Sur l'existence d'un régime permanent de rotations dans un fluide hétérogène à stratification ellipsoïdale

Les deuxièmes cinèses montrent tantôt 10, tantôt 11 macrochromosomes. Vus de profil les chromosomes ont une forme en « biscuit » et leur clivage est très précoce.

Le cas de la Vipère se superpose exactement à celui des Lézards américains et de l'Orvet. Il est d'autant plus curieux de constater le non rattachement à cette formule des Lacertiliens « *sensu stricto* », formule qui, non générale pour les Sauriens, se montre à nouveau chez les Ophidiens.

Séance du 8 novembre 1928.

Pierre Dive. — *Sur l'existence d'un régime permanent de rotations dans un fluide hétérogène à stratification ellipsoïdale.*

Considérons un fluide hétérogène constitué de couches ellipsoïdales homogènes, infiniment minces, dont la densité croit avec la profondeur.

Les mouvements de rotation internes nécessaires pour maintenir cette masse dans sa stratification sont régis par la formule suivante que nous avons établie dans une note antérieure [1]:

$$\omega^2 = \frac{1}{\rho}\left(\rho_e \Omega_e - \int_{\beta}^{b_e} \Omega \frac{\partial \rho}{\partial \beta} \, d\beta\right) \qquad (1)$$

où

$$\Omega = \rho_e j_e \Upsilon(k_e, \tau) - \int_0^{\beta} j \Upsilon(s, \tau) \frac{dq}{db} \, db - \int_{\beta}^{b_e} j \Upsilon(k, \tau) \frac{dq}{db} \, db \, . \qquad (2)$$

Pour que les rotations permanentes envisagées puissent exister il est donc nécessaire et suffisant que l'expression Ω satisfasse à la condition:

$$\rho_e \Omega_e > \int_{\beta}^{b_e} \Omega \frac{\partial \rho}{\partial \beta} \, d\beta \, . \qquad (3)$$

[1] C. R. Soc. phys. et hist. nat. Genève, Vol. 44, No 2. Avril-Juillet 1927.

Or, il est évident, sur les formules (1) et (2) qu'il suffit, pour que l'expression de ω^2 soit positive quelle que soit la loi de variation $\frac{dq}{db}(< 0)$ de la densité q, que les fonctions $\Upsilon(s, \tau)$ et $\Upsilon(k, \tau)$, dans les intégrales

$$\int_0^\beta j\Upsilon(s, \tau)\frac{dq}{db}db \qquad \text{et} \qquad \int_\beta^{b_e} j\Upsilon(k, \tau)\frac{dq}{db}db ,$$

soient positives en tout point du domaine du fluide.

M. Michel Plancherel nous a aimablement fait remarquer que, contrairement à ce que nous avions indiqué dans notre dernier article aux *Archives* [1], la fonction $\Upsilon(t, \tau)$ pouvait, dans certains cas, devenir négative.

Une étude plus approfondie de son signe s'impose donc.

En admettant, comme dans notre première étude, que l'aplatissement des couches homogènes varie dans le même sens du centre à la surface, nous allons montrer qu'aucune de nos conclusions [2] sur les variations de ω^2 à l'intérieur du fluide ne doit être modifiée.

Commençons par établir quelques lemmes. On a:

$$\Upsilon(t, \tau) = 2\pi f\left[\operatorname{arctg} t - \frac{t}{1+t^2} - \frac{2}{1+\tau^2}(t - \operatorname{arctg} t)\right] , \qquad (4)$$

par suite en posant:

$$\mathrm{H}(t) = \frac{2(t - \operatorname{arctg} t)}{\operatorname{arctg} t - \dfrac{t}{1+t^2}} , \qquad (5)$$

et

$$h(t) = \frac{\mathrm{H}(t)}{1+t^2} , \qquad (6)$$

les inégalités:

$$\Upsilon(t, \tau) \gtrless 0$$

sont équivalentes aux inégalités:

$$1 + \tau^2 \gtrless \mathrm{H}(t) \qquad \text{ou} \qquad 1 + \tau^2 \gtrless (1 + t^2)\, h(t) . \qquad (7)$$

[1] Arch. Sc. phys. et nat., 5me période, Vol. 9, p. 384 (1927).
[2] Archives (loc. cit.), p. 389 et 390.

Dans ce qui suit nous supposerons toujours $t > 0$; dès lors, les rapports $\mathrm{H}(t)$ et $h(t)$ ont les propriétés suivantes:

1° *Le rapport H* (t) *est une fonction croissante de* t.

