Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 8 (1926)

Artikel: Construction de fonctionnelles automorphes
Autor: Wavre, R.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-742446

alors:

$$\int_0^1 (x-y)y^\alpha dy = \int_0^x (x-y)y^\alpha dy = \frac{x^{\alpha+2}}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \qquad \alpha > -1$$

et si

$$\varphi_0 = 1$$

on a

$$\varphi_1 = \sqrt{5}\,x^2\,, \qquad \varphi_2 = \sqrt{9}\,x^4\,, \qquad \varphi_3 = \sqrt{13}\,x^6\,,$$

$$\varphi_i = \sqrt{4i+1}\,x^{2i}$$

$$\int_0^1 \varphi_i(x)\,\varphi_{i+p}(x) = \frac{\sqrt{4i+1}\,\sqrt{4i+4p+1}}{4i+2p+1}$$

et

$$\lim_{p\to+\infty} \int_0^1 [\varphi_i(x) - \varphi_{i+p}(x)]^2 dx = 2 \qquad \text{quel que soit } i \text{ fixe.}$$

Il est impossible d'extraire des $\varphi_i(x)$ une suite qui converge en moyenne.

R. Wavre. — *Construction de fonctionnelles automorphes.*

Dans une note parue aux comptes rendus de l'Académie des Sciences (t. 182, p. 1317, séance du 31 mai 1926) j'ai construit des fonctionnelles automorphes relatives à un noyau symétrique de Fredholm.

Soient $N_n(y, x) = \Sigma \dfrac{\psi_i(x)\,\psi_i(y)}{\lambda_i^n}$ le noyau itéré d'ordre n d'un noyau symétrique et c_i les coefficients de Fourier d'une fonction $f_0(x)$, relatifs au système orthogonal $\psi_i(x)$. La fonction itérée d'ordre n, $f_n(x) = \int N_n(x, y) f_0(y) dy$ admet les coefficients $c_i\lambda_i^{-n}$; on peut convenir d'attribuer à n des valeurs non entières.

Soit alors F une fonction des seuls produits $c_i\lambda_i^m$ telle que l'intégrale

$$\Phi|f_0(x)| = \Phi(c_1, c_2, \ldots) = \int_{m=-\infty}^{+\infty} F(c_1\lambda_1^m, c_2\lambda_2^m, \ldots)\,dm$$

soit convergente. La fonctionnelle Φ est automorphe pour toute substitution $f_0 \to f_n$, quel que soit n; c'est-à-dire que l'on a

$$\Phi | f_0(x) | = \Phi | f_n(x) | .$$

Son domaine fondamental est l'hypersphère S: $\sum c_i^2 = 1$.

Je voudrais ici indiquer un procédé plus général que celui indiqué dans la note rappelée pour construire effectivement des fonctionnelles Φ.

Soient $x_i, y_i, z_i, u_i, \ldots$ des nombres tels que les séries suivantes convergent quel que soit m.

$$x = \sum_i x_i^2 c_i^2 \lambda_i^{2m}$$

$$y = \sum_i y_i^2 c_i^2 \lambda_i^{2m}$$

$$z = \sum_i z_i^2 c_i^2 \lambda_i^{2m}$$

$$u = \sum_i u_i^2 c_i \lambda_i^{2m}$$

puis $f(y, z, u, \ldots)$ une fonction telle que l'on ait

$$| f(y, z, u, \ldots) | \leq f(x, x, x, \ldots)$$

lorsque $x, y, z, u, \ldots$ ont les valeurs qui correspondent à une même valeur de m et telle de plus que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} f(x, x, x, \ldots)\, dx$$

ait un sens.

Alors la fonctionnelle

$$\Phi | f_0(x) | = \int_0^{+\infty} f(y, z, u, \ldots)\, dx = \int_{m=-\infty}^{+\infty} f(y, z, u, \ldots) \frac{dx}{dm} \cdot dm$$

est automorphe. Voici donc un procédé très général de construction de fonctionnelles Φ.