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 07.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

A PROPOS DU PROBLÈME DES MARÉES

UNE GÉNÉRALISATION DU PROBLÈME DES COURBES DE LISSAJOUS

PAR

G. TIERCY

1. — L'étude des marées revient à celle des petites oscillations d'un système mécanique d'un très grand nombre de particules autour de sa position d'équilibre stable, sous l'influence de forces perturbatrices périodiques. On est alors conduit, pour les petites oscillations propres d'un tel système, et avec les approximations voulues, aux n équations suivantes:

$$\sum_{i=1}^n (\varepsilon''_{ik} u_i'' + \varepsilon'_{ik} u_i' + \varepsilon_{ik} u_i) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

où les u_i sont n variables restant extrêmement petites, et où les quantités ε''_{ik} , ε'_{ik} , et ε_{ik} sont des constantes, liées aux coefficients numériques de la fonction H donnant les équations de Lagrange dans le mouvement relatif du système ¹.

On obtient la solution des équations (1) en posant:

$$u_i = a_i e^{lt},$$

et l'on cherche à déterminer les valeurs de l et des a_i , qui per-

¹ H. POINCARÉ, *Leçons de mécanique céleste*, tome III, Gauthier-Villars, 1910. — H. RESAL, *Traité élémentaire de mécanique céleste*, Gauthier-Villars, 1884.

mettront de vérifier les équations (1); celles-ci s'écrivent alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{lt} \sum_{i=1}^n a_i (\varepsilon_{ik}'' l^2 + \varepsilon_{ik}' l + \varepsilon_{ik}) = 0, \quad \text{d'où :} \\ \sum_{i=1}^n a_i (\varepsilon_{ik}'' l^2 + \varepsilon_{ik}' l + \varepsilon_{ik}) = 0; \end{array} \right. \quad (2)$$

en posant :

$$\varepsilon_{ik}'' l^2 + \varepsilon_{ik}' l + \varepsilon_{ik} = C_{ik},$$

on a plus rapidement :

$$\sum_{i=1}^n a_i C_{ik} = 0$$

On a donc $(n + 1)$ inconnues, l et les a_i ; pour les trouver on dispose des n équations homogènes (2); il faut que le déterminant de ces équations soit nul :

$$\|C_{ik}\| = 0 \quad \text{ou} \quad \varphi(l) = 0; \quad (3)$$

c'est là une équation de degré $2n$ en l ; on sait que les racines en sont purement imaginaires; et l'on a :

$$\varphi(l) = \varphi(-l),$$

comme on s'en aperçoit vite en permutant dans $\varphi(l)$ les indices i et k et en remplaçant l par $(-l)$.

Cela revient à dire que l'équation (3) est de degré n en (l^2) , et que les n solutions (l^2) sont essentiellement négatives.

Chacune des solutions de (3), portée dans les équations (2), conduira à un système de valeurs des a_i ; posons que, pour la valeur l_j , on tire de (2) les valeurs $a_{i,j}$; la solution correspondante du problème des oscillations propres du système mécanique est donc donnée par les expressions :

$$u_{ij} = a_{ij} e^{l_j t}; \quad (4)$$

à la solution $(-l_j)$ de (3) correspondra l'oscillation propre harmonique :

$$v_{ij} = b_{ij} e^{-l_j t}, \quad (4')$$

imaginaire conjuguée de (4); la somme de (4) et (4') donnera une oscillation propre harmonique réelle du système.

Rappelons que les a_{ij} sont proportionnels aux mineurs $D_{ik}(l_j)$ du déterminant $\varphi(l)$; c'est-à-dire que le quotient $\frac{a_{ij}}{D_{ik}(l_j)}$ est indépendant de i . De même, on trouve que le quotient $\frac{b_{kj}}{D_{ik}(l_j)}$ est indépendant de k .

2. — Si l'on considère les quantités u_i comme les coordonnées d'un point dans un espace \mathcal{E}_n à n dimensions, on a n équations homogènes (2) en u_i ; et la condition pour que la solution du problème existe est que le déterminant $\varphi(l)$ soit nul.

Avec chacune des solutions l_j de $\varphi(l) = 0$, les équations (2) se réduisent à $(n - 1)$ équations entre les variables u_{ij} ; on trouve donc une variété linéaire en u_{ij} ou droite dans l'espace \mathcal{E}_n ; ainsi, la solution correspondante du problème mécanique donne, en traduction dans \mathcal{E}_n , une trajectoire rectiligne, la loi du mouvement du point sur cette trajectoire étant fournie par (4).

