

Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 8 (1926)

Artikel: L'ellipsoïde fluide hétérogène en rotation et la théorie des dérives continentales
Autor: Dive, Pierre
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-742395>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 04.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

L'ellipsoïde fluide hétérogène en rotation

ET

LA THÉORIE DES DÉRIVES CONTINENTALES

PAR

Pierre DIVE

Jusqu'ici les études sur l'ellipsoïde fluide hétérogène en rotation avaient pour but essentiel la détermination de la forme d'équilibre des corps célestes et spécialement de celle de la Terre.

La théorie des translations continentales de M. Wegener vient de leur donner un nouvel intérêt. Et c'est dans l'intention d'apporter une modeste contribution à cette théorie que nous avons repris ces recherches.

I. L'ATTRACTION DES MASSES

ET LES SURFACES DE NIVEAU DU FLUIDE.

Nous admettons que le fluide considéré est formé d'une infinité de couches ellipsoïdales minces, homogènes, dont la densité croît quand on s'approche du centre.

Les mesures géodésiques ayant prouvé que la Terre est très sensiblement un ellipsoïde de révolution, nous poserons en *hypothèse fondamentale* que les couches envisagées ont cette forme. D'ailleurs, les corps de révolution semblent, en première approximation au moins, être seuls réalisés dans le système planétaire.

Le problème que nous nous proposons de résoudre est alors le suivant :

Chercher sous quelles conditions la rotation imprimée aux molécules du fluide peut conserver aux couches leur forme ellipsoïdale.

Pour cela, nous exprimerons que chacune d'elles est une surface de niveau, c'est-à-dire une surface dont tous les points sont à la même pression¹; et cela revient à écrire, d'après l'équation fondamentale de l'hydrodynamique :

$$\frac{1}{\rho} dp = Xdx + Ydy + Zdz ,$$

que la résultante X, Y, Z de l'attraction des masses et de la force centrifuge agissant sur une molécule est normale à la couche sur laquelle on considère cette molécule².

§ 1. *Les composantes de l'attraction des masses en un point.*

Cette attraction est la résultante des actions de toutes les couches minces sur le point matériel considéré. Nous calculerons donc l'action différentielle d'une couche ellipsoïdale mince homogène en un point; puis nous « sommerons » les actions de toutes les couches en ce point.

A cet effet, nous chercherons d'abord les composantes de l'attraction produite en un point par une couche d'épaisseur finie, homogène, de densité ρ , comprise entre deux ellipsoïdes (E_1) et (E_2) concentriques et semblablement orientés.

¹ Nous étendons éventuellement la définition du terme *surface de niveau* au cas général d'un fluide animé de mouvements intérieurs.

² En suivant notre méthode, que nous avons tenu à pousser aussi loin que possible, nous avons retrouvé quelques résultats déjà obtenus par M. VÉRONNET, dans sa thèse : *Rotation de l'ellipsoïde hétérogène et figure exacte de la Terre*, Gauthier-Villars, Paris, 1912. Cependant, nous devons signaler que la formule 14 de cette thèse se trouve être en contradiction avec certains points de notre discussion sur la variation de la vitesse angulaire du fluide en fonction de la latitude et de la profondeur, dans les différents cas possibles d'aplatissement des couches; discussion qui est nouvelle à notre connaissance. (Cf. notre note à la Société de physique et d'histoire naturelle de Genève, *Archives* (5), 8, suppl. N° 2, avril-juillet 1926.)

1. Les formules donnant les composantes de l'attraction d'un ellipsoïde homogène en un point (x, z) *intérieur* à cet ellipsoïde sont ¹:

$$\begin{aligned} X_i &= -2\pi\rho f \cdot \frac{1+k^2}{k^3} \left(\operatorname{arctg} k - \frac{k}{1+k^2} \right) x, \\ Z_i &= -4\pi\rho f \cdot \frac{1+k^2}{k^3} (k - \operatorname{arctg} k) z, \end{aligned}$$

k désignant toujours le rapport $\frac{c}{b}$ relatif à la méridienne de l'ellipsoïde.

Si le point agi est *extérieur*, les composantes de l'attraction sont données par les formules analogues aux précédentes:

$$\begin{aligned} X_e &= -2\pi\rho f \cdot \frac{1+k^2}{k^3} \left(\operatorname{arctg} s - \frac{s}{1+s^2} \right) x, \\ Z_e &= -4\pi\rho f \cdot \frac{1+k^2}{k^3} (s - \operatorname{arctg} s) z; \end{aligned}$$

mais dans lesquelles s désigne le rapport $\frac{c}{b'}$ relatif à l'ellipsoïde passant au point (x, z) et homofocal de l'ellipsoïde massif; s est donc une fonction de b, x et z ².

Nous poserons, pour abréger l'écriture:

$$\begin{aligned} j &= \frac{1+k^2}{k^3}, \\ \Phi &= 2\pi f \left(\operatorname{arctg} k - \frac{k}{1+k^2} \right), \\ \Psi &= 4\pi f (k - \operatorname{arctg} k), \\ \Phi(s) &= 2\pi f \left(\operatorname{arctg} s - \frac{s}{1+s^2} \right), \\ \Psi(s) &= 4\pi f (s - \operatorname{arctg} s). \end{aligned}$$

¹ Le potentiel d'où dérivent les forces d'attraction d'un ellipsoïde massif a été obtenu par Chasles en décomposant cet ellipsoïde en une infinité de couches minces (*homôïdes*) comprises entre des ellipsoïdes concentriques et homothétiques infiniment voisins, et en sommant les actions de ces couches sur un même point matériel.

² Plus loin, (n° 10), nous définirons implicitement cette fonction.

2. Les composantes de l'attraction de la couche $(\Delta E) = (E_1) - (E_2)$ en un point *intérieur* s'écriront alors simplement:

$$(i) \quad \begin{cases} \Delta X = X_1 - X_2 = \rho (j_2 \Phi_2 - j_1 \Phi_1) x = \rho \Delta_1^2 (j \Phi) x , \\ \Delta Z = Z_1 - Z_2 = \rho (j_2 \Psi_2 - j_1 \Psi_1) z = \rho \Delta_1^2 (j \Psi) z , \end{cases}$$

Le symbole Δ désignant, selon la notation habituelle, un accroissement fini.

