Mouvements internes des astres fluides et dérives des continents

Autor(en): **Dive, Pierre**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Archives des sciences physiques et naturelles**

Band (Jahr): **9 (1927)**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-740879

MOUVEMENTS INTERNES DES ASTRES FLUIDES

ET

DÉRIVES DES CONTINENTS

PAR

Pierre DIVE

Le problème de la détermination de la figure des corps célestes fluides est certainement un de ceux qui, depuis Newton, a le plus passionné les géomètres.

Mac-Laurin[1] montra le premier qu'une masse fluide *homogène* tournant autour d'un axe d'un mouvement uniforme et dont les molécules s'attirent mutuellement suivant la loi de l'attraction universelle, pouvait affecter la forme d'un ellipsoïde de révolution aplati.

Jacobi généralisa ensuite cette proposition et fit voir qu'elle s'étendait aux ellipsoïdes à trois axes inégaux.

Plus tard, Henri Poincaré et Liapounoff établiront qu'il existe, en dehors des ellipsoïdes, une infinité de séries de figures d'équilibre et que, parmi ces séries de figures, une seule est stable[2].

Quel que puisse être l'intérêt théorique des résultats précédents, ils ne constituent qu'une première approximation encore trop éloignée de la réalité. Les aplatissements de quelques planètes, ainsi calculés dans l'hypothèse de l'homogénéité,

[1] *Traité des fluxions*, 1742.

[2] *Acta mathematica*, tome VII, 1885, et *Mémoires de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg*, 8e série, 1908.

s'étant, en effet, trouvés tous supérieurs aux valeurs observées ou mesurées, en particulier sur Jupiter, Saturne et la terre, il devint évident qu'on ne pouvait, dans cette recherche, faire abstraction de l'hétérogénéité des corps célestes.

Déjà Clairaut s'était attaqué à cette difficulté et avait prouvé, dans son ouvrage célèbre [1], qu'un état d'équilibre relatif était possible pour une masse fluide constituée de couches ellipsoïdales homogènes dont la densité croît avec la profondeur, pourvu que la vitesse de rotation de cette masse soit suffisamment faible.

Laplace reprit, mais avec plus de généralité, le problème que s'était posé Clairaut, et démontra qu'un sphéroïde fluide hétérogène tournant lentement d'un mouvement d'ensemble ne pouvait être stratifié qu'en couches ellipsoïdales peu aplaties.

Ces travaux furent principalement utilisées à la détermination de la forme et de la constitution de la terre.

Signalons enfin, parmi les principaux résultats obtenus, depuis Laplace, sur la masse fluide hétérogène en rotation, les propositions négatives de MM. Hamy, Volterra et Véronnet.

* * *

Dans toutes les études précédentes on admet que la masse étudiée tourne d'un seul bloc.

L'hypothèse que les astres fluides peuvent être doués de mouvements internes paraît toutefois naturelle.

Et, en fait, l'observation prouve bien que sur le soleil, Saturne ou Jupiter les calottes polaires et l'équateur ne tournent pas avec la même vitesse autour de l'axe de rotation.

D'autre part, l'idée de l'existence, à l'intérieur de la terre, de courants du fluide visqueux dans lequel plongent les continents s'est accréditée de plus en plus chez les géologues depuis que M. Wegener a fait connaître son audacieuse théorie des translations continentales.

[1] *Figure de la Terre tirée des principes de l'hydrostatique*, Paris, 1743.

Des recherches sur les conditions auxquelles doit satisfaire la rotation imprimée à un ellipsoïde fluide hétérogène pour conserver sa forme ont été entreprises par MM. Hamy et Véronnet; mais ces auteurs se sont placés dans une hypothèse non nécessaire, et qui d'ailleurs, ainsi que nous le montrerons, entraîne, dans le cas de la stratification envisagée, des conséquences contradictoires.

* * *

Nous présentons dans ce mémoire une théorie générale et nouvelle de la masse fluide hétérogène en rotation.

