Mouvements de rotation généraux de la masse fluide hétérogène et géodésie (note transmise par M. Wavre)

Autor(en): **Dive, Pierre**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Archives des sciences physiques et naturelles**

Band (Jahr): **9 (1927)**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-740941

Pierre Dive. — *Mouvements de rotation généraux de la masse fluide hétérogène et géodésie* (Note transmise par M. Wavre).

En se plaçant, comme l'ont fait jusqu'ici les différents auteurs, dans le cas où le champ de la pesanteur serait normal aux surfaces à densité constante, M. Rolin Wavre a établi récemment, dans des hypothèses très générales et par un procédé analytique remarquable, que ces surfaces devaient tendre vers la forme ellipsoïdale au voisinage du centre du fluide [1]. En comparant ce résultat à celui de notre dernière note [2] qui exclut, *dans la même hypothèse*, toute stratification des masses en couches ellipsoïdales, M. Wavre a obtenu cette nouvelle proposition négative: le fluide considéré ne saurait être constitué de couches homothétiques homogènes [3].

Nous voudrions montrer que les équations fondamentales de l'hydrodynamique permettent de définir un mouvement permanent de rotation pour un fluide *ne satisfaisant pas nécessairement à la condition restrictive précédente.*

Tous les corps naturels étant plus ou moins compressibles et dilatables, nous ne préjugerons rien sur la distribution des températures à l'intérieur de la masse, ni sur son degré de compressibilité; dans le cas général, il existera une relation de la forme: $\rho = f(p, \tau, \lambda)$ entre la densité ρ, la pression p, la température τ et le paramètre λ dont la valeur dépend de la nature chimique de l'élément du fluide situé au point envisagé. M. Wavre a étudié le cas particulier intéressant où la densité est fonction de la seule pression [4].

En toute hypothèse nous nous donnerons la loi de répartition des densités. Il est presque évident que le mouvement des molécules sur leur trajectoire ne peut être uniforme que si les couches de densité constante sont de révolution; ceci résulte d'ailleurs d'une application simple de l'équation de continuité. Nous supposerons, en outre, que la stratification

[1] C. R. Société de Physique, Vol. 44 (Séance du 17 février 1927).
[2] C. R. Ac. des Sc. Paris, t. 184, séance du 14 février 1927.
[3] C. R. Ac. des Sc. Paris, t. 184, p. 739, séance du 21 mars 1927.
[4] C. R. Ac. des Sc. Paris, t. 184, p. 739, Séance du 21 mars 1927.

possède un plan équatorial de symétrie et que la densité des couches croit avec leur profondeur; au surplus, cette dernière condition est nécessaire pour la stabilité des mouvements.

Soient *oxy*. le plan équatorial, *oz* l'axe de rotation; la densité ρ, le potentiel newtonien U des forces d'attraction, la vitesse angulaire ω et la pression p en un point du fluide ne dépendent que du carré $r^2 = x^2 + y^2$ de la distance à l'axe et du carré z^2 de la cote de ce point.

Le mouvement étant supposé permanent, les équations fondamentales de l'hydrodynamique donnent la relation:

$$dp = \rho\left[\left(\frac{\partial U}{\partial r^2} + \frac{\omega^2}{2}\right) dr^2 + \frac{\partial U}{\partial z^2}\, dz^2\right] . \tag{1}$$

ρ doit donc être facteur intégrant de l'expression différentielle entre crochets; pour cela il faut et il suffit que l'on ait:

$$2 . \frac{D(\rho . U)}{D(r^2 , z^2)} = \frac{\partial}{\partial z^2}(\rho\, \omega^2) . \tag{2}$$

Le premier membre de cette équation étant connu, une intégration par rapport à z^2 donnerait ω^2 à une fonction additive de r^2 près. Pour déterminer cette fonction nous devons faire intervenir une nouvelle hypothèse; nous nous plaçons dans le cas des corps célestes en exprimant que la pression est constante sur la surface qui limite le fluide.

Soit $S(r^2, z^2) = 0$ l'équation de cette surface; elle définit une fonction *uniforme* $z^2(r^2)$ que nous représenterons par z_1^2. En convenant de remplacer z^2 par z_1^2 dans les expressions affectées de l'indice 1, on parvient à *l'équation fondamentale:*

$$\omega^2 = \frac{2}{\rho}\left\{ \frac{\rho_1}{\left[\dfrac{\partial S}{\partial z^2}\right]_1} . \left[\frac{D(S . U)}{D(r^2 , z^2)}\right]_1 - \int_{z^2}^{z_1^2} \frac{D(\rho . U)}{D(r^2 , z^2)}\, dz^2 \right\} . \tag{3}$$

Lorsque la densité ρ_1 de la couche superficielle est constante, l'expression de ω^2 s'obtient en substituant ρ à S dans l'équation précédente. Si donc on pose:

$$\Omega = \frac{2}{\dfrac{\partial \rho}{\partial z^2}} . \frac{D(\rho , U)}{D(r^2 , z^2)} \tag{4}$$

on a:

$$\omega^2 = \frac{1}{\rho}\left(\rho_1 \Omega_1 - \int_{z^2}^{z_1^2} \Omega \frac{\partial \rho}{\partial z^2} dz^2\right)^1 . \qquad (5)$$

Un mouvement permanent n'est alors possible que pour les stratifications associées à un déterminant fonctionnel $\frac{D(\rho . U)}{D(r^2, z^2)}$ donnant une valeur positive au second membre de cette formule.