Si le point agi est *extérieur*, on aura de même:

$$(e) \quad \begin{cases} \Delta X = X_1 - X_2 = \rho \Delta_1^2 [j \Phi(s)] x , \\ \Delta Z = Z_1 - Z_2 = \rho \Delta_1^2 [j \Psi(s)] z . \end{cases} \quad \left(s = \frac{c}{b'} \right)$$

3. Pour passer au cas d'une couche infiniment mince, il suffit de remplacer, dans les formules précédentes, Δ par le symbole différentiel d ; les composantes de l'attraction deviennent donc dans ce cas:

$$(i') \quad \begin{cases} dX = \rho d(j \Phi) x , \\ dZ = \rho d(j \Psi) z , \end{cases}$$

en un point *intérieur*, et:

$$(e') \quad \begin{cases} dX = \rho d[j \Phi(s)] x , \\ dZ = \rho d[j \Psi(s)] z , \end{cases}$$

en un point *extérieur*.

4. Ceci posé, pour obtenir les composantes de l'attraction totale de l'ellipsoïde hétérogène en un point de sa masse, nous remarquerons qu'en vertu de nos hypothèses physiques, *une seule couche passe en un point déterminé* et que, par suite, l'ensemble des méridiennes des différentes couches constitue une famille de courbes dépendant d'un seul paramètre. Le choix de ce paramètre est *a priori* indifférent. Par exemple, il peut paraître simple d'adopter le paramètre k qui figure seul dans les formules (i'); nous ne le ferons pas, car nous ignorons si ce

paramètre varie toujours dans le même sens quand on passe d'une couche à la suivante en s'enfonçant à l'intérieur du fluide, et parce que nous ne savons pas non plus si ce paramètre a une limite quand on s'approche du centre. Nous éviterons aussi de choisir le grand axe des ellipses méridiennes puisque, dans ces mêmes conditions, nous ne connaissons pas la limite vers laquelle il tend (les ellipsoïdes étant aplatis, cette limite peut être nulle ou différente de zéro).

Le choix de l'axe polaire b , pour caractériser une ellipse de la famille, ne présente aucune de ces difficultés; nous nous y arrêterons. Dès lors, le grand axe a , le rapport k et tous les éléments de cette ellipse sont des fonctions de b :

$$a = a(b) , \quad k = k(b) .$$

5. Considérons maintenant un point (x, z) situé à l'intérieur du fluide sur une couche β .

Les composantes de l'attraction totale en ce point s'obtiendront en faisant séparément, suivant chacun des axes ox et oz , la somme des composantes des actions élémentaires de toutes les couches de l'ellipsoïde hétérogène.

Par suite, les composantes de l'attraction du fluide au point (x, z) s'écriront, au moyen des formules (i') et (e'):

$$X_{\beta} = \left\{ \int_{b_1}^{\beta} \rho d(j\Phi) + \int_{\beta}^0 \rho d[j\Phi(s)] \right\} x , \quad (2)$$

$$Z_{\beta} = \left\{ \int_{b_1}^{\beta} \rho d(j\Psi) + \int_{\beta}^0 \rho d[j\Psi(s)] \right\} z , \quad (3)$$

b_1 désignant l'axe polaire de la couche superficielle.

§ 2. Equation exprimant que les couches du fluide sont des surfaces de niveau.

6. Conformément à ce que nous avons dit au début de cette étude, nous obtiendrons cette équation en exprimant que le travail élémentaire de la pesanteur (résultante de l'attraction et de la force centrifuge) agissant sur un point d'une quelconque

(β) de ces couches est identiquement nul pour un déplacement virtuel effectué sur elle.

Sans faire aucune hypothèse sur la constance de la vitesse angulaire de rotation ω_β à la surface de la couche (β), cette condition s'écrit :

$$\left\{ \int_{b_1}^{\beta} \rho d(j\Phi) + \int_{\beta}^0 \rho d[j\Phi(s)] + \omega_\beta^2 \right\} x dx + \left\{ \int_{b_1}^{\beta} \rho d(j\Psi) + \int_{\beta}^0 \rho d[j\Psi(s)] \right\} z dz \equiv 0 . \quad (4)$$

II. VITESSE ANGULAIRE D'UN POINT D'UNE COUCHE β .

§ 1. Expression de cette vitesse.

7. Soient α et β le demi-grand axe et le demi-petit axe d'une ellipse de la famille des méridiennes de niveau. L'équation :

$$\frac{x dx}{\alpha^2} + \frac{z dz}{\beta^2} = 0 , \quad (5)$$

obtenue en différentiant l'équation générale des ellipses de cette famille, doit être satisfaite, en même temps que l'équation (4), pour des valeurs non nulles de dx et dz . Pour cela il est nécessaire et suffisant que le déterminant :

$$\begin{vmatrix} \int_{b_1}^{\beta} \rho d(j\Phi) + \int_{\beta}^0 \rho d[j\Phi(s)] + \omega_\beta^2 & \frac{1}{\alpha^2} \\ \int_{b_1}^{\beta} \rho d(j\Psi) + \int_{\beta}^0 \rho d[j\Psi(s)] & \frac{1}{\beta^2} \end{vmatrix}$$

soit égal à zéro.

En posant $\tau^2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2} - 1$, cette condition peut s'écrire :

$$\omega_\beta^2 = \int_{b_1}^{\beta} \rho d \left[j \left(\frac{\Psi}{1 + \tau^2} - \Phi \right) \right] + \int_{\beta}^0 \rho d \left\{ j \left[\frac{\Psi(s)}{1 + \tau^2} - \Phi(s) \right] \right\} . \quad (6)$$

Le deuxième membre ne contient x et z que par l'intermédiaire de s ; x et z étant d'ailleurs liés entre eux et à β par la relation $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{z^2}{\beta^2} = 1$ qui permet d'exprimer l'une de ces variables en fonction de l'autre. On voit ainsi que ω_β ne dépend en définitive que de β et de l'une ou l'autre des variables x et z .

La formule (6) donne donc la vitesse angulaire ω_β dont doivent être animés tous les points d'un même parallèle ou zone mince de la surface (β) pour que ces points demeurent sur cette surface.