Cela revient à dire qu'on ne connaît les u_{ij} qu'à un facteur près.

Comme, d'une façon générale, les racines de $\varphi(l) = 0$ sont distinctes, on obtient, pour les solutions géométriques dans \mathcal{E}_n , $2n$ droites imaginaires issues de l'origine, sur chacune desquelles s'effectue un mouvement de point défini par (4).

3. — Qu'arrive-t-il si l'une des valeurs l_j est solution double de l'équation $\varphi(l) = 0$?

On sait que, analytiquement, il y a deux éventualités:

a) Si les mineurs D_{ik} de $\varphi(l)$ ne s'annulent pas tous pour $l = l_j$, les équations (2) admettent une solution de la forme:

$$u_{ij} = a_{ij} e^{l_j t} (At + B), \quad (5)$$

où A et B sont des constantes arbitraires;

b) Si tous les mineurs D_{ik} s'annulent pour $l = l_j$, les a_{ij} , donc les u_{ij} , pourront s'exprimer linéairement en fonction de deux d'entre elles prises arbitrairement; autrement dit, les équations (2) se réduisent à $(n - 2)$ équations distinctes.

On démontre ¹ facilement que les conditions mécaniques auxquelles le problème est soumis ne permettent de prendre en considération que l'hypothèse (b).

Quelle est alors la solution du problème dans la traduction géométrique dans l'espace \mathcal{E}_n ?

On cherche un lieu géométrique en u_{ij} répondant aux équations (2); il existe si $\varphi(l) = 0$, cette équation ayant $2n$ racines imaginaires pures, conjuguées deux à deux. Si l_j est racine double, les mineurs D_{ik} eux aussi sont nuls, et les équations (2) se réduisent à $(n - 2)$. La solution géométrique dans \mathcal{E}_n n'est donc plus un axe, mais une infinité d'axes situés dans un plan et passant par l'origine; deux des u_{ij} , donc deux des a_{ij} , peuvent être choisies arbitrairement. La loi du mouvement du point représentatif, sur l'un ou l'autre de ces axes, est toujours donnée par les relations (4).

4. — *Remarques:* a) Le problème de géométrie dans \mathcal{E}_n représenté par les équations (2) admet toujours, comme solution correspondant à toute racine l_j de $\varphi(l) = 0$, au moins un axe immobile; cela, quelle que soit la parité de n . On n'a donc pas affaire à la recherche des éléments immobiles dans une rotation simple autour de l'origine; car, dans ce dernier cas, l'axe de rotation immobile n'existe que si n est impair ².

b) Si l_j est solution double de $\varphi(l) = 0$, on est conduit à un plan immobile, quel que soit le nombre n . Le problème de géométrie (2) n'est donc pas la recherche des éléments immobiles dans une rotation simple; en effet, dans une rotation dans l'espace \mathcal{E}_n , il ne peut y avoir de plan immobile que si n est pair; si n est impair, il y a toujours un axe immobile.

5. — *Interprétation géométrique des équations (2) dans \mathcal{E}_n .* Supposons que, partant d'un système de coordonnées rectangulaires u_i , on effectue une certaine transformation de coordonnées, qu'on demande quels sont les points qui, dans cette

¹ H. POINCARÉ, *loc. cit.*

² G. TIERCY, *Sur les déplacements dans l'espace à n dimensions*, Kundig, 1915.

transformation, répondent à une certaine condition et que la réponse soit fournie par les $2n$ solutions du système (2).

Supposons par exemple qu'on applique aux points de \mathcal{E}_n la rotation suivante :

$$U_k = \frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_{ik} u_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \varepsilon_{ik}^2}} . \quad (6)$$

On demande alors quels sont les points qui, une fois cette rotation effectuée, occuperont une position identique à celle qu'ils iraient occuper si on les soumettait à la transformation linéaire suivante :

$$U_k = - \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \varepsilon_{ik}^2}} \cdot \sum_{i=1}^n (\varepsilon_{ik}'' l^2 + \varepsilon_{ik}' l) u_i , \quad (6')$$

où l est une indéterminée.

Egalant les seconds membres de (6) et (6'), on obtient le système des équations (2). Et l'on a trouvé que $2n$ axes de \mathcal{E}_n répondent à la condition posée.