Sans faire aucune supposition sur la définition géométrique des surfaces à densité constante, nous calculons l'expression du carré de la vitesse angulaire dont doit être animée une molécule quelconque du fluide, et nous parvenons ainsi à une condition à laquelle satisfait la stratification de toute masse susceptible d'être maintenue en état de rotation permanente.

Particularisant ensuite nos formules aux fluides constitués de couches ellipsoïdales homogènes infiniment minces, nous donnons une analyse importante des propriétés des mouvements internes de ces fluides.

Le cas des couches ellipsoïdales homothétiques paraissant le mieux convenir à la terre, nous lui avons consacré un développement spécial. Ce cas est en outre intéressant du point de vue purement analytique.

* * *

Dans tous nos calculs nous n'avons tenu aucun compte de la viscosité du fluide étudié; nous devions donc réserver un paragraphe à la discussion des divers arguments qui permettent de considérer les propriétés de nos mouvements comme suffisamment adéquates à la réalité durant une période plus ou moins longue de la vie d'un astre fluide.

Nous dirons, en particulier, à la fin de ce mémoire, comment, en adoptant la conception des géophysiciens modernes, il nous est apparu que le globe terrestre nous offrait un champ d'observation captivant, et comment nous avons été amené à établir un rapprochement entre certains problèmes que pose la théorie des dérives continentales de M. Wegener et les résultats de notre étude sur l'ellipsoïde fluide hétérogène en rotation.

Les géologues apprécieront dans quelle mesure les hypothèses que nous suggérons justifient cette tentative.

I. Mouvements de rotation généraux de la masse fluide hétérogène.

Notre hypothèse fondamentale est que le mouvement du fluide autour de son axe de rotation est un mouvement permanent.

Tous les corps naturels étant plus ou moins compressibles et dilatables, nous ne préjugerons de rien ni sur la distribution des températures à l'intérieur de la masse, ni sur son degré de compressibilité; dans le cas général, il existera une relation de la forme $\rho = f(p, \tau, \lambda)$ entre la densité ρ, la pression p, la température τ et le paramètre λ dont la valeur dépend de la nature chimique de l'élément du fluide situé au point considéré. M. Rolin Wavre a étudié le cas particulier intéressant où la densité est fonction de la seule pression [1].

§ 1. — *Sur la stratification.*

1\. — En toute hypothèse, nous nous donnerons la loi de répartition des densités. Il est presque évident que le mouvement des molécules sur leur trajectoire ne peut être *uniforme* que si les couches de densité constante sont de révolution; ceci résulte d'ailleurs d'une application simple de l'équation de continuité.

Soient, en effet, x, y, z les coordonnées d'un élément de volume de densité ρ, u, v, w les composantes suivant les axes de sa vitesse, t désignant le temps, on a:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 . \qquad (1)$$

[1] *C. R.*, 184, p. 739 (1927).

Mais ici, le mouvement étant permanent, $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ est nul. Prenons oz comme axe de rotation, $w = 0$ et il vient:

$$u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 . \tag{2}$$

En appelant ω la vitesse angulaire de l'élément envisagé, et en tenant compte des égalités:

$$u = -\omega y , \qquad v = \omega x , \qquad w = 0 ,$$

le coefficient de dilatation cubique:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \tag{3}$$

peut s'écrire:

$$\frac{1}{2} \frac{D(l^2, \omega)}{D(x, y)} , \tag{4}$$

l^2 étant mis pour $x^2 + y^2$.

Si donc le fluide est incompressible, ω ne dépend de x et y que par l'intermédiaire de l, et le mouvement de rotation de l'élément est uniforme.

Inversement si la rotation des molécules est uniforme, le coefficient de dilatation cubique est nul, *mais le fluide étudié n'est pas nécessairement incompressible.*

De toute façon, l'équation de continuité (2) se réduit à:

$$\omega \frac{D(l^2, \rho)}{D(x, y)} = 0 ; \tag{5}$$

ω n'étant pas nul, elle exprime que la densité ρ de la masse tournante ne peut être qu'une fonction de l^2 et de z; et ceci revient à dire que *les surfaces à densité constante sont de révolution autour de l'axe de rotation.*

Nous le supposerons continues et convexes.