§ 2. Nouvelle expression de la vitesse angulaire.

La distribution des vitesses des différentes molécules du fluide étant supposée réalisée de manière à conserver aux couches leur forme ellipsoïdale, nous nous proposons maintenant d'étudier les variations de la vitesse angulaire ω d'un point matériel en fonction de sa latitude et de sa profondeur.

8. Pour faire cette discussion, il est commode de transformer la formule (6) de la façon suivante.

Appliquons la formule d'intégration par parties aux deux intégrales du second membre:

$$\begin{aligned} \int_{b_1}^{\beta} \rho d \left[j \left(\frac{\Psi}{1 + \tau^2} - \Phi \right) \right] &= \left[\rho j \left(\frac{\Psi}{1 + \tau^2} - \Phi \right) \right]_{b=\beta} \\ &\quad - \left[\rho j \left(\frac{\Psi}{1 + \tau^2} - \Phi \right) \right]_{b=b_1} \\ &\quad - \int_{b_1}^{\beta} \rho' j \left(\frac{\Psi}{1 + \tau^2} - \Phi \right) db, \\ \int_{\beta}^0 \rho d \left\{ j \left[\frac{\Psi(s)}{1 + \tau^2} - \Phi(s) \right] \right\} &= \left\{ \rho j \left[\frac{\Psi(s)}{1 + \tau^2} - \Phi(s) \right] \right\}_{b=0} \\ &\quad - \left\{ \rho j \left[\frac{\Psi(s)}{1 + \tau^2} - \Phi(s) \right] \right\}_{b=\beta} \\ &\quad - \int_{\beta}^0 \rho' j \left[\frac{\Psi(s)}{1 + \tau^2} - \Phi(s) \right] db. \end{aligned}$$

Le terme:

$$\left\{ \rho j \left[\frac{\Psi(s)}{1 + \tau^2} - \Phi(s) \right] \right\}_{b=0}$$

est toujours nul. Pour s'en convaincre il suffit d'observer que les produits $\rho j \Psi(s)$ et $\rho j \Phi(s)$ sont précisément égaux aux composantes de l'attraction d'un ellipsoïde homogène de densité ρ , au point de coordonnées $x = -1$, $z = -1$, et que, par suite, ces produits doivent s'annuler lorsque, b tendant vers zéro, le volume, la masse et partant l'action exercée par cet ellipsoïde tendent simultanément vers zéro¹.

De plus, remarquons que la valeur de s pour $b = \beta$ est

¹ Analytiquement on peut donner la démonstration suivante:

Lorsque b tend vers zéro, nous distinguerons deux cas suivant que c tend ou ne tend pas vers zéro.

— Dans le premier cas, b' ne s'annulant pas, on est sûr, sans rien préjuger de la loi de variation de l'aplatissement, que le rapport $s = \frac{c}{b'}$ a pour limite 0. On peut donc, pour trouver la limite des produits $j \cdot \Psi(s)$ et $j \cdot \Phi(s)$, remplacer $\Psi(s)$ et $\Phi(s)$ par leur infiniment petit équivalent commun $\frac{4}{3} \pi f s^3 = \frac{4}{3} \pi f \frac{c^3}{b'^3}$; en tenant compte des égalités $j = \frac{1 + k^2}{k^3} = \frac{a^2 b}{c^3}$, on obtient ainsi l'expression:

$$\frac{4}{3} \pi f \frac{a^2 b}{b'^3},$$

qui, visiblement, s'annule pour $b = 0$.

— Lorsque c ne tend pas vers zéro, il tend nécessairement vers une *limite déterminée*. En effet, l'égalité $c^2 = a^2 - b^2$ montre que, pour $b = 0$, a et c se comportent de la même façon. Or a^2 étant essentiellement > 0 et décroissant constamment en même temps que b (ceci en raison de la signification physique des grandeurs a et b) a certainement une limite a_0^2 ; c'est aussi la limite de c^2 , elle est différente de 0, en vertu de l'hypothèse faite. Il en résulte que $k = \frac{c}{b}$ augmente indéfiniment, tandis que le rapport j tend vers zéro. Quant aux fonctions croissantes $\Psi(s)$ et $\Phi(s)$, elles sont bornées, puisque $s = \frac{c}{b'}$ reste fini; et cela suffit pour que les produits $j \Psi(s)$ et $j \Phi(s)$ aient encore pour limite zéro.

La densité $\rho(b)$ ne pouvant être infinie, on peut donc affirmer que le terme considéré est toujours nul quand $b = 0$.

précisément égale au rapport $\tau = \frac{\gamma}{\beta}$ ($\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$), et que, par suite :

$$\left\{ \rho j \left[\frac{\Psi(s)}{1 + \tau^2} - \Phi(s) \right] \right\}_{b=\beta} = \left\{ \rho j \left[\frac{\Psi}{1 + \tau^2} - \Phi \right] \right\}_{b=\beta}.$$

En posant :

$$\Upsilon(t) = \Phi(t) - \frac{\Psi(t)}{1 + \tau^2},$$

la formule (6) peut donc s'écrire simplement¹ :

$$\omega_{\beta}^2 = \rho_{1j1} \Upsilon_1 - \int_0^{\beta} \rho' j \Upsilon(s) db - \int_{\beta}^{b_1} \rho' j \Upsilon(k) db \quad (7)$$

9. *Remarque.* Il est aisé de reconnaître que le deuxième membre de cette équation est essentiellement positif ; en effet, nous avons admis que ρ' était négatif ; de plus, on s'assurera facilement que $\Upsilon(t)$ est une expression positive quel que soit t .

§ 3. Variation de la vitesse angulaire en fonction de la latitude.

10. Pour faire cette étude, nous choisirons comme variables indépendantes β et z .

Sur une couche déterminée (β), la latitude d'un point est alors uniquement fonction de sa cote z . Et le problème revient ainsi à étudier les variations de ω en fonction de z .

Pour cela, prenons la dérivée :

$$\frac{\partial \omega^2}{\partial z^2} = - \frac{\partial}{\partial z^2} \int_0^{\beta} \rho' j \Upsilon(s) db = \int_0^{\beta} - \rho' j \frac{\partial}{\partial z^2} \Upsilon(s) db. \quad (8)$$

¹ Une variable affectée de l'indice 1 désigne la valeur de cette variable pour $b = b_1$.