On vérifie ici, aisément, que les directions trouvées doivent être conjuguées deux à deux. En effet, si l'on remplace l_j par $(-l_j)$, les nouveaux coefficients $(\varepsilon_{ik}'' l_j^2 - \varepsilon_{ik}' l_j)$ de (6') sont respectivement les quantités conjuguées des anciens coefficients $(\varepsilon_{ik}'' l_j^2 + \varepsilon_{ik}' l_j)$; et comme le résultat du calcul (6') ne doit pas changer et doit rester égal à celui du calcul (6), il faut bien que les nouvelles coordonnées v_{ij} de la solution soient respectivement les imaginaires conjuguées des u_{ij} . Autrement dit, les coefficients b_{ij} de (4') sont bien les imaginaires conjuguées des coefficients a_{ij} de (4).

6. — Considérons les $2n$ axes imaginaires, solutions des équations (2).

Deux directions imaginaires conjuguées, correspondant aux valeurs l_j et $(-l_j)$ de l , peuvent toujours être considérées comme deux des droites invariables dans une certaine rotation autour

de l'origine; en désignant par $(u_{ij})_I$ et $(v_{ij})_I$ les nouvelles coordonnées d'un point après cette rotation, on aurait:

$$\left\{ \begin{array}{ll} (u_{ij})_I = \rho_j u_{ij} & \text{ou} \quad (a_{ij})_I = \rho_j a_{ij} , \\ (v_{ij})_I = \rho'_j v_{ij} & \text{ou} \quad (b_{ij})_I = \rho'_j b_{ij} . \end{array} \right.$$

Dans ce cas, ρ_j et ρ'_j sont, non seulement imaginaires conjugués, mais encore inverses l'un de l'autre¹; cela entraîne la relation:

$$\rho_j \rho'_j - 1 = 0 ; \quad (7)$$

on a d'ailleurs toujours, dans une telle rotation¹:

$$(\rho_j \rho'_j - 1) \left(\sum_{i=1}^n u_{ij} v_{ij} \right) = 0 ; \quad (8)$$

et comme les directions en question sont imaginaires conjuguées, la somme $\sum u_{ij} v_{ij}$ ne peut pas être nulle; il faut donc bien que: $\rho_j \rho'_j - 1 = 0$.

Les directions correspondant à l_j et $(-l_j)$ ne sont donc jamais perpendiculaires l'une à l'autre.

On en dira autant des directions dues à tout autre couple de valeurs conjuguées, l_k et $(-l_k)$, solutions de $\varphi(l) = 0$.

Si maintenant on considère les directions correspondant à l_j et l_k , ou à l_j et $(-l_k)$, on aura:

$$\rho_j \rho_k - 1 \neq 0 \quad \text{et} \quad \rho_j \rho'_k - 1 \neq 0 .$$

Deux cas peuvent alors se présenter; ou bien les directions ρ_k et ρ'_k d'une part, ρ_j et ρ'_j d'autre part, restent immobiles dans la même rotation auxiliaire; ou bien il faut des rotations auxiliaires différentes. Si la rotation est la même, on aura, à cause de (8):

$$\sum u_{ij} u_{ik} = 0 , \quad \sum u_{ij} v_{ik} = 0 ,$$

et les directions d'indice k seront perpendiculaires aux directions d'indice j .

Si les rotations auxiliaires (j) et (k) ne sont pas identiques,

¹ G. TIERCY, *loc. cit.*

la relation (8) n'est plus valable; et les directions d'indice k ne seront pas perpendiculaires aux directions d'indice j .

Le plan de deux directions imaginaires conjuguées est réel; la résolution des équations (2), en traduction géométrique dans \mathcal{E}_n , conduit donc à n plans réels; ajoutons, en passant, que ces plans, en général, ne sont pas complètement perpendiculaires¹ les uns aux autres.

7. — Un cas très important du point de vue mécanique est celui où l'équation $\varphi(l) = 0$ admet la racine $l = 0$; c'est alors une racine d'un ordre pair de multiplicité, à cause de la forme de $\varphi(l)$.