2. — Nous admettrons en outre que la stratification possède un plan équatorial de symétrie [1], et *que la densité des couches*

Dans le cas des équilibres relatifs, M. Lichtenstein démontre la nécessité de cette condition; voir: *Astronomie und Mathematik in* *croît avec leur profondeur;* au surplus, cette dernière condition est nécessaire pour la stabilité des mouvements.

§ 2. — *Vitesse angulaire d'une molécule.*

3. — Soient, dans ces hypothèses, oxy le plan équatorial, oz l'axe de rotation. La densité ρ, le potentiel newtonien U des forces d'attraction, la vitesse angulaire ω et la pression p en un point du fluide ne dépendent que du carré l^2 de la distance à l'axe et du carré z^2 de la cote de ce point.

Les équations fondamentales de l'hydrodynamique (appliquées aux mouvements de rotation uniformes) donnent alors le système d'équations indépendantes:

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial l^2} = \frac{\partial U}{\partial l^2} + \frac{\omega^2}{2}, \tag{6}$$

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z^2} = \frac{\partial U}{\partial z^2}. \tag{7}$$

Multiplions respectivement ces équations par dl^2 et dz^2, et ajoutons les, il vient:

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial l^2} dl^2 + \frac{\partial p}{\partial z^2} dz^2\right) = \left(\frac{\partial U}{\partial l^2} + \frac{\omega^2}{2}\right) dl^2 + \frac{\partial U}{\partial z^2} dz^2. \tag{8}$$

Le mouvement étant permanent, la quantité entre parenthèses du premier membre n'est autre que la différentielle totale de p; de sorte que la relation précédente s'écrit encore:

$$dp = \rho\left[\left(\frac{\partial U}{\partial l^2} + \frac{\omega^2}{2}\right) dl^2 + \frac{\partial U}{\partial z^2} dz^2\right]. \tag{9}$$

ρ doit donc être facteur intégrant de l'expression différentielle entre crochets; en exprimant la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi, on obtient l'équation:

$$\boxed{2 \cdot \frac{D(\rho \,.\, U)}{D(l^2, z^2)} = \frac{\partial}{\partial z^2}(\rho\,\omega^2)}\;; \tag{10}$$

ihrer Wechselwirkung, Mathematische Probleme in der Theorie der Figur der Himmelskörper, p. 69.

ρ et U ne dépendant que de la répartition géométrique des densités, le déterminant fonctionnel est connu. Dès lors une intégration par rapport à z^2 donnerait $\rho\omega^2$ à une fonction additive de l^2 près.

4. — Pour déterminer cette fonction nous devons faire intervenir une nouvelle hypothèse. *Nous nous placerons dans le cas des corps célestes en exprimant que la pression est constante sur la surface qui limite le fluide.*

Soit S $(l^2, z^2) = 0$ l'équation de cette surface; elle définit une fonction *uniforme* $z^2\,(l^2)$ que nous représentons par z_e^2. En convenant de remplacer z^2 par z_e^2 dans les expressions affectées de l'indice e, on tire de l'équation (10):

$$\rho \frac{\omega^2}{2} = \rho_e \frac{\omega_e^2}{2} - \int_{z^2}^{z_e^2} \frac{\mathrm{D}(\rho\,,\ \mathrm{U})}{\mathrm{D}(l^2,\ z^2)}\, dz^2\ . \tag{11}$$

L'intégrale du second membre est connue, seule la vitesse angulaire ω_e sur la courbe extérieure est à calculer.