Puisque $\Upsilon(s)$ ne dépend de z que par l'intermédiaire de s , on a :

$$\frac{\partial}{\partial z^2} \Upsilon(s) = \frac{d}{ds} \Upsilon(s) \cdot \frac{\partial s}{\partial z^2} .$$

Pour calculer $\frac{\partial s}{\partial z^2}$ nous chercherons une relation entre s , β et z .

On a d'abord les deux équations :

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{z^2}{\beta^2} = 1 , \quad (9)$$

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{z^2}{b'^2} = 1 , \quad (10)$$

où a' et b' représentent les demi-axes de l'ellipse (b') homofocale de l'ellipse (b) et passant au point (x, z) . En posant, comme d'habitude, $1 + \tau^2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2}$, $1 + s^2 = \frac{a'^2}{b'^2}$ et en remarquant que $b' = \frac{c}{s}$, ces équations peuvent s'écrire :

$$\frac{x^2}{1 + \tau^2} + z^2 = \beta^2 , \quad (9')$$

$$\frac{x^2}{1 + s^2} + z^2 = \frac{c^2}{s^2} . \quad (10')$$

Enfin, l'élimination de x entre (9') et (10') donne la relation :

$$F(\beta, z, s) \equiv z^2 s^4 - (z^2 \tau^2 - \alpha^2 + c^2) s^2 - c^2 = 0 ; \quad (11)$$

τ et α étant des fonctions de β , nous avons ainsi défini s en fonction implicite de β et z .

11. Dans l'hypothèse actuelle β est constant, par suite :

$$\frac{\partial s}{\partial z^2} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial z^2}}{\frac{\partial F}{\partial s}} .$$

Or :

$$\frac{\partial F}{\partial z^2} = s^2 (s^2 - \tau^2) .$$

Et, en tenant compte de la relation (11), on a :

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{2}{s} (z^2 s^4 + c^2) .$$

D'où :

$$\frac{\partial s}{\partial z^2} = \frac{s^3}{2} \cdot \frac{(\tau^2 - s^2)}{(z^2 s^4 + c^2)} . \quad (12)$$

Le calcul de $\frac{d}{ds} \Upsilon(s)$ ne présente pas de difficulté; on trouve :

$$\frac{d}{ds} \Upsilon(s) = 4\pi f \xi^2 \cdot \frac{s^2}{(1 + s^2)^2} \cdot (\tau^2 - s^2) , \quad (13)$$

ξ^2 désignant, par abréviation, le rapport $\frac{1}{1 + \tau^2} = \frac{\beta^2}{\alpha^2}$.

Si l'on porte alors les expressions de $\frac{d}{ds} \Upsilon(s)$ et $\frac{\partial s}{\partial z^2}$ dans la formule (8) il vient :

$$\boxed{\frac{1}{2\pi f} \cdot \frac{\partial \omega^2}{\partial z^2} = \xi^2 \cdot \int_0^{\frac{\beta}{\alpha}} - \rho' \cdot \frac{1}{z^2 s^4 + c^2} \cdot \frac{s^5}{(1 + s^2)^2} \cdot (\tau^2 - s^2)^2 \cdot db} \quad (14)$$

— ρ' étant positif, cette intégrale est certainement positive ou nulle.

Par conséquent, sur une couche donnée, la vitesse angulaire de rotation croît en général constamment de l'équateur au pôle.

Elle ne peut être invariable que si l'on a :

$$\tau = s ;$$

et ceci exige que les couches soient réparties sur une famille d'ellipsoïdes homofocaux.

§ 4. Variation de la vitesse angulaire en fonction de la profondeur.

12. Pour que cette étude fût complète, il faudrait discuter la variation de la vitesse angulaire suivant un axe quelconque rencontrant toutes les couches. Cela nous conduirait à des expressions compliquées. Afin d'obtenir des formules simples et

commodes à interpréter, nous remarquerons que, la rotation ω_β ne dépendant que de β (caractérisant la couche) et de l'une ou l'autre des variables x et z , nous simplifierons notablement cette discussion en nous bornant à suivre la variation de ω_β le long d'un axe équatorial ox et le long de l'axe polaire oz .

Le problème à résoudre revient donc à celui de l'étude du signe de la dérivée de ω_β^2 , par rapport à β , successivement dans chacune des hypothèses suivantes:

$$\begin{aligned} z &= 0, \\ x &= 0. \end{aligned}$$

Bien qu'il ne soit pas permis d'étendre les résultats ainsi obtenus au cas où l'on étudierait les variations de ω_β le long d'un rayon vecteur quelconque, la comparaison de ces résultats avec ceux de la discussion précédente nous permettra de nous faire une idée assez précise du phénomène étudié pour l'application que nous en voulons faire à la théorie des translations continentales.

13. Sans préciser au préalable celle des variables x ou z que nous faisons égale à zéro, établissons l'expression générale de la dérivée de ω_β^2 par rapport à β .

On a:

$$\begin{aligned} \omega_\beta^2 &= \rho_1 j_1 \left(\Phi_1 - \frac{\Psi_1}{1 + \tau^2} \right) - \int_0^\beta \rho' j \left[\Phi(s) - \frac{\Psi(s)}{1 + \tau^2} \right] db \\ &\quad - \int_\beta^{b_1} \rho' j \left(\Phi - \frac{\Psi}{1 + \tau^2} \right) db. \end{aligned} \quad (7)$$

D'où, en appliquant la règle de différenciation sous le signe somme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_\beta^2}{\partial \beta} &= \frac{\rho_1 j_1 \Psi_1}{(1 + \tau^2)^2} \cdot \frac{d\tau^2}{d\beta} - \left\{ \rho' j \left[\Phi(s) - \frac{\Psi(s)}{1 + \tau^2} \right] \right\}_{b=\beta} \\ &\quad - \int_0^\beta \rho' j \left\{ \frac{d}{ds} \left[\Phi(s) - \frac{\Psi(s)}{1 + \tau^2} \right] \frac{\partial s}{\partial \beta} + \frac{\Psi(s)}{(1 + \tau^2)^2} \cdot \frac{d\tau^2}{d\beta} \right\} db \\ &\quad + \left\{ \rho' j \left[\Phi(k) - \frac{\Psi(k)}{1 + \tau^2} \right] \right\}_{b=\beta} - \int_\beta^{b_1} \rho' j \frac{\Psi(k)}{(1 + \tau^2)^2} \cdot \frac{d\tau^2}{d\beta} \cdot db. \end{aligned}$$