En effet, sa dérivée:

$$\frac{d}{dt}\mathrm{H}(t) = \frac{2t^2(3+t^2)\left(\operatorname{arctg} t - \dfrac{3t}{3+t^2}\right)}{(1+t^2)^2\left(\operatorname{arctg} t - \dfrac{t}{1+t^2}\right)^2} \tag{8}$$

a le même signe que l'expression:

$$u(t) = \operatorname{arctg} t - \frac{3t}{3+t^2} \tag{9}$$

dont la dérivée:

$$\frac{d}{dt}u(t) = \frac{t^2(9+t^2)}{(1+t^2)(3+t^2)^2} \tag{10}$$

est essentiellement positive. Or, pour $t = 0$, $u = 0$; donc $u(t)$ est positif pour toute valeur positive de t; et il en est de même de $\frac{d\mathrm{H}}{dt}$.

— Pour $t = 0$, le rapport $\mathrm{H}(t)$ prend la forme illusoire $\frac{0}{0}$. Développons ses deux termes en série par rapport aux puissances croissantes de t; on aura:

$$\lim_{t=0} \mathrm{H}(t) = \lim_{t=0} \frac{2\dfrac{t^3}{3}\cdots}{2\dfrac{t^3}{3}\cdots} = 1 \;;$$

par suite,

2°, *le rapport* H(t) *est constamment supérieur à* 1.

3°, *Le rapport* h(t) *est compris entre* 0 *et* 1.

Ceci résulte de ce que la différence

$$(1+t^2)\operatorname{arctg} t - t - 2(t - \operatorname{arctg} t) = (3+t^2)\,u(t)$$

est toujours positive.

Nous pouvons maintenant chercher dans quelles hypothèses sur la loi de variation de l'aplatissement des couches homogènes les fonctions $\Upsilon(s, \tau)$ et $\Upsilon(k, \tau)$, prises respectivement dans les intervalles $(0, \beta)$ et (β, b_e), sont positives quels que soient β et x^2 ($< \alpha^2$). Envisageons les cinq cas suivants:

Premier cas. *L'aplatissement des couches croit du centre à la surface.*

On a évidemment $\tau > s$, donc aussi $1 + \tau^2 > 1 + s^2$ et, *a fortiori* en vertu du lemme 3°, $1 + \tau^2 > (1 + s^2) h(s)$ ou $1 + \tau^2 > \mathrm{H}(s)$. Par suite $\Upsilon(s, \tau)$ est nécessairement positive.

D'autre part, comme on a, dans l'intervalle (β, b_e), $\tau < k$, on a aussi $1 + \tau^2 < 1 + k^2$; de sorte que la condition $1 + \tau^2 > (1 + k^2) h(k)$ ou $1 + \tau^2 > \mathrm{H}(k)$ n'est pas certainement satisfaite en tout point du fluide; pour qu'elle le soit il faut et il suffit qu'on ait:

$$\boxed{1 + k_0^2 > \mathrm{H}(k_e)} \tag{11}$$

k_0 et k_e désignant l'aplatissement au centre et à la surface.

Deuxième cas. *Les couches sont homothétiques.*

On a toujours $\tau > s$, et $\Upsilon(s, \tau)$ est encore constamment positive.

Dans l'intervalle (β, b_e) on a, quel que soit β, $\tau = k$ d'où $1 + \tau^2 = 1 + k^2$ et, en vertu du lemme 3°, $1 + \tau^2 > \mathrm{H}(k)$. La fonction $\Upsilon(k, \tau)$ est donc aussi nécessairement positive.

Troisième cas. *L'aplatissement décroit du centre à la surface moins vite que si les couches étaient homofocales.*

Dans l'intervalle $(0, \beta)$ on a encore $\tau > s$; dans (β, b_e) on a $\tau > k$. Les fonctions $\Upsilon(s, \tau)$ et $\Upsilon(k, \tau)$ sont encore positives.

Quatrième cas. *Les couches sont homofocales.*

Dans ce cas $\tau = s$ dans $(0, \beta)$ et $\tau > k$ dans (β, b_e). Les fonctions $\Upsilon(s, \tau)$ et $\Upsilon(k, \tau)$ sont donc toujours positives.

Cinquième cas. *L'aplatissement décroit du centre à la surface plus vite que si les couches étaient homofocales.*

Cette fois $\tau < s$ dans $(0, \beta)$ et $\tau > k$ dans (β, b_e). La fonction $\Upsilon(k, \tau)$ est positive dans tout le domaine du fluide; mais il n'est pas certain qu'il en soit de même pour la fonction $\Upsilon(s, \tau)$.

