Le problème de l'index de couleur en astronomie physique

Autor(en): **Rossier, Paul**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Archives des sciences physiques et naturelles**

Band (Jahr): **12 (1930)**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-741233

LE PROBLÈME DE L'INDEX DE COULEUR

EN ASTRONOMIE PHYSIQUE

PAR

Paul ROSSIER

CHAPITRE PREMIER.

RÉCEPTEURS D'ÉNERGIE RAYONNANTE

§ 1. — ETALONNAGE ET SENSIBILITÉ D'UN RÉCEPTEUR.

Soit $e(\lambda)d\lambda$ l'énergie comprise entre les longueurs d'onde λ et $\lambda + d\lambda$, reçue par un récepteur d'énergie rayonnante. Soit $\alpha d\lambda$ la déviation correspondante de son organe de lecture. Faisons varier $e(\lambda)$, λ restant constant; si certaines précautions sont prises, il existe une relation entre α et $e(\lambda)$.

Traduite graphiquement, cette relation donne la courbe d'étalonnage du récepteur, pour la longueur d'onde λ.

Répétons la même opération en choisissant une autre longueur d'onde λ_1. En général, la courbe d'étalonnage varie. Si elle ne varie pas, le récepteur est un récepteur intégral (radiomètre, pile thermo-électrique, bolomètre).

Supposons que, la courbe d'étalonnage ayant été réalisée pour une certaine longueur d'onde λ, on l'utilise pour une autre longueur d'onde λ_1. Appelons puissance réduite, relative à λ, la puissance apparente obtenue dans ces conditions.

Laissons λ constant, et faisons varier λ_1. La courbe de la puissance apparente est une droite, si le récepteur est un récepteur intégral. Dans le cas contraire, elle présente un ou plusieurs maxima (récepteurs de première et de deuxième espèces). L'ordonnée s'annule pour des valeurs extrêmes de λ_1. Cette courbe est la courbe de sensibilité du récepteur considéré, rapportée à la longueur d'onde λ (courbe $\sigma(\lambda_1)$). Répétons la même opération pour diverses puissances de comparaison. Si les diverses courbes obtenues sont identiques, à un changement d'échelle des ordonnées près, nous dirons que le récepteur considéré ne présente pas le phénomène de *Purkinje.*

En général, on choisit comme longueur d'onde d'étalonnage initial, celle qui correspond au maximum de sensibilité, du moins pour les récepteurs ne présentant pas le phénomène de Purkinje. Cela revient à dire qu'on pose la sensibilité égale à 1 pour cette longueur d'onde. Les nombres qui expriment la sensibilité seront alors tous compris entre 0 et 1.

On peut aussi réaliser l'étalonnage par rapport à un domaine étendu de longueurs d'onde.

Un récepteur intégral recevant une puissance sur un domaine étendu de longueurs d'onde se comporte comme si cette puissance était concentrée sur une longueur d'onde unique. Nous admettrons dans la suite qu'un récepteur quelconque opère de même pour les puissances réduites.

§ 2. — Cas particulier des plaques photographiques.

La « déviation » α est le noircissement observé sur la plaque. Le noircissement est le rapport :

$$\frac{I_0 - I}{I_0},$$

où I et I_0 sont les intensités d'un même faisceau de lumière observé respectivement au travers de la portion utilisée de la plaque et à travers une portion non impressionnée. L'expérience montre que cette quantité est proportionnelle à la quantité d'argent réduit.

Pour les plaques ordinaires, la sensibilité varie comme suit : elle est nulle pour toutes les grandes longueurs d'onde, jusqu'au vert; là commence une augmentation rapide dans le bleu, avec un maximum relativement plat dans le violet; la sensibilité diminue dans l'ultra-violet.

En traitant la plaque convenablement, on l'orthochromatise, c'est-à-dire qu'on augmente sa sensibilité au jaune et au vert. Fréquemment il se produit un second maximum de sensibilité dans la région du jaune-vert. Parfois, pour des plaques panchromatiques, on obtient deux maxima secondaires, dans le vert et l'orangé par exemple.

S'il s'agit de déterminations d'éclat total (cas des étoiles), on utilise deux procédés; on effectue des mesures au microphotomètre de Hartmann, qui donne les résultats les plus précis que puisse actuellement fournir la photométrie photographique; la méthode des diamètres permet la détermination des magnitudes par interpolation. Elle est moins précise que le procédé microphotométrique.

