Sur le champ de la pesanteur à l'intérieur des planètes

Autor(en): **Wavre, R.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Archives des sciences physiques et naturelles**

Band (Jahr): **9 (1927)**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-740972

R. Wavre. — *Sur le champ de la pesanteur à l'intérieur des planètes.*

Appelons S_t les surfaces d'égale densité d'une planète et $\rho(t)$ la densité sur chacune d'elles. On sait que le potentiel Φ du champ de la pesanteur n'est fonction que du paramètre t pour les mouvements que j'ai appelés de première et de seconde espèce.

Imaginons construites les lignes de forces du champ de la pesanteur et choisissons dans un plan méridien pour repérer un point P, la coordonnée t et une coordonnée θ marquant la ligne de force sur laquelle se trouve P. Les lignes $t = c$ et $\theta = c$ forment deux familles orthogonales. On pourra prendre pour t le rayon équatorial de la surface S_t. Le coefficient g de la pesanteur, poids de la masse unité, est égal à la dérivée du potentiel Φ pour un déplacement vertical dn. On aura, en posant

$$\frac{d\Phi}{dt} = \mathrm{H}(t) \ , \qquad \frac{dn}{dt} = \mathrm{N}(t, \theta) \ :$$

$$g(t, \theta)\mathrm{N}(t, \theta) = \mathrm{H}(t) \ . \qquad (1)$$

et cette équation peut se lire: Le coefficient de la pesanteur varie sur chaque couche en raison inverse de la distance de cette couche à la couche infiniment voisine.

Cette propriété étant mise en évidence, poursuivons l'étude analytique du rapport entre la stratification et la densité. Pour cela rappelons une formule établie précédemment où ΔQ est le laplacien du potentiel des accélérations qui dans le cas de l'équilibre relatif se réduit au double du carré de la vitesse angulaire $2\omega^2$, où ε est la constante de la gravitation et C la courbure moyenne de la surface d'égale densité.

$$\frac{dg}{dn} - cg = - 4\pi\varepsilon\rho + \Delta Q \ . \qquad (2)$$

Dérivons g par rapport à t et représentons par f le second membre de l'équation (1):

$$\frac{dg}{dt} - c\mathrm{N}g = f\mathrm{N} \qquad (3)$$

équation linéaire en g dont la solution formelle est

$$g(t, \theta) = \mu(t, t', \theta)\left[g(t', \theta) - \int_{t'}^{t} \mu(t', s, \theta)\,\mathrm{N}(s, \theta) f\,ds\right]. \qquad (4)$$

La fonction μ est définie par l'une quelconque des expressions suivantes, équivalentes comme on le montre par la théorie des surfaces:

$$\mu(t, t', \theta) = e^{\int_t^{t'} c(s, \theta)\mathrm{N}(s, \theta)ds} = \frac{d\sigma_{t'}}{d\sigma_t} = e^{\int_t^{t'}\left[\frac{1}{\mathrm{L}(s, \theta)} + \frac{1}{\mathrm{R}(s, \theta)}\right]\mathrm{N}(s, \theta)ds}$$

où $\mathrm{L}(s, \theta)$ est la longueur du segment de la normale à la surface s allant du point s, θ à l'axe de rotation, $\mathrm{R}(s, \theta)$ le rayon de courbure de la méridienne de cette même surface et $\dfrac{d\sigma_{t'}}{d\sigma_t}$ le rapport des aires de deux sections d'un tube de force élémentaire par les surfaces t et t'. En faisant $t' = 0$ on obtient la relation

$$g(t, \theta) = -\int_0^t \frac{d\sigma_s}{d\sigma_t}\frac{dn}{ds} f\,ds \qquad (5)$$

qu'on pourrait dans le cas de l'immobilité déduire du théorème de Gauss sur le flux et la masse en appliquant ce théorème à un tube de force élémentaire.

Sur la surface libre $t = e$ le coefficient de la pesanteur $g(e, \theta)$ est mesurable de sorte que la stratification dont dépendent les fonctions μ et N et la densité dont dépend f sont liées par la relation

$$g(e, \theta) = -\int_0^e \mu(t, s, \theta)\,\mathrm{N}(s, \theta) f\,ds. \qquad (6)$$

C'est une équation de Fredholm de première espèce en f la stratification étant supposée connue.

L'équation (1) permet d'écrire

$$\mathrm{H}(t) = -\int_0^t \mathrm{N}(s, \theta)\,\mathrm{N}(t, \theta)\,\mu(t, s, \theta) f\,ds \qquad (7)$$

et en soustrayant cette relation de celle qu'on obtiendrait en faisant $\theta = 0$ et en posant

$$G(t, s, \theta) = \left(\frac{dn}{ds}\frac{dn}{dt}\frac{d\sigma_s}{d\sigma_t}\right)_\theta - \left(\frac{dn}{ds}\frac{dn}{dt}\frac{d\sigma_s}{d\sigma_t}\right)_0$$

on trouve l'identité en t et θ:

$$\int_0^t G(t, s, \theta) f ds \equiv 0 . \tag{8}$$

Au voisinage du centre la fonction f est négative dans l'équilibre relatif, il est facile de s'en assurer par un raisonnement de Poincaré de sorte que la fonction G doit changer de signe lorsque s varie de o à t et cela quel que soit θ. En dérivant par rapport à t l'équation (8) on obtient une équation homogène de Volterra

$$G(t, t, \theta) f(t) + \int_0^t \frac{\partial G(t, s, \theta)}{\partial t} f(s) ds = 0$$

mais la théorie classique des équations de cette sorte ne s'y applique pas car on peut montrer que la dérivée $\frac{\partial G}{\partial t}$ devient infinie comme $\frac{1}{t}$ lorsque t tend vers zéro.

S'il fallait que G fût nulle identiquement, il faudrait conclure que les surfaces S_t sont parallèles et concentriques donc sphériques.

Voici enfin un problème de la théorie du potentiel qui se pose à propos de la recherche des figures d'équilibre:

A part le cas des sphères concentriques, peut-on répartir de deux manières différentes, sur les mêmes surfaces d'égale densité, une matière créant dans les deux cas le même potentiel à l'extérieur ?

Les surfaces S_t sont donc données, et il s'agit de savoir s'il y a deux lois de densité $\rho(t)$ et $\rho'(t)$ donnant le même potentiel à l'extérieur de la masse ?

Dans le cas des figures d'équilibre, on peut montrer que si les densités bifurquaient à partir d'une surface, cette surface serait parallèle aux surfaces infiniment voisines et le coefficient de la pesanteur y serait constant.