A cet effet, nous remarquerons que l'hypothèse précédente se traduisant par les deux équations simultanées:

$$\left\{\begin{aligned} &\left[\rho_e\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial l^2}\right)_e + \rho_e \frac{\omega_e^2}{2}\right] dl^2 + \rho_e\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z^2}\right)_e dz^2 = 0\ , \\ &\left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial l^2}\right)_e dl^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial z^2}\right)_e dz^2 = 0\ , \end{aligned}\right.$$

on doit avoir:

$$\begin{vmatrix} \rho_e\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial l^2}\right)_e + \rho_e \frac{\omega_e^2}{2} & \rho_e\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z^2}\right)_e \\ \left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial l^2}\right)_e & \left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial z^2}\right)_e \end{vmatrix} = 0\ .$$

D'où:

$$\rho_e \frac{\omega_e^2}{2} = \frac{\rho_e}{\left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial z^2}\right)_e} \cdot \left[\frac{\mathrm{D}(\mathrm{S},\ \mathrm{U})}{\mathrm{D}(l^2,\ z^2)}\right]_e . \tag{12}$$

L'équation (11) devient donc:

$$\omega^2 = \frac{2}{\rho} \left\{ \frac{\rho_e}{\left(\frac{\partial S}{\partial z^2}\right)_e} \cdot \left[\frac{D(S, U)}{D(l^2, z^2)}\right]_e - \int_{z^2}^{z_e^2} \frac{D(\rho, U)}{D(l^2, z^2)} dz^2 \right\}. \tag{13}$$

C'est la *formule fondamentale* qui régit les mouvements internes de la masse fluide hétérogène en rotation.

5. — Dans le cas d'un astre fluide, on peut admettre que la densité ρ_e de la couche superficielle est constante. On conçoit, en effet, que les diverses substances composant la nébuleuse originelle ont dû se séparer suivant leur nature chimique et se condenser successivement lorsque, pour chacune d'elles, les conditions requises de température et de pression se sont trouvées réalisées. La couche superficielle doit par suite être un mélange sensiblement homogène des dernières vapeurs qui se sont simultanément précipitées; et comme, d'ailleurs, cette couche supporte une pression nulle ou la pression uniforme d'une atmosphère gazeuse, on pensera sans doute que notre supposition est fort naturelle.

On reconnaîtra alors aisément que l'expression de ω^2 s'obtient en substituant ρ à S dans la formule (13).

Si donc on pose:

$$\Omega = \frac{2}{\frac{\partial \rho}{\partial z^2}} \frac{D(\rho, U)}{D(l^2, z^2)}, \tag{14}$$

il vient:

$$\omega^2 = \frac{1}{\rho} \left(\rho_e \Omega_e - \int_{z^2}^{z_e^2} \Omega \frac{\partial \rho}{\partial z^2} dz^2 \right). \tag{15}$$

6. — Il est intéressant de remarquer que Ω *est précisément l'expression que l'on obtiendrait pour le carré de la vitesse angulaire dans le cas où le champ de la pesanteur serait normal aux surfaces à densité constante.*

Pour le montrer il suffit de répéter pour une couche de densité constante quelconque le raisonnement (nº 4) qui nous a permis de calculer ω^2 sur la couche superficielle, ρ prenant ici la place de S.

M. Wavre, qui s'est spécialement attaché au problème de la recherche des stratifications susceptibles de satisfaire à la condition précédente, a donné de Ω un développement en série nouveau procédant suivant les puissances du cosinus de l'angle des rayons vecteurs du point potentié et d'un point potentiant. — Ces calculs et les résultats négatifs que nous rappellerons dans la deuxième partie de ce mémoire laissent croire que les stratifications cherchées sont en nombre très restreint [1].

§ 3. — *Condition à laquelle doit satisfaire la stratification.*

7. — Le premier membre de l'équation (15) étant essentiellement positif, les mouvements permanents de rotation envisagés ne peuvent exister que dans les stratifications associées à une expression de Ω satisfaisant à l'inégalité :

$$\boxed{\Omega_e > \frac{1}{\rho_e} \cdot \int_{z^2}^{z_e^2} \Omega \frac{\partial \rho}{\partial z^2} dz^2} \quad . \tag{16}$$