En ce qui concerne la grandeur photographique, le centième de magnitude est une limite de précision qui n'est atteinte qu'avec de grands soins.

Dans ses travaux sur les Céphéides, M. Tiercy a déterminé par interpolation des magnitudes au moyen de spectrogrammes obtenus au prisme-objectif. M. Tiercy admet, au moins en première approximation, que, pour une pose de durée constante, pour un élargissement invariable, il existe une relation bilinéaire entre la longueur impressionnée du spectre (longueur du spectre moins somme des largeurs des raies) et la magnitude. Cette méthode, inaugurée à l'Observatoire d'Arcetri[1], est actuellement essayée à l'Observatoire de Genève.

S'il s'agit d'étudier la répartition de l'énergie dans le spectre, on fait défiler le spectrogramme devant un microphotomètre enregistreur.

On pourrait peut-être aussi mesurer la largeur d'un spectrogramme non élargi, obtenu au moyen d'un système objectif suffisamment achromatique et aplanétique, donc avec un prisme-objectif accouplé à un miroir parabolique.

Le procédé de M. Tiercy pourrait aussi fournir quelques

[1] *Publicazioni del R. Osservatorio Astrofisico di Arcetri*, fasc. 44.

données sur la répartition de l'énergie. Il suffirait de mesurer le rapport des distances d'une raie, choisie une fois pour toutes, aux deux extrémités du spectre. L'étoile sera d'autant plus bleue que la longueur de la portion violette et ultra-violette du spectre sera plus considérable.

§ 3. — Cas de l'œil.

Sa sensibilité est étudiée par la méthode du papillotage [1]. On substitue, à une fréquence de l'ordre de 15 à la seconde, deux lumières, l'une blanche, l'autre de composition spectrale simple. L'œil voit papilloter le champ d'observation. L'expérience montre que ce papillotage disparaît pour un rapport donné des intensités lumineuses. On pose que, par définition, l'égalité des sensations est alors réalisée. La courbe de la quantité de blanc nécessaire pour égaler une quantité de lumière quelconque donne une courbe de sensibilité. L'expérience montre que le maximum de sensibilité, relativement stable dans le jaune pour de très forts éclairements, passe insensiblement au vert et au bleu lorsque l'éclairement diminue (phénomène de Purkinje). Si, avec un éclairement donné, la sensibilité est peu variable pour un même œil, ou pour la moyenne d'un groupe d'observateurs, le phénomène de Purkinje est beaucoup plus capricieux.

L'allure de la courbe de sensibilité de l'œil est la même que celle d'une plaque photographique ordinaire. Le maximum en est cependant plus aigu.

Quoique l'œil nu ait servi aux premières estimations d'éclat d'étoiles, il ne constitue pas un appareil de mesure. Seule l'adjonction d'un photomètre le transforme en un appareil de physique.

La précision des mesures les plus sûres effectuées au moyen d'un photomètre visuel n'atteint pas le centième de magnitude.

[1] H. Bouasse, *Emission, chaleur solaire*, Delagrave (1925), p. 206.

§ 4. — Cas des piles photo-électriques.

La quantité à mesurer est un courant électrique de l'ordre de 10^{-15} ampère, ce qui n'est pas sans présenter des difficultés d'ordre expérimental. Par contre la précision est très grande, puisque le centième de magnitude est atteint.

Les courbes de sensibilité ont toutes la même allure que celle de l'œil [1].

Lorsque le poids atomique du métal actif augmente, le maximum de sensibilité devient moins aigu, et se déplace vers les grandes longueurs d'onde. La sensibilité globale diminue.

§ 5. — Expression analytique des courbes de sensibilité.

Nous appellerons courbes et récepteurs de première espèce les courbes de sensibilité ne présentant qu'un seul maximum. Pour l'œil [2], Ives a donné l'expression suivante:

$$\sigma(\lambda) = \mathrm{C}\left(\frac{\lambda_m}{\lambda} e^{1-\frac{\lambda_m}{\lambda}}\right)^n , \tag{1}$$

où λ_m est une constante et n un exposant entier positif. Les valeurs numériques de ces constantes sont de l'ordre de:

$$\begin{cases} \lambda_m = (5{,}5)\,.\,10^{-5} \text{ cm} , \\ n = 181 . \end{cases}$$

Nous admettrons que tous les récepteurs de première espèce possèdent des courbes de sensibilité dont l'expression analytique est la même que celle ci-dessus.