En remarquant que:

$$\left\{ \rho' j \left[\Phi(s) - \frac{\Psi(s)}{1 + \tau^2} \right] \right\}_{b=\beta} = \left\{ \rho' j \left[\Phi(k) - \frac{\Psi(k)}{1 + \tau^2} \right] \right\}_{b=\beta},$$

et en tenant compte des formules:

$$\Psi(t) = 4\pi f(t - \operatorname{arctg} t),$$

$$\xi^2 = \frac{1}{1 + \tau^2} = \frac{\beta^2}{\alpha^2},$$

$$\frac{d}{ds} \left[\Phi(s) - \frac{\Psi(s)}{1 + \tau^2} \right] = \frac{d}{ds} \Upsilon(s) = 4\pi f \xi^2 \frac{s^2}{(1 + s^2)^2} \cdot (\tau^2 - s^2), \quad (13)$$

il vient:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi f} \frac{\partial \omega_\beta^2}{\partial \beta} = \xi^4 & \left[\rho_1 j_1(k_1 - \operatorname{arctg} k_1) - \int_0^\beta \rho' j(s - \operatorname{arctg} s) db \right. \\ & \left. - \int_\beta^{b_1} \rho' j(k - \operatorname{arctg} k) db \right] \frac{d\tau^2}{d\beta} \\ & - \xi^2 \int_0^\beta \rho' j \frac{s^2}{(1 + s^2)^2} \cdot (\tau^2 - s^2) \frac{\partial s}{\partial \beta} db. \quad (15) \end{aligned}$$

Observons que:

$$\begin{aligned} \rho_1 j_1(k_1 - \operatorname{arctg} k_1) - \int_0^\beta \rho' j(s - \operatorname{arctg} s) db - \int_\beta^{b_1} \rho' j(k - \operatorname{arctg} k) db \\ = -\frac{1}{4\pi f} \left[\int_{b_1}^\beta \rho d[j\Psi(k)] + \int_\beta^0 \rho d[j\Psi(s)] \right] = -\frac{1}{4\pi f} \cdot \frac{Z_\beta}{z}. \end{aligned}$$

Si donc on pose:

$$Z_\beta = -4\pi f N z,$$

la quantité entre crochets de la formule (15) est précisément égale au coefficient N.

Finalement:

$$\frac{1}{4\pi f} \frac{\partial \omega_\beta^2}{\partial \beta} = \xi^4 \cdot N \cdot \frac{d\tau^2}{d\beta} - \xi^2 \int_0^\beta \rho' j \frac{s^2}{(1 + s^2)^2} \cdot (\tau^2 - s^2) \frac{\partial s}{\partial \beta} db. \quad (16)$$

Il nous reste à calculer maintenant l'expression de $\frac{\partial s}{\partial \beta}$ dans chacune des hypothèses précédemment distinguées.

§ 5. *Variation de la vitesse angulaire suivant un axe équatorial.*

14. Nous avons déjà établi la relation (11) définissant s en fonction implicite de β et z :

$$z^2 s^4 - (z^2 \tau^2 - \alpha^2 + c^2) s^2 - c^2 = 0. \quad (11)$$

En faisant $z = 0$, elle devient:

$$s^2(\alpha^2 - c^2) - c^2 = 0 \quad \text{ou} \quad s^2 = \frac{c^2}{\alpha^2 - c^2}. \quad (17)$$

α étant fonction de β , on a:

$$\frac{\partial s}{\partial \beta} = \frac{\partial s}{\partial \alpha} \cdot \frac{d\alpha}{d\beta}.$$

On tire de (17):

$$\frac{\partial s}{\partial \alpha} = -\frac{s^3}{c^2} \cdot \alpha.$$

Par suite:

$$\frac{\partial s}{\partial \beta} = -\frac{s^2}{c^2} \alpha \cdot \frac{d\alpha}{d\beta}.$$

Portant cette expression dans (16), il vient:

$$\frac{1}{4\pi f} \cdot \frac{\partial (\omega_z^2)_{z=0}}{\partial \beta} = \xi^4 N \frac{d\tau^2}{d\beta} - \xi^2 \alpha \frac{d\alpha}{d\beta} \int_0^3 - \rho' \cdot \frac{j}{c^2} \cdot \frac{s^5}{(1+s^2)^2} \cdot (\tau^2 - s^2) db$$

(18)

Dans cette équation, N est positif; en effet, ρ' étant négatif par hypothèse, il est visible que la quantité entre crochets de la formule (15) est positive. De plus, il résulte de la signification concrète des variables α et β que $\frac{d\alpha}{d\beta}$ est positif (remarque déjà faite pour a et b (n° 4)).

15. Ceci posé, pour discuter le signe du deuxième membre de (18), nous distinguerons les cinq cas suivants, comprenant certainement le cas réel du fluide terrestre:

16. PREMIER CAS. *L'aplatissement des couches croît du centre à la surface.*

On a donc :

$$\frac{d\tau^2}{d\beta} > 0 \quad \text{et} \quad \tau > s .$$

Les deux termes du second membre de (18) ont des signes contraires; une première analyse ne permet pas de connaître le signe de $\frac{\partial \omega_3^2}{\partial \beta}$.

La condition pour que la rotation demeure invariable le long de l'axe équatorial ox s'exprimerait par l'équation fonctionnelle en $\alpha = \alpha(\beta)$ et $\rho' = \rho'(\beta)$:

$$\xi^2 N \frac{d\tau^2}{d\beta} = \alpha \frac{d\alpha}{d\beta} \cdot \int_0^s - \rho' \cdot \frac{j}{c^2} \cdot \frac{s^5}{(1+s^2)^2} \cdot (\tau^2 - s^2) db ,$$

dans laquelle N dépend des fonctions α et ρ' et s désigne le rapport $\frac{c^2}{\alpha^2 - c^2}$.