Sur la couche extérieure l'intégrale précédente s'annule, et comme, d'autre part, la dérivée $\frac{\partial \rho}{\partial z^2}$ est toujours négative, il est nécessaire, en vertu de la formule (14), que le déterminant:

$$\left[\frac{D(\rho, U)}{D(l^2, z^2)}\right]_e$$

soit négatif, c'est-à-dire que l'on ait:

$$-\frac{\left(\frac{\partial \rho}{\partial l^2}\right)_e}{\left(\frac{\partial \rho}{\partial z^2}\right)_e} > -\frac{\left(\frac{\partial U}{\partial l^2}\right)_e}{\left(\frac{\partial U}{\partial z^2}\right)_e} . \tag{17}$$

[1] R. Wavre, *C. R.*, 184, p. 739 (1927); P. Dive, *C. R.* 184, p. 371 (1927).

Cette condition exprime que *les surfaces équipotentielles du champ d'attraction* (U = c^{te}) *coupant la couche extérieure sont moins aplaties que cette dernière.*

On peut montrer en outre, en utilisant une propriété des déterminants fonctionnels, que notre hypothèse sur la continuité des couches et la croissance de leur densité avec la profondeur permet d'étendre cette proposition à chacune d'elles.

§ 4. — *Variation de la vitesse angulaire à l'intérieur de la masse.*

8. — Pour étudier les variations de la vitesse angulaire à l'intérieur de la masse, il est commode de prendre comme variables indépendantes l^2 et ρ.

L'équation (15) s'écrira:

$$\omega^2 = \frac{1}{\rho}\left(\rho_e \Omega_e - \int_{\rho}^{\rho_e} \Omega \, d\rho\right) , \tag{18}$$

ou encore, au moyen d'une intégration par parties:

$$\omega^2 = \Omega + \frac{1}{\rho}\int_{\rho}^{\rho_e} \rho \frac{\partial \Omega}{\partial \rho} \, d\rho \, . \tag{19}$$

De ces formules on déduit immédiatement les suivantes:

$$\frac{\partial \omega^2}{\partial l^2} = \frac{1}{\rho}\left(\rho_e \frac{\partial \Omega_e}{\partial l^2} - \int_{\rho}^{\rho_e} \frac{\partial \Omega_e}{\partial l^2} d\rho\right) , \tag{20}$$

$$\frac{\partial \omega^2}{\partial \rho} = - \frac{1}{\rho^2}\int_{\rho}^{\rho_e} \rho \frac{\partial \Omega}{\partial \rho} \, d\rho \, . \tag{21}$$

On établira d'ailleurs sans difficulté que, dans le système de variables actuel, l'expression (14) de Ω prend la forme simple:

$$-2\left(\frac{\partial U}{\partial l^2}\right)_{\rho = c^{te}} \text{[1]} . \tag{22}$$

[1] Pour simplifier l'écriture nous supprimerons dorénavant les parenthèses et l'indication $\rho = c^{te}$; il sera entendu, sauf avis contraire, qu'il s'agit d'une dérivée partielle prise dans le système de variables l^2 et ρ.

De sorte qu'en faisant apparaître U, les formules (18), (19), (20) et (21) deviennent:

$$\omega^2 = \frac{2}{\rho}\left[\int_{\rho}^{\rho_e} \frac{\partial U}{\partial l^2}\, d\rho - \rho_e\left(\frac{\partial U}{\partial l^2}\right)_{\rho=\rho_e}\right], \tag{23}$$

$$\omega^2 = -2\left[\frac{1}{\rho}\int_{\rho}^{\rho_e} \rho\,\frac{\partial^2 U}{\partial\rho\,\partial l^2}\, d\rho + \frac{\partial U}{\partial l^2}\right], \tag{24}$$

$$\frac{\partial\omega^2}{\partial l^2} = \frac{2}{\rho}\left[\int_{\rho}^{\rho_e} \frac{\partial^2 U}{\partial l^2\,\partial l^2}\, d\rho - \rho_e\left(\frac{\partial^2 U}{\partial l^2\,\partial l^2}\right)_{\rho=\rho_e}\right], \tag{25}$$

$$\frac{\partial\omega^2}{\partial\rho} = \frac{2}{\rho^2}\int_{\rho}^{\rho_e} \rho\,\frac{\partial^2 U}{\partial l^2\,\partial\rho}\, d\rho\,. \tag{26}$$

Ces équations permettent de discuter les variations de la vitesse angulaire en latitude (25), sur une surface à densité constante, et en profondeur (26), suivant une parallèle à l'axe de rotation.