Pour les plaques orthochromatiques et panchromatiques et pour certaines plaques ordinaires il y aura lieu de considérer

[1] Rougier, La mesure de l'énergie lumineuse des étoiles, *Bulletin de la Soc. astr. de France*, 1925, p. 66.

[2] H. Bouasse. *Emission*, etc., p. 209.

des courbes possédant plusieurs maxima. Nous admettrons que les ordonnées de ces courbes peuvent être considérées comme la somme d'ordonnées de courbes de première espèce en nombre égal à celui des maxima (courbes et récepteurs de deuxième espèce).

§ 6. — Quelques propriétés des courbes de première espèce.

Posons $C = 1$:

$$\sigma(\lambda) = \left(\frac{\lambda_m}{\lambda} e^{1-\frac{\lambda_m}{\lambda}}\right)^n . \tag{2}$$

Il suffit de considérer les cas où λ est positif. Si:

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_m , & \sigma &= 1 ; \\ \lambda &= 0 , & \sigma &= 0 ; \\ \lambda &= \infty , & \sigma &= 0 ; \end{aligned}$$

ce sont les seuls cas où σ est nulle. A part cela, σ est toujours positive.

Dérivons (2):

$$\frac{d\sigma}{d\lambda} = \frac{n}{\lambda}\left(\frac{\lambda_m}{\lambda} - 1\right) . \sigma . \tag{3}$$

La dérivée ne s'annule que si σ s'annule elle-même ou si $\lambda = \lambda_m$. La constante λ_m représente la longueur d'onde du maximum de sensibilité.

Appelons points correspondants, deux points d'ordonnées égales. Soit:

$$\lambda_1 < \lambda_m , \qquad \lambda_2 > \lambda_m , \qquad \sigma(\lambda_1) = \sigma(\lambda_2) ; \tag{4}$$

il vient:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = e^{\lambda_m\left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right)} . \tag{5}$$

Le rapport des abscisses de deux points correspondants est indépendant de l'exposant n. Nous allons voir qu'il en est de même pour les pentes de la courbe en ces points.

Pour cela, formons:

$$\frac{\frac{d\sigma}{d\lambda_1}}{\frac{d\sigma}{d\lambda_2}} = \frac{\lambda_2^2(\lambda_m - \lambda_1)}{\lambda_1^2(\lambda_m - \lambda_2)} . \tag{6}$$

Calculons la deuxième dérivée de σ, afin d'étudier la courbure de la courbe au voisinage du sommet. On a:

$$\frac{d^2\sigma}{d\lambda^2} = \frac{n\sigma}{\lambda^2}\left(n\left[\frac{\lambda_m}{\lambda} - 1\right]^2 - 2\frac{\lambda_m}{\lambda} + 1\right) . \tag{7}$$

Faisons $\lambda = \lambda_m$.

$$\left(\frac{d^2\sigma}{d\lambda^2}\right)_{\lambda=\lambda_m} = -\frac{n}{\lambda_m^2} . \tag{8}$$

Pour λ_m constant, le maximum sera d'autant plus aigu que n sera plus grand.

Supposons au contraire λ_m variable et n constant. A une diminution de λ_m correspond une augmentation de l'acuité du maximum.

Si n est variable, à une diminution simultanée de l'acuité du maximum et de λ_m, correspond une diminution de n.

§ 7. — Quelques propriétés des courbes de deuxième espèce.

Elles sont définies par l'équation:

$$\sigma(\lambda) = \sum_{i=1}^{i=k} C_i\left(\frac{\lambda_i}{\lambda}e^{1-\frac{\lambda_i}{\lambda}}\right)^{n_i} . \tag{9}$$

Comme précédemment, σ n'est nulle que pour $\lambda = 0$ et $\lambda = \infty$.

Par contre, les valeurs λ_i de λ ne correspondent pas à des maxima de σ. Par exemple, dans le cas d'une courbe à deux maxima, les longueurs d'ondes correspondant aux maxima sont comprises entre λ_1 et λ_2.