Toutefois, en raison de la continuité de cette fonction par rapport à ses arguments, on peut prévoir qu'elle sera encore positive pour toute loi de variation de l'aplatissement assez voisine de celle des couches homofocales.

— Ainsi donc les fonctions $\Upsilon(s, \tau)$ et $\Upsilon(k, \tau)$ sont certainement positives dans les deuxième, troisième et quatrième cas. Quelle que soit la loi de variation de la densité $\left(\frac{dq}{db} < 0\right)$ il en est, par suite, de même des expressions (2) et (1) de Ω et de ω^2 et l'on est assuré, dans chacun de ces cas, de l'existence d'un régime permanent de rotations.

— Cherchons à obtenir une conclusion plus générale. Pour cela examinons comment varie la fonction $\Upsilon(s, \tau)$ par rapport aux variables x^2 et b^2 dont elle dépend par l'intermédiaire de s.

On a:

$$\frac{\partial}{\partial b^2}\Upsilon(s, \tau) = \frac{d}{ds}\Upsilon(s, \tau) \cdot \frac{\partial s}{\partial b^2} \cdot \tag{12}$$

Or, nous avons trouvé [1]:

$$\frac{d}{ds}\Upsilon(s, \tau) = 4\pi f \xi^2 \frac{s^2}{(1+s^2)^2} \cdot (\tau^2 - s^2) , \quad \left(\xi^2 = \frac{1}{1+\tau^3}\right) , \tag{13}$$

et on tirera $\frac{\partial s}{\partial b^2}$ des équations:

$$\frac{x^2}{1+\tau^2} + z^2 = \beta^2 ,$$

$$\frac{x^2}{1+s^2} + z^2 = \frac{c^2}{s^2} ,$$

il vient:

$$\frac{\partial s}{\partial b^2} = \frac{s(1+s^2)}{2(s^4 z^2 + c^2)} \cdot \frac{dc^2}{db^2} , \tag{14}$$

Pour abréger l'écriture, posons:

$$G^2(b^2) = \frac{s^2(1+s^2)}{s^4 z^2 + c^2} , \tag{15}$$

on aura:

$$\frac{\partial}{\partial b^2}(\tau^2 - s^2) = -2s\frac{\partial s}{\partial b^2} = -G^2\frac{dc^2}{db^2} , \tag{16}$$

[1] Arch. Sc. phys. et nat., 5me période, vol. 9, p. 387 (1927).

d'où, en se souvenant que s est égal à τ pour $b = \beta$,

$$\tau^2 - s^2 = \int_{b^2}^{\beta^2} G^2 \frac{dc^2}{db^2} db^2 . \tag{17}$$

En portant alors les expressions calculées dans les formules (13) et (12) on obtient:

$$\frac{\partial}{\partial b^2} \Upsilon(s, \tau) = 2\pi f \xi^2 \frac{s}{(1 + s^2)^2} \cdot G^2 \frac{dc^2}{db^2} \cdot \int_{b^2}^{\beta^2} G^2 \frac{dc^2}{db^2} db^2 \; ; \tag{18}$$

et il est visible sur cette formule qu'il faut et *il suffit* que c^2 *soit une fonction monotone croissante ou décroissante de* b^2 pour que $\Upsilon(s, \tau)$ soit une fonction constamment croissante de b^2.

Cette condition est réalisée dans les cinq cas précédents; on a, en effet, $\frac{dc^2}{db^2} > \frac{c^2}{b^2} > 0$ dans le premier cas, $\frac{dc^2}{db^2} = \frac{c^2}{b^2} > 0$ dans le second, $0 < \frac{dc^2}{db^2} < \frac{c^2}{b^2}$ dans le troisième, $\frac{dc^2}{db^2} = 0$ dans le quatrième, $\frac{dc^2}{db^2} < 0$ dans le cinquième.

