

**Zeitschrift:** Archives des sciences physiques et naturelles  
**Herausgeber:** Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève  
**Band:** 8 (1926)

**Artikel:** Construction de fonctionnelles automorphes  
**Autor:** Wavre, R.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-742446>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 04.05.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

alors :

$$\int_0^1 (x-y)y^\alpha dy = \int_0^x (x-y)y^\alpha dy = \frac{x^{\alpha+2}}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \quad \alpha > -1$$

et si

$$\varphi_0 = 1$$

on a

$$\varphi_1 = \sqrt{5}x^2, \quad \varphi_2 = \sqrt{9}x^4, \quad \varphi_3 = \sqrt{13}x^6,$$

$$\varphi_i = \sqrt{4i+1}x^{2i}$$

$$\int_0^1 \varphi_i(x)\varphi_{i+p}(x) dx = \frac{\sqrt{4i+1}\sqrt{4i+4p+1}}{4i+2p+1}$$

et

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_0^1 [\varphi_i(x) - \varphi_{i+p}(x)]^2 dx = 2 \quad \text{quel que soit } i \text{ fixe.}$$

Il est impossible d'extraire des  $\varphi_i(x)$  une suite qui converge en moyenne.

R. WAVRE. — *Construction de fonctionnelles automorphes.*

Dans une note parue aux comptes rendus de l'Académie des Sciences (t. 182, p. 1317, séance du 31 mai 1926) j'ai construit des fonctionnelles automorphes relatives à un noyau symétrique de Fredholm.

Soient  $N_n(y, x) = \sum \frac{\psi_i(x)\psi_i(y)}{\lambda_i^n}$  le noyau itéré d'ordre  $n$  d'un noyau symétrique et  $c_i$  les coefficients de Fourier d'une fonction  $f_0(x)$ , relatifs au système orthogonal  $\psi_i(x)$ . La fonction itérée d'ordre  $n$ ,  $f_n(x) = \int N_n(x, y)f_0(y)dy$  admet les coefficients  $c_i\lambda_i^{-n}$ ; on peut convenir d'attribuer à  $n$  des valeurs non entières.

Soit alors  $F$  une fonction des seuls produits  $c_i\lambda_i^m$  telle que l'intégrale

$$\Phi|f_0(x)| = \Phi(c_1, c_2, \dots) = \int_{m=-\infty}^{+\infty} F(c_1\lambda_1^m, c_2\lambda_2^m, \dots) dm$$

soit convergente. La fonctionnelle  $\Phi$  est automorphe pour toute substitution  $f_0 \rightarrow f_n$ , quel que soit  $n$ ; c'est-à-dire que l'on a

$$\Phi |f_0(x)| = \Phi |f_n(x)|.$$

Son domaine fondamental est l'hypersphère  $S: \sum c_i^2 = 1$ .

Je voudrais ici indiquer un procédé plus général que celui indiqué dans la note rappelée pour construire effectivement des fonctionnelles  $\Phi$ .

Soient  $x_i, y_i, z_i, u_i, \dots$  des nombres tels que les séries suivantes convergent quel que soit  $m$ .

$$x = \sum_i x_i^2 c_i^2 \lambda_i^{2m}$$

$$y = \sum_i y_i^2 c_i^2 \lambda_i^{2m}$$

$$z = \sum_i z_i^2 c_i^2 \lambda_i^{2m}$$

$$u = \sum_i u_i^2 c_i^2 \lambda_i^{2m}$$

puis  $f(y, z, u, \dots)$  une fonction telle que l'on ait

$$|f(y, z, u, \dots)| \leq f(x, x, x, \dots)$$

lorsque  $x, y, z, u, \dots$  ont les valeurs qui correspondent à une même valeur de  $m$  et telle de plus que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} f(x, x, x, \dots) dx$$

ait un sens.

Alors la fonctionnelle

$$\Phi |f_0(x)| = \int_0^{+\infty} f(y, z, u, \dots) dx = \int_{m=-\infty}^{+\infty} f(y, z, u, \dots) \frac{dx}{dm} \cdot dm$$

est automorphe. Voici donc un procédé très général de construction de fonctionnelles  $\Phi$ .