D'ailleurs, lorsque l'aplatissement de la couche superficielle (b_1) est assez faible (et par suite, *a fortiori*, celui des couches intérieures) pour que l'on puisse négliger la quatrième puissance de la valeur k_1 de k , la variation de ω_3^2 de l'équateur au pôle est négligeable aussi, quel que soit β .

En effet, on reconnaîtra aisément que la quantité sous le signe somme de la formule (14) est inférieure à :

$$- \rho' \cdot \frac{j}{c^2} \cdot s^5 \cdot \tau^4 .$$

Or, cette expression peut s'écrire :

$$- \rho' \cdot \frac{a^2 b}{b'^5} \cdot \tau^4 ,$$

en tenant compte des relations $j = \frac{a^2 b}{c^3}$ et $s = \frac{c}{b'}$.

Si l'on observe alors qu'en vertu de l'hypothèse actuelle $k_1 > \tau$, et que, b' ne s'annulant jamais, le rapport $\frac{a^2 b}{b'^5}$ admet

certainement une limite supérieure M , on est sûr que le deuxième membre de (14) est inférieur à :

$$Mk_1^4 \int_0^{\beta} -\rho' db ,$$

et, par suite, inférieur *a fortiori* à la quantité :

$$M\rho(0) \cdot k_1^4 ;$$

$\rho(0)$ étant nécessairement fini, ce résultat établit la proposition énoncée.

L'état d'équilibre approché défini par Clairaut coïnciderait donc avec l'état actuellement envisagé.

17. DEUXIÈME CAS. *Les couches sont homothétiques.*

On a alors :

$$\frac{d\tau^2}{d\beta} = 0 \quad \text{et} \quad \tau > s ;$$

$\frac{\partial \omega_{\beta}^2}{\partial \beta}$ est négatif.

La rotation décroît du centre à la surface.

18. TROISIÈME CAS. *L'aplatissement décroît du centre à la surface moins vite que si les couches étaient homofocales.*

Cette fois :

$$\frac{d\tau^2}{d\beta} < 0 \quad \text{et} \quad \tau > s ;$$

$\frac{\partial \omega_{\beta}^2}{\partial \beta}$ est donc négatif.

La rotation décroît du centre à la surface.

19. QUATRIÈME CAS. *Les couches sont homofocales.*

On a encore :

$$\frac{d\tau^2}{d\beta} < 0 , \quad \text{mais} \quad \tau = s ;$$

La rotation décroît du centre à la surface.

On sait, d'ailleurs (11) que, dans ce cas, *chaque couche tourne d'un seul bloc*.

20. CINQUIÈME CAS. *L'aplatissement décroît du centre à la surface plus vite que si les couches étaient homofocales.*

Dans ce cas :

$$\frac{d\tau^2}{d\beta} < 0 \quad \text{et} \quad \tau < s.$$

Les deux termes du second membre de (18) ont des signes contraires; une première analyse ne nous permet donc pas de connaître le signe de $\frac{\partial \omega_p^2}{\partial \beta}$.

§ 6. Variation de la vitesse angulaire suivant l'axe polaire.

21. Si $x = 0$ ¹, les équations :

$$\frac{x^2}{1 + \tau^2} + z^2 = \beta^2, \quad (9')$$

$$\frac{x^2}{1 + s^2} + z^2 = \frac{c^2}{s^2}, \quad (10')$$

se réduisent à :

$$z^2 = \beta^2,$$

$$z^2 = \frac{c^2}{s^2},$$

¹ Ici, il convient de donner un mot d'explication.

Il peut paraître surprenant de chercher à étudier la variation de la vitesse angulaire le long de l'axe polaire, puisque de tous les points du fluide, ceux de l'axe de rotation sont les seuls qui restent immobiles. On doit entendre par rotation d'un point de cet axe la limite vers laquelle tend la rotation d'un point voisin, situé hors de cet axe, et qui s'approche indéfiniment du premier. A cause de la nature concrète et, par suite, de la continuité du phénomène étudié, cette limite existe certainement, quelle que soit la couche sur laquelle on considère le point.

Ajoutons enfin que, du point de vue physique, cette limite peut être envisagée comme étant la valeur de la rotation d'une molécule située sur l'axe polaire.

d'où l'on tire:

$$s = \frac{c}{\beta},$$

et:

$$\frac{\partial s}{\partial \beta} = -\beta \frac{s^3}{c^2}.$$

La formule (18) devient alors:

$$\frac{1}{4\pi f} \cdot \frac{\partial (\omega_\beta^2)_{x=0}}{\partial \beta} = \xi^4 \cdot N \cdot \frac{d\tau^2}{d\beta} - \xi^2 \beta \cdot \int_0^{\frac{\tau}{\beta}} \rho' \frac{J}{c^2} \cdot \frac{s^5}{(1+s^2)^2} \cdot (\tau^2 - s^2) db$$

(19)

22. $\frac{\partial (\omega_\beta^2)_{x=0}}{\partial \beta}$ s'exprime donc par une expression semblable à celle de $\frac{\partial (\omega_\beta^2)_{z=0}}{\partial \beta}$; mais s ne dépendant pas de b de la même manière dans ces deux expressions, *il faut bien se garder de confondre les N et les intégrales définies qui y figurent; ces quantités ne sont pas égales.*

Nous leur avons donné la même forme dans le seul but de conserver la symétrie des calculs et afin de pouvoir appliquer, immédiatement, à l'étude actuelle les résultats de la discussion précédente.

La vitesse angulaire varie donc dans le même sens le long d'un axe équatorial et le long de l'axe polaire.

Sauf, peut-être dans les deux cas extrêmes mentionnés, elle croît constamment de la surface au centre ¹.

23. Nous pouvons donc consigner, dans le tableau récapitulatif suivant, les résultats des deux discussions précédentes.

¹ Il est clair qu'un tel résultat ne peut être intelligible que dans le cas où les couches constituant le fluide sont réparties sur des *surfaces de révolution*.