Prenons maintenant la dérivée de $\Upsilon(s, \tau)$ par rapport à x^2; on a:

$$\frac{\partial}{\partial x^2} \Upsilon(s, \tau) = \frac{d}{ds} \Upsilon(s, \tau) \frac{\partial s}{\partial x^2} , \tag{19}$$

en remplaçant $\frac{d}{ds} \Upsilon(s, \tau)$ et $\frac{\partial s}{\partial x^2}$ par leurs expressions déjà connues[1] et en tenant compte de la relation (17), il vient:

$$\frac{\partial}{\partial x^2} \Upsilon(s, \tau) = - 2\pi f \xi^4 \frac{s^5}{(1 + s^2)^2 (s^4 z^2 + c^2)} \cdot \left[\int_{b^2}^{\beta^2} G^2 \frac{dc^2}{db^2} db^2 \right]^2 ; \tag{20}$$

$\Upsilon(s, \tau)$ est donc essentiellement une fonction décroissante de x^2.

De la discussion précédente, il résulte qu $\Upsilon(s, \tau)$ sera certainement positive en tout point du fluide si elle est positive pour la valeur minimum 0 de b, et pour la valeur maximum α^2 de x^2.

[1] *Archives* (loc. cit.), p. 387.

En remarquant que s est alors égal à $\left(\frac{\alpha^2}{a_0^2} - 1\right)^{-\frac{1}{2}}$, il faudra que l'on ait:

$$\boxed{\tau^2(\alpha^2) > \mathrm{H}\left[\left(\frac{\alpha^2}{a_0^2} - 1\right)^{-\frac{1}{2}}\right] - 1} \, , \tag{21}$$

où a_0 désigne le demi-axe équatorial de la couche centrale (a_0 peut d'ailleurs être nul).

En résumé, si l'on forme sur le fluide considéré les deux hypothèses suivantes:

1° la densité décroit constamment du centre à la surface,

2° l'aplatissement et l'axe focal d'une couche sont des fonctions monotones de son axe polaire,

on peut énoncer ce résultat global:

Pour toute loi de variation de l'aplatissement satisfaisant aux conditions (11) *et* (21) (dont l'une au moins est satisfaite en vertu de la deuxième hypothèse), *il existe, quelle que soit la loi de variation de la densité, un régime permanent de rotations, défini par l'équation* (1), *maintenant le fluide dans sa stratification initiale.*

Queuille, Juillet 1928.

Rolin Wavre. — *Sur les lignes de forces du champ de la pesanteur.*

Dans la séance du 17 novembre 1927, nous avons fait connaître une formule utile pour la géodésie dont nous voulons ici tirer quelque parti

En priant le lecteur de bien vouloir se référer à notre note (Compte rendu des Séances vol. 44, n° 3, p. 161-162) pour la signification des symboles cette formule (5) s'écrit:

$$\frac{dg}{dn} - cg = 2\omega^2 - 4\pi\varepsilon\rho$$

dans le cas d'un équilibre relatif à vitesse angulaire ω.

Elle s'applique à toute portion d'un fluide (parfait ou visqueux telle qu'un lac) en équilibre relatif dans sa rotation ω.

De cette formule nous avons déduit les conséquences suivantes:

1° Si dans une portion du fluide les surfaces d'égale densité sont parallèles, elles sont aussi à courbure moyenne constante.

2° Si la tangente à une ligne de force du champ de la pesanteur est stationnaire en un point, la courbure moyenne de la surface d'égale densité passant par ce point y est également stationnaire.

Fernand Chodat. — *Rôle des plantes dans l'équilibre atmométrique de leurs phyllosphères.*

Dans les trois notes que nous avons publiées sur le problème de l'atmométrie les résultats de notre enquête au Jardin Alpin de la Linnaea ont été commentés au point de vue de l'écologie. On ne pouvait cependant négliger l'analyse de l'équilibre atmométrique réalisé entre le sol et sa couverture végétale. Les plantes modifient-elles le taux de l'évaporation du terrain ? Quel est le signe de cette correction, peut-on en donner une mesure ? Tels sont les problèmes soulevés par nos observations.

Nous avons pu montrer, dans la précédente note, que la végétation se comporte comme un écran qui diminue l'évaporation du sol. Pour en fournir la preuve nous dénudions une surface de sa végétation et déterminions l'évaporation de ce lieu. Une semblable mesure effectuée dans la partie non fauchée de la même association végétale dénonçait un taux d'évaporation moindre que celui du lieu dénudé. Ces résultats ont été confirmés pour les différentes formations que nous avons étudiées. Des précautions ont été prises pour que les deux éléments se trouvent dans des conditions aussi égales que possible, abstraction faite de la végétation.

Nous avons établi les corrections suivantes:

L'évaporation d'un élément situé dans la prairie Est *(Meetum athamantici)* n'est que le 71 % de l'évaporation du même lieu fauché. Pour la végétation du sous-bois (mégaphorbiée: *Adenos-*