En particulier, les mouvements relatifs sur la couche superficielle sont régis par la relation:

$$\frac{\partial\Omega_e}{\partial l^2} = -2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial l^2\,\partial l^2}\right)_{\rho=\rho_e}. \tag{27}$$

Ces mouvements sont observables sur les astres tels que le soleil, Jupiter, Saturne.

II. Remarques sur le cas particulier où la densité ne dépend que de la pression.

Nous terminerons cet exposé général en faisant quelques remarques sur le cas particulier où les surfaces à densité constante coïncident avec les surfaces à pression constante.

§ 1. — *Distribution des vitesses.*

9. — Dans ce cas, la densité étant fonction de la seule pression, l'équation (9) déduite des équations fondamentales de l'hydrodynamique exige tout d'abord que le champ de la pesanteur soit normal aux couches de densité constante.

L'expression de ω^2 doit alors se réduire à celle de Ω (n° 6).

Les formules (19) et (21) montrent que l'on doit avoir les identités équivalentes:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \rho} \equiv 0 \quad , \qquad \frac{\partial \omega^2}{\partial \rho} \equiv 0 \ . \tag{28}$$

On retrouve ainsi le théorème de M. Wavre [1]:

Lorsque la densité ne dépend que de la pression, toutes les molécules situées à la même distance de l'axe de rotation sont animées de la même vitesse angulaire.

10. — On peut encore parvenir à ce théorème par une autre voie qui conduit à une formule intéressante.

Eliminons U entre les équations:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial l^2} = \frac{\partial U}{\partial l^2} + \frac{\omega^2}{2} \ ,$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z^2} = \frac{\partial U}{\partial z^2} \ ,$$

$$2\frac{D(\rho\ ,\ U)}{D(l^2,\ z^2)} = \frac{\partial}{\partial z^2}(\rho\,\omega^2) \ ,$$

on obtient la relation:

$$2\frac{D(\rho\ ,\ p)}{D(l^2,\ z^2)} = \rho^2\frac{\partial \omega^2}{\partial z^2} \ , \tag{29}$$

que l'on peut aussi écrire, dans le système de variables l^2 et ρ:

$$\boxed{2\frac{\partial p}{\partial l^2} + \rho^2\frac{\partial \omega^2}{\partial \rho} = 0} \ , \tag{30}$$

[1] *C. R.*, 184 (1927).

équation qui exprime également l'invariance de la vitesse angulaire sur toute parallèle à l'axe de rotation lorsque la pression demeure invariable sur chaque couche à densité constante.

§ 2. — *Stratification.*

11. — Dans l'équation (28) $\frac{\partial \Omega}{\partial \rho} = 0$ remplaçons Ω par son expression (22) en fonction de U; il vient:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial l^2 \, \partial \rho} = 0 . \tag{31}$$

A l'intérieur de la masse tournante le potentiel newtonien U des forces d'attraction doit alors être de la forme:

$$\boxed{P(\rho) + Q(l^2)} . \tag{32}$$

La propriété précédente impose donc une condition restrictive à la stratification.

12. — Mais il est intéressant d'observer sur les équations (21) et (30) que, dans nos mouvements généraux, l'égalité $\frac{\partial \omega^2}{\partial \rho} = 0$ est envore vraie, pour toutes les stratifications possibles, dans la couche mince qui enveloppe le fluide, pourvu que cette couche ait une densité constante.

§ 3. — *Tourbillons.*

13. — Cherchons maintenant la nature des surfaces de tourbillons lorsque la densité est fonction de la seule pression.