Le rapport de deux constantes c_i est de l'ordre de grandeur du rapport des ordonnées maximales correspondantes.

Les portions extrêmes des courbes sont essentiellement déterminées par les addendes qui possèdent les maxima extrêmes. En effet, pour que le premier maximum (d'abscisse λ_1) soit marqué, il faut que λ_1 soit notablement inférieur aux autres λ_i. Et alors, sauf pour le premier terme, l'exponentielle $\left(e^{1-\frac{\lambda_i}{\lambda_1}}\right)^n$ est relativement petite. $\sigma(\lambda_1)$ est donc de l'ordre de C_1, au voisinage de $\lambda = \lambda_1$.

On opèrerait de même sur le facteur $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_k}\right)^n$, pour voir ce qui se passe au voisinage de $\lambda = \lambda_k$.

Chapitre II.

DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS DE L'INDEX DE COULEUR

§ 8. — Magnitude d'une étoile pour un récepteur donné.

Soit $\sigma(\lambda)$ la sensibilité du récepteur et $e(\lambda)$ la fonction représentant la répartition de l'énergie dans le spectre.

L'éclat de l'étoile pour ce récepteur sera:

$$E_r = \int_0^\infty \sigma(\lambda)\, e(\lambda)\, d\lambda \ ; \qquad (10)$$

ou en magnitudes:

$$M_r = 2{,}5\,(\log \mathcal{E} - \log E_r) \ . \qquad (11)$$

$\mathcal{E}$ est l'éclat de l'étoile dont la magnitude est nulle par convention.

§ 9. — Index de couleur relatif a deux récepteurs.

Soient M_1 et M_2 les magnitudes d'une étoile relatives à deux récepteurs r_1 et r_2. On appelle index de couleur relatif aux récepteurs r_1 et r_2 la différence:

$$I_{1,2} = M_1 - M_2 = 2,5\left(\log \frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2} - \log \frac{E_1}{E_2}\right) ; \tag{12}$$

On a évidemment:

$$I_{1,2} = - I_{2,1} . \tag{13}$$

Nous appellerons *étoile fondamentale* celle pour laquelle $I_{1,2} = 0$. Si cette étoile est donnée, cela impose une relation entre les constantes qui figurent dans (12). Cette relation est:

$$\frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2} = \frac{E_{1,f}}{E_{2,f}} , \tag{14}$$

où l'indice f indique que l'étoile considérée est la fondamentale.

On la réalise généralement en posant:

$$E_{1,f} = E_{2,f} \qquad \text{d'où} \qquad \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 . \tag{15}$$

Dans ces conditions (12) devient:

$$I_{1.2} = - 2,5 \log \frac{E_1}{E_2} = - 2,5 \log \frac{\int_0^\infty \sigma_1(\lambda) . e(\lambda)\, d\lambda}{\int_0^\infty \sigma_2(\lambda) . e(\lambda)\, d\lambda} . \tag{16}$$

§ 10. — Propriété fondamentale de l'index de couleur.

Supposons que les récepteurs *ne présentent pas le phénomène de Purkinje.* La fonction $e(\lambda)$ ne contient que la seule variable λ.

Considérons deux étoiles pour lesquelles la répartition de l'énergie $e(\lambda)$ dans le spectre est la même, sans que l'éclat soit égal. Cela signifie que les deux fonctions $e'(\lambda)$ et $e''(\lambda)$ relatives à ces deux étoiles sont proportionnelles l'une à l'autre:

$$a e'(\lambda) = e''(\lambda) . \tag{17}$$

Calculons les indices:

$$I''_{1,2} = -2{,}5 \log \frac{\int_0^\infty \sigma_1(\lambda)\, e''(\lambda)\, d\lambda}{\int_0^\infty \sigma_2(\lambda)\, e''(\lambda)\, d\lambda} = -2{,}5 \log \frac{a\int_0^\infty \sigma_1(\lambda)\, e'(\lambda)\, d\lambda}{a\int_0^\infty \sigma_2(\lambda)\, e'(\lambda)\, d\lambda} = I'_{1,2} . \tag{18}$$

L'index de couleur ne dépend que de la répartition de l'énergie dans le spectre de l'étoile. En particulier, il est indépendant de la magnitude apparente de l'étoile.

§ 11. — Index de couleur absolu relatif a un récepteur.

Nous appellerons ainsi l'index obtenu si r_2 est un récepteur intégral.

Cet index présente l'avantage, sur l'index photo-visuel, par exemple, de ne dépendre que d'une seule courbe de sensibilité.

§ 12. — Relations entre les indices relatifs a trois récepteurs pris deux a deux.

Si l'étoile fondamentale est la même pour les trois indices que l'on peut calculer en combinant deux à deux trois récepteurs, on a:

$$I_{1,2} - I_{2,3} = I_{1,3} . \tag{19}$$

En particulier, si r_2 est un récepteur intégral:

$$I_1 - I_3 = I_{1,3} . \tag{20}$$

La connaissance des indices absolus relatifs à divers récepteurs dispense de celle des indices relatifs à ces récepteurs pris deux à deux.

Chapitre III.

CALCUL SIMPLE DE L'INDEX PHOTO-VISUEL

§ 13. — Généralités.

Dans ce chapitre, nous ferons les hypothèses suivantes:

a) Le rayonnement des étoiles peut être assimilé à celui d'un corps noir. La fonction $e(\lambda)$ sera donc :

$$e(\lambda) = \frac{C}{\lambda^5\left(e^{\frac{1,432}{\lambda T}} - 1\right)} = \frac{C}{\lambda^5\left(10^{\frac{0,624}{\lambda T}} - 1\right)}, \quad \text{(loi de Planck)}; \qquad (21)$$

ou pour simplifier, mais avec moins de précision :

$$e(\lambda) = \frac{C}{\lambda^5 e^{\frac{1,432}{\lambda T}}} = \frac{C}{\lambda^5 10^{\frac{0,624}{\lambda T}}}, \quad \text{(loi de Wien)}. \qquad (22)$$

Nous supposons λ mesuré en cm.

b) La sensibilité de l'œil est nulle, sauf pour une longueur d'onde unique λ_v.

c) Même hypothèse pour la plaque photographique, pour la valeur λ_p.

§ 14. — Première approximation.

Ajoutons une quatrième hypothèse aux précédentes:

d) Le soleil a qualité pour déterminer les constantes numériques d'une formule générale.

Calculons la puissance rayonnée par l'étoile en admettant la loi de Wien:

$$E = A \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^5 10^{\frac{k}{\lambda T}}}, \qquad k = 0,624 . \qquad (23)$$

La constante A dépend de la grandeur géométrique de l'étoile, de la constitution de son atmosphère, etc. La magnitude relative à un récepteur sensible à l'unique longueur d'onde λ_0 est:

$$M_0 = B - 2{,}5 \log \frac{1}{\lambda_0^5 \, 10^{\frac{k}{\lambda T}}} = B + 12{,}5 \log \lambda_0 + \frac{2{,}5\,k}{\lambda_0 T} \;, \qquad (24)$$

où B est une nouvelle constante.

La somme des deux premiers termes n'est fonction que de λ_0. En remplaçant k par sa valeur, il vient:

$$M_0 = C(\lambda_0) + \frac{1{,}560}{\lambda_0 T} \;. \qquad (25)$$

Choisissons pour λ_v et λ_p les valeurs données par M. Brill [1]:

$$\lambda_v = 5{,}29 \,.\, 10^{-5}\ \text{cm} \;; \qquad \lambda_p = 4{,}25 \,.\, 10^{-5}\ \text{cm} \;. \qquad (26)$$

Formons l'index correspondant:

$$I_{p,v} = D + \frac{1{,}560}{T}\left(\frac{1}{4{,}25} - \frac{1}{5{,}29}\right) . \, 10^5 = D + \frac{7210}{T} \;, \qquad (27)$$

où D est une constante. Déterminons-la en appliquant notre formule au soleil [2], pour lequel:

$$I_{p,v} = 0{,}55 \qquad \text{et} \qquad T = 6200 \;. \qquad (28)$$

Il vient:

$$(I_{p,v} + 0{,}611) \,.\, T = 7210 \;, \qquad (29)$$

qui est la formule indiquée par M. Russel [3].

[1] *Astronomische Nachrichten*, 219, 5254, (1923).

[2] Remarquons qu'on pourrait faire intervenir les étoiles A_0 qui constituent un ensemble d'étoiles fondamentales. En admettant $T = 11000$, $I = 0$, il viendrait $D = -0{,}654$.

[3] Russel, Dugan, Stewart, *Astronomy*, II, p. 733.

G. Tiercy, *Archives*, 5 (10), p. 365 (1928); *Publications de l'Obs. de Genève*, fascicule 6.

§ 15. — Calcul direct de la constante D.

Nous allons voir que l'hypothèse (*d*) est inutile, et que la théorie précédente permet de calculer D.

On a en effet:

$$D = C(\lambda_p) - C(\lambda_v) = (B + 12{,}5 \log \lambda_p) - (B + 12{,}5 \log \lambda_v) =$$
$$= 12{,}5 \log \frac{\lambda_p}{\lambda_v} = -1{,}19 \ . \qquad (30)$$

La formule devient:

$$(I_{p,v} + 1{,}19)T = 7210 \ . \qquad (31)$$

Il est certain que cette formule est en contradiction avec l'expérience, puisqu'elle l'est avec (29).

§ 16. — Deuxième approximation.

Après avoir trouvé des valeurs inacceptables pour I en appliquant la formule (29) aux Céphéides, M. Tiercy[1] s'est proposé d'améliorer la relation entre T et I, en remplaçant la loi de Wien par celle de Planck, mise sous la forme:

$$e(\lambda) = \frac{C}{\lambda^5 \, 10^{\frac{k}{\lambda T}} \left(1 - 10^{-\frac{k}{\lambda T}}\right)} \ . \qquad (32)$$

Un calcul analogue au précédent donne:

$$M_r = C(\lambda_0) + \frac{1{,}560}{\lambda T} + x(\lambda, T) \ , \qquad (33)$$

où:

$$x(\lambda, T) = 2{,}5 \log\left(1 - 10^{-\frac{k}{\lambda T}}\right) \ ; \qquad (34)$$

[1] *Archives*, (5), 10, p. 363; *Publications de l'Observatoire de Genève*, fasc. 6.

et enfin pour $I_{p,v}$:

$$(I_{p\,v} - \alpha)\,.\,T = 7210\ , \tag{35}$$

en posant:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_1 + \alpha_2\ , \\ \alpha_1 &= C(\lambda_p) - C(\lambda_v)\ , \\ \alpha_2 &= x(\lambda_p\,,\ T) - x(\lambda_v\,.\ T)\ . \end{aligned} \tag{36}$$

La formule (35) a même forme que (27), où D est remplacé par α; mais α y est variable.

M. Tiercy calcule une table de α_2 d'où il résulte que α_2 varie de 0,0001 à 0,0530, lorsque T passe de 3000 à 12000 degrés. α_2 reste inférieur à 0,01 tant que T n'atteint pas 6000 degrés.

M. Tiercy considère α comme fonction du type spectral et détermine expérimentalement ses valeurs en faisant intervenir le soleil et les céphéides étudiées par lui. Les variations de α déduites de l'expérience atteignent 0,07 (pour des spectres allant de G_5 à F_0) et 0,16 (de K_0 à A_5).

Elles dépassent donc notablement les variations de α_2.

§ 17. — Etude de la fonction α.

Remarquons que le premier terme α_1 de α est égal à la constante D de la formule (27). On a donc:

$$\alpha = -1{,}19 + \alpha_2\ . \tag{37}$$

Mais les variations de α sont nettement supérieures à celles de α_2. Le désaccord entre l'expérience et la formule (29) n'est donc pas dû à l'erreur faite en adoptant la loi de Wien.

§ 18. — Modification des longueurs d'onde de M. Brill.

Cherchons une relation à laquelle λ_p et λ_v devraient satisfaire pour que α fût mieux en accord avec la réalité.

Les valeurs proposées par M. Tiercy donnent:

Type spectral	α	α_2	α_1
F_0	— 0,650	+ 0,022	— 0,628
F_{5-6}	— 0,640	+ 0,015	— 0,625
G_0	— 0,615	+ 0,010	— 0,605
G_5	— 0,580	+ 0	— 0,580

La moyenne des valeurs de