Valeur relative de τ et de s	Signe de $\frac{d\tau^2}{d\beta}$	Sens de la variation de l'aplatissement	Sens de la variation de la vitesse angulaire
$\tau > s$	$\frac{d\tau^2}{d\beta} > 0$	L'aplatissement croît du centre à la surface (cas comprenant l'état d'équilibre approché défini par Clairaut).	On ne peut rien dire dans une première analyse sur le sens de la variation de ω_p^2 .
	$\frac{d\tau^2}{d\beta} = 0$	Les couches sont homothétiques	ω_p^2 décroît du centre à la surface.
	$\frac{d\tau^2}{d\beta} < 0$	L'aplatissement décroît du centre à la surface <i>moins vite</i> que si les couches étaient homofocales.	ω_p^2 décroît du centre à la surface.
$\tau = s$	$\frac{d\tau^2}{d\beta} < 0$	Les couches sont homofocales.	ω_p^2 décroît du centre à la surface.
$\tau < s$	$\frac{d\tau^2}{d\beta} < 0$	L'aplatissement décroît du centre à la surface <i>plus vite</i> que si les couches étaient homofocales.	On ne peut rien dire dans une première analyse sur le sens de la variation de ω_p^2 .

En résumé, on peut dire que la vitesse angulaire décroît constamment du centre à la surface et du pôle à l'équateur, sauf peut-être dans deux cas extrêmes dont l'un comprend le cas particulier de Clairaut.

* * *

DE LA VISCOSITÉ DU FLUIDE TERRESTRE.

Dans tous les calculs précédents, nous n'avons tenu aucun compte de la viscosité du fluide en rotation.

Tant qu'il ne s'agit que de la recherche d'une forme d'équilibre relatif, les équations de l'hydrostatique pour un fluide parfait sont applicables au cas d'un fluide visqueux. On sait, en effet, que cet équilibre ne peut être réalisé que lorsque tous les efforts intérieurs sont des pressions normales.

Mais les choses ne se passent plus aussi simplement dans le cas d'un fluide hétérogène. Les mouvements intérieurs, nécessaires à maintenir sa forme ellipsoïdale, provoquent l'intervention de forces dues au frottement des molécules les unes sur les autres ¹; et, de ce fait, la nature du problème se trouve changée.

On doit donc se demander dans quelle mesure il est encore possible d'appliquer, au cas réel de l'ellipsoïde terrestre visqueux, les résultats de l'étude sur l'ellipsoïde parfaitement fluide.

En fait, il semble bien que l'on soit en droit, sans trop s'écarter de la réalité, d'assimiler — dans la durée relativement courte d'une époque géologique — l'état des mouvements du fluide terrestre à un état de régime permanent où les forces de viscosité se détruiraient deux à deux.

Il suffirait d'admettre — et cette idée n'est pas éloignée de l'hypothèse de Marcel Bertrand — que les couches de Sima sont entraînées par frottement, de proche en proche, par la rotation du noyau central très dense et, par suite, doué d'une grande inertie ². De la sorte, le phénomène de l'accroissement de la vitesse de rotation avec la profondeur aurait une cause physique. Et l'on pourrait concevoir pour les couches de Sima un régime de mouvements voisin des régimes envisagés dans la théorie ou, si l'on préfère, un régime « tangent » à l'un de ceux-ci, et dans lequel les forces de viscosité n'auraient plus qu'une

¹ Rappelons que, d'après la théorie de la viscosité, ces forces sont de la forme:

$$\mathcal{F} = \eta \cdot \frac{dw}{dx} \cdot s ,$$

η désignant le coefficient de viscosité du fluide et $\frac{dw}{dx}$ le gradient de vitesse dans la direction normale au mouvement des couches, et s la surface de frottement.

² A ce propos, on consultera, avec intérêt, l'article de M. Rolin Wavre « Sur le mouvement (avec frottement) de deux sphères concentriques », *Archives* 7 (5), p. 133, 1925.

influence qu'il serait possible de négliger devant les attractions des masses ¹.

Pour cette raison, nous pensons qu'il est permis de considérer les conclusions de l'étude sur la rotation de l'ellipsoïde hétérogène, parfaitement fluide, comme qualitativement exactes dans l'application qu'on en peut faire à la théorie de M. Wegener.

Mais il était bon de rappeler la nécessité d'agir avec beaucoup de circonspection en cette matière et de montrer l'intérêt qu'il y aurait à reprendre ces calculs sur l'ellipsoïde hétérogène en y introduisant la notion de viscosité.

* * *

LES DÉRIVES CONTINENTALES.

Toutes réserves faites sur la possibilité d'étendre au globe terrestre visqueux les propriétés de l'ellipsoïde parfaitement fluide, il nous reste à dire comment l'étude théorique précédente apporte des éléments nouveaux pour la solution de certains problèmes que pose la théorie des translations continentales.

Certes, ces translations constituent un phénomène très complexe et, malgré la prédominance marquée de forces qui tendent à rapprocher les continents de l'équateur et à les faire dériver vers l'ouest, il subsiste encore dans leurs mouvements trop d'irrégularités pour qu'il soit possible de les coordonner tous, en les rattachant à un petit nombre de causes.

La question de la nature de la force translatrice vers l'équateur paraît aujourd'hui complètement élucidée après les récents travaux de MM. Wavre ² et Berner ³. Toutefois, il serait intéressant de reprendre le calcul de sa grandeur en utilisant nos dernières recherches. Il s'agirait notamment de voir si le fait de l'aug-

¹ Cf. LOVKASCHWITSCH, *Sur le mécanisme de l'écorce terrestre et l'origine des continents*, St Pétersbourg, 1910.

² (*Loc. cit.*)

³ R. BERNER, Thèse de doctorat. *Sur la grandeur de la force qui tendrait à rapprocher un continent de l'équateur*, Kundig, Genève, 1925.

mentation de l'aplatissement des couches avec la profondeur — état contraire à celui défini par Clairaut — ne permettrait pas de donner à cette force une valeur plus élevée¹.

L'idée d'attribuer la translation vers l'ouest des grands compartiments de la lithosphère à l'influence retardatrice des attractions des corps célestes est assurément fort ingénieuse en même temps que très naturelle. Et, en fait, en se basant sur la théorie de la précession, M. Schweydar a réussi à montrer l'existence d'une force importante capable de provoquer cette dérive.

Mais quel que soit le bien-fondé de cette hypothèse, il est certain qu'elle ne peut pas suffire à rendre compte de la diversité des mouvements des socles continentaux.

Afin d'expliquer les anomalies de l'intensité de la pesanteur, Helmert avait admis que le géoïde terrestre était un ellipsoïde à trois axes. Partant de là, M. Schweydar a essayé de prouver la possibilité de courants de Sima, en invoquant une différence de niveau hydrostatique entre le fond de l'océan Atlantique et celui de l'océan Indien :

« Un pareil état de chose ne peut subsister à la longue; le Sima aura tendance à couler pour rétablir l'équilibre de l'ellipsoïde de rotation. Etant donnée la faible différence de densité, c'est à peine si un courant peut se produire; mais il est possible que le tracé elliptique de l'équateur et les variations locales de la densité du Sima, de même que le courant qui en résulte aient été jadis plus marqués² ».

Comme on le voit, cette explication ne satisfait pas complètement M. Schweydar lui-même.

La remarque suivante de M. Wegener paraît, au contraire, projeter une lumière nouvelle sur les causes des dérives continentales :

« Il n'est pas nécessaire que ces renflements par lesquels la surface du globe dépasse son niveau d'équilibre se limitent à l'équateur;

¹ Nous n'ignorons pas cependant que M. Jeffreys, auteur d'un remarquable ouvrage « *The earth, its origin, history and physical constitution* » (The University Press, Cambridge, 1924), cherche une force translatrice dans une direction différente.

² SCHWEYDAR, *Bemerkungen zu WEGENERS. Hypothese der Verschiebung der Kontinente*, Zeitschr. der Ges. für Erdkunde zu Berlin. 1921.

ils peuvent apparaître à n'importe quel endroit. Nous avons montré plus haut à propos des relations entre les transgressions marines et les déplacements du pôle (*Chap. VIII*)¹ qu'il faut nous attendre à voir la surface terrestre occuper au-devant du pôle en marche un niveau trop élevé et derrière lui un niveau trop bas, ces écarts semblent confirmés par les faits géologiques. Ils s'élèvent à des valeurs semblables à celles qu'Helmert obtint pour la différence des axes de l'ellipse équatoriale ou peut-être doubles. Lors des migrations polaires rapides, la surface terrestre paraît en tout cas avoir dépassé son niveau d'équilibre de quelques centaines de mètres dans le sens positif ou négatif suivant que la région considérée est devant ou derrière le pôle. Le plus grand écart de niveau (ordre de grandeur: 1 km par quadrant terrestre) s'observerait à l'équateur sur le méridien sur lequel le pôle se déplace. Aux deux pôles il atteindrait une valeur presque aussi élevée. De ce fait, des forces sont mises en jeu qui entraînent les masses des régions trop hautes vers les régions trop basses. »

Ce qu'il serait intéressant de connaître, en particulier, ce sont les forces qui présidèrent à l'ouverture du bassin atlantique.

Sans nous arrêter à l'idée, aujourd'hui périmée, d'après laquelle un effondrement aurait pu créer une telle fosse, nous nous sommes demandé si l'on ne trouverait pas dans les conclusions de notre étude sur l'ellipsoïde hétérogène la raison de cette *déchirure* de l'écorce terrestre.

Ne doit-on pas, en effet, considérer l'accroissement en profondeur de la vitesse de rotation des couches de l'ellipsoïde fluide comme une cause possible de la dislocation des grands territoires de la lithosphère ? Car il est certain — puisque la partie immergée d'un socle continental est égale à vingt-neuf fois sa partie émergente — que la force d'entraînement, dirigée vers l'est, de ces couches visqueuses sera d'autant plus grande que le socle plongera plus profondément dans le Sima. Et c'est pourquoi il faut penser que les continents chargés de hautes montagnes doivent prendre, à la longue, une avance sensible sur les plateformes à faible relief. L'action retardatrice des influences lunisolaires pourra donc, dans certains cas, paraître très réduite; tout dépend du rapport qui existe entre la force propulsive du Sima et ces actions antagonistes.

¹ WEGENER, *La Genèse des continents et des Océans*, p. 99. A. Blanchard, Paris, 1924.

Si l'on adopte ces vues, la séparation de l'Europe et de l'Amérique s'explique aisément; il suffit d'admettre que l'Eurasie plonge dans le Sima des racines plus profondes que celles des Amériques. — Et cette idée est bien vraisemblable, à cause de la chaîne alpine, des hauts plissements du Caucase et de la gigantesque surrection himalayenne, surtout si l'on songe que les montagnes les plus élevées des socles américains ne sont dues qu'à la pression exercée par le Sima sur leur bord avançant, au cours de leur dérive vers l'ouest.

D'autres disjonctions de la croûte terrestre sont susceptibles de la même interprétation. Le long système de fractures de l'Est-Africain comprenant les lacs Nyassa, Tanganyka, Albert, en fournit un exemple qui retiendra l'attention. Sollicitée par les attractions cosmiques, l'Afrique tend à se détacher de ses compartiments orientaux supportant les lourds massifs du Kilima-Ndjaru et du Kénia. Il s'agit donc là d'une amorce de rupture de continent, signalée d'ailleurs par de nombreux séismes témoignant de l'activité actuelle des forces de dislocation.

Quant au phénomène de la variation de la vitesse angulaire des couches avec la latitude, ses effets sont, sans doute, moins sensibles. Il se pourrait cependant que, durant une période plus ou moins longue, cette variation ait été assez importante pour rendre compte de l'allure de certaines formations.

C'est ainsi que nous serions tenté de voir dans la torsion vers l'Est des extrémités des continents ¹ — torsion particulièrement accusée dans la Novaïa Zemlia et dans la Terre de feu — le fait de l'accroissement de la vitesse du Sima près des pôles.

Il appartient aux géologues d'entreprendre l'étude détaillée qui permettrait de confirmer ou d'infirmer ces hypothèses.

¹ Cf. par exemple, DE LAUNAY, *La Terre, sa structure et son passé*, p. 42, Payot, Paris, 1925.