On montre aisément que les solutions du problème sont de la forme²:

$$u_i = \alpha_i t + \beta_i,$$

où α_i et β_i sont des constantes. D'ailleurs, on peut prendre les variables u_i de telle sorte que les unes définissent la surface extérieure de la mer, tandis que les autres donnent la position des molécules à l'intérieur de cette surface; désignons les premières par u_a et les secondes par u_b ; on sait qu'il arrive en outre que les u_a se réduisent à des constantes; la surface extérieure est donc invariable, ou plutôt modifiée d'une façon constante; à l'intérieur, il existe des courants continus, puisque:

$$u_b = \alpha_b t + \beta_b.$$

C'est ce qui arrive dans les marées statiques (première sorte avec $\alpha_b = 0$; deuxième sorte avec $\alpha_b \neq 0$).

Que donne la représentation géométrique de la solution dans \mathcal{E}_n ?

Puisque $l = 0$ est une racine d'un ordre pair de multiplicité, double au moins, les équations (2) représentent, dans \mathcal{E}_n , un plan fixe ou un « $2i$ -plan » fixe. Mais comme les u_a sont des constantes, le plan en question sera contenu dans une variété li-

¹ G. TIERCY, *loc. cit.*

² H. POINCARÉ, *loc. cit.*

néaire d'ordre inférieur à n , et parallèle à celle déterminée par les axes d'indices b .

Dans les marées statiques de première sorte, où $u_b = \text{const.}$, la solution géométrique se réduit à un seul point fixe dans \mathcal{E}_n .

8.— *Solution générale des oscillations propres.* La solution générale du problème mécanique est fournie par l'expression:

$$u_i = \sum_{j=1}^n A_j u_{ij} + \sum_{j=1}^n B_j v_{ij} ; \quad (9)$$

les constantes A_j et B_j sont imaginaires conjuguées; elles présentent donc 2 constantes arbitraires, qui sont déterminées par les conditions initiales (lesquelles exigent en effet qu'on dispose, au total, de $2n$ constantes arbitraires).

Les termes $A_j u_{ij}$ et $B_j v_{ij}$ donnent ensemble un mouvement harmonique propre sur une trajectoire rectiligne Λ_j de \mathcal{E}_n , droite située dans le plan réel des solutions u_{ij} et v_{ij} ; la période de cette oscillation est $\frac{2\pi\sqrt{-1}}{l_j}$. La solution générale (9) est donc la composition de n mouvements oscillatoires périodiques propres, s'effectuant respectivement sur n droites fixes Λ_j , issues de l'origine.

On trouve donc là la généralisation d'un problème classique de cinématique plane et de physique: la recherche des courbes de LISSAJOUS. On sait assez combien le dessin de ces courbes est compliqué, même dans la géométrie plane correspondant à la physique de deux diapasons perpendiculaires, lorsque les conditions d'amplitudes, de périodes et de phases sont quelconques.

Il est évident, d'ailleurs, qu'on pourrait remplacer les composantes s'effectuant sur les droites Λ_j par des composantes agissant respectivement sur les n axes d'une équilibasse orthogonale de \mathcal{E}_n .

9. — *Influence du frottement sur les marées.* Les quantités l_j correspondant aux oscillations propres ne seront plus purement imaginaires; elles auront une partie réelle, d'ailleurs petite, et essentiellement négative, car l'énergie de l'oscillation

est décroissante. Par conséquent, les termes représentant des oscillations propres finissent par disparaître, puisque les marées existent depuis fort longtemps. Il ne restera plus à considérer que les termes correspondant à une influence extérieure; ils obéissent à des équations du type suivant:

$$\sum_{i=1}^n (\varepsilon''_{ik} u''_i + \varepsilon'_{ik} u'_i + \varepsilon_{ik} u_i) = K_k e^{\lambda t},$$

où λ est purement imaginaire et caractérise la période de la force perturbatrice; les termes de la solution sont de la forme:

$$u_i = \mu_i e^{\lambda t}. \quad (10)$$

Si on a à considérer plusieurs forces extérieures, la solution sera:

$$u_i = \sum \mu_{im} e^{\lambda_m t}, \quad (11)$$

où les λ_m sont connus.

Les termes de la forme (10) définissent dans \mathcal{E}_n un mouvement de point; c'est un mouvement oscillatoire simple, s'effectuant sur une certaine droite. Avec l'expression (11), on fait la composition de plusieurs mouvements oscillatoires simples, dont chacun est exécuté sur une droite particulière de \mathcal{E}_n . On retrouve donc le problème généralisé des courbes de Lissajou; le frottement produira simplement une diminution légère de l'amplitude, et un faible décalage de l'oscillation contrainte du « point résultant » dans \mathcal{E}_n .