Pour l'étude des variations de ω^2 en profondeur suivant une parallèle à l'axe de rotation et en latitude sur une surface à densité constante, nous prendrons comme variables indépendantes r^2 et ρ; il vient:

$$\omega^2 = \frac{1}{\rho}\left(\rho_1 \Omega_1 - \int_{\rho}^{\rho_1} \Omega \, d\rho\right) \qquad (6)$$

$$\frac{\partial \omega^2}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho^2}\int_{\rho}^{\rho_1} \rho \frac{\partial \Omega}{\partial \rho} d\rho \qquad (7)$$

$$\frac{\partial \omega^2}{\partial r^2} = \frac{1}{\rho}\left(\rho_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial r^2} - \int_{\rho}^{\rho_1} \frac{\partial \Omega}{\partial r^2} d\rho\right) . \qquad (8)$$

La variation de ω^2 sur la couche superficielle ne dépend donc que de

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial r^2} = \left[- 2\frac{\partial^2 U}{\partial r^2 \, \partial r^2}\right]_{\rho=\rho_1} ; \qquad (9)$$

cette variation est observable sur les astres tels que le Soleil, Jupiter, Saturne.

[1] Il est intéressant de remarquer que Ω est précisément l'expression que l'on obtiendrait pour le carré de la vitesse angulaire dans le cas où le champ de la pesanteur serait normal aux surfaces à densité constante. Les résultats négatifs rappelés au début de cette note et les calculs de M. Wavre permettent de penser que seules des stratifications très spéciales sont susceptibles de satisfaire à cette condition (C. R. Ac. des Sc. Paris, t. 184, p. 739, séance du 21 mars 1927).

— Terminons cet exposé général par une remarque: L'équation (2) jointe aux équations fondamentales de l'hydrodynamique donne la relation:

$$2\frac{D(\rho \, . \, p)}{D(r^2 \, . \, z^2)} = \rho^2 \, . \, \frac{\partial \omega^2}{\partial z^2} \, . \tag{10}$$

D'où cette conséquence immédiate: si $\rho = f(p)$, $\frac{\partial \omega^2}{\partial z^2} \equiv 0$; c'est le théorème de M. Wavre[1]. Et cette identité est encore vraie, pour toutes les stratifications possibles, dans la couche mince qui enveloppe le fluide, pourvu que cette couche ait une densité constante.

* * *

Nous publierons ultérieurement les calculs auxquels conduit l'application de notre théorie aux *fluides stratifiés en couches ellipsoïdales.* Nous nous bornerons ici à énoncer les deux résultats les plus importants de cette étude.

1° *Quelle que soit la loi de variation de l'aplatissement des surfaces à densité constante, il est possible d'imprimer aux molécules des vitesses angulaires de rotation susceptibles de conserver la stratification initiale.*

2° *La vitesse angulaire décroit constamment du centre à la surface et du pôle à l'équateur, sauf peut être dans deux cas extrêmes dont l'un comprend le cas particulier de Clairaut* [2].

Appliqués au globe terrestre visqueux ces résultats nous ont paru propres à fournir une interprétation simple de la dérive vers l'ouest et de la torsion des continents américains.

* * *

Le cas d'une stratification en couches ellipsoïdales homothétiques présente un intérêt particulier, tant au point de vue purement mathématique qu'au point de vue géodésique.

En nous plaçant dans l'hypothèse où la dérivée de la densité d'une couche par rapport au carré de son axe polaire serait

[1] Archives des Sciences Physiques et naturelles. 5me période: Vol. 8. Novembre - Décembre 1926.

[2] A.-C. Clairaut, *La figure de la Terre tirée des principes de l'hydrostatique*, Paris, 1743.

une constante — ce qui revient à admettre la loi de Roche $\rho = \rho_0(1 - 0{,}8\, d^2)$ pour la variation de la densité en fonction de la distance au centre — et en utilisant un artifice de calcul qui consiste en une inversion de fonction et un changement de variable d'intégration, nous avons pu ramener le calcul du carré de la vitesse angulaire à celui de six intégrales définies ne dépendant que du degré d'aplatissement de la stratification et s'exprimant toutes par des combinaisons d'un nombre fini de symboles élémentaires.

De sorte que nous avons obtenu le théorème suivant:

Dans un fluide hétérogène en rotation stratifié en couches ellipsoïdales homothétiques suivant la loi des densités de Roche, le carré de la vitesse angulaire d'une molécule est une fonction algébrique rationnelle des coordonnées de cette molécule.

R. Chodat et Fl. Mayer. — *Sur les conditions de la formation de la carotine chez les Algues en culture pure.*

Le carotine est un pigment constamment associé à la chlorophylle dans le plastide des plantes supérieures, qui sous des conditions indéterminées prend la prépondérance (*Selaginella*, *Aloe*, *Buxus*), la chlorophylle étant alors masquée.

Chez toutes les Algues examinées, lorsque la carotine est en quantité suffisante pour imprimer à la cellule et par conséquent aussi à la culture pure, sa propre coloration rouge, elle est en dehors du plastide, liée ou dissoute dans une matière grasse.

R. Chodat ayant observé qu'un certain nombre d'Algues, en culture pure, possédaient la propriété de fournir beaucoup de carotine à tel degré qu'au bout d'un certain temps, toute la surface de la colonie est rouge brique, on disposait d'un matériel permettant, dans des conditions rigoureuses, de déterminer les conditions de la formation de ce pigment. Les espèces expérimentées ont été les suivantes:

Haematococcus pluvialis Flotow.
Scenedesmus obtusiusculus Chod. (n. 3).
chlorelloides Chod. (n. 131).
dactylococcopsis Chod. (n. 189).
Chlorella rubescens Chod. (n. 24).