Les formules donnant les composantes du vecteur tourbillon suivant les axes *ox*, *oy*, *oz*:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \\ \eta &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \\ \zeta &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right), \end{aligned} \tag{33}$$

s'écrivent, en tenant compte des égalités $u = -\omega y$, $v = \omega x$, $w = 0$:

$$\begin{aligned} \xi &= -\frac{x}{2}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial z}, \\ \eta &= -\frac{y}{2}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial z}, \\ \zeta &= \frac{1}{2}\left(2\omega + x\frac{\partial\omega}{\partial x} + y\frac{\partial\omega}{\partial y}\right). \end{aligned} \tag{34}$$

Or on sait que, dans l'hypothèse actuelle, ω satisfait à l'identité $\frac{\partial\omega}{\partial z} \equiv 0$. Les composantes ξ et η du vecteur tourbillon suivant les axes *ox* et *oy* sont donc nulles et l'on peut énoncer la proposition suivante:

Lorsque la densité est fonction de la seule pression, les surfaces de tourbillons du fluide sont des cylindres de révolution autour de l'axe de rotation.

14. — Pour que le mouvement fût irrotationnel, il faudrait que la composante ζ du tourbillon fût aussi identiquement nulle.

En introduisant la distance à l'axe l, cette condition s'exprime par l'équation:

$$\omega + l^2\frac{d\omega}{dl^2} = 0, \tag{35}$$

d'où

$$\omega l^2 = C^{te}. \tag{36}$$

Tenons compte des relations:

$$\omega^2 = \Omega = -2.\frac{\partial U}{\partial l^2},$$

et désignons par A une constante, l'équation (36) donne:

$$\frac{\partial U}{\partial l^2} = \frac{A}{l^4}, \tag{37}$$

et, par suite:

$$\int\frac{\partial U}{\partial l^2}dl^2 = A\int\frac{dl^2}{l^4} + P(\rho),$$

$P(\rho)$ étant exclusivement une fonction de ρ; elle n'est autre que celle de la formule (32).

On obtient ainsi la forme générale que doit affecter le potentiel newtonien des stratifications douées de mouvements internes irrotationnels:

$$\boxed{U = P(\rho) - \frac{A}{l^2}} \, . \tag{38}$$

15. — On peut, en particulier, supposer que l'on a simplement:

$$P(\rho) = \rho \, ,$$

ce qui revient à admettre que la pression serait une fonction linéaire du carré de la densité.

En remplaçant ω^2 par $-2 \, . \dfrac{\partial U}{\partial l^2}$, l'équation (9) tirée des équations fondamentales de l'hydrodynamique devient, en effet:

$$\frac{1}{\rho} dp = \frac{\partial U}{\partial p} d\rho \, .$$

Or, dans notre hypothèse, $\dfrac{\partial U}{\partial \rho} = 1$, et l'on a bien:

$$p = \frac{1}{2}\rho^2 + B \, ,$$

B étant une constante.

La stratification serait alors donnée par la solution en $\rho(x^2 + y^2, z^2)$ de l'équation de Fredholm à trois variables:

$$\rho(x^2 + y^2, z^2) = \iiint_V \rho(a^2 + b^2, c^2) \frac{da\, db\, dc}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}} + \frac{A}{x^2 + y^2} \, ,$$

quand on se donne le domaine d'intégration V.

16. — Remarquons enfin que, dans le cas général, la force centrifuge est donnée par la formule:

$$\omega^2 l = \frac{A}{l^3} \, .$$

Sur un point voisin de l'axe de rotation la force centrifuge serait donc infiniment grande. — Comme il ne peut exister aucun corps matériel de dimensions finies produisant, en un point, un champ d'attraction infini susceptible de se composer avec cette force, il faut en conclure que la masse tournante ne peut avoir aucun point commun avec l'axe. D'où la proposition suivante:

Un mouvement irrotationnel ne peut avoir lieu que dans des stratifications limitées par des volumes ayant la connexité du tore.

La forme des corps célestes fluides prouve donc que leurs mouvements internes ne sauraient être irrotationnels.

Saint-Julien-en-Genevois, août 1927.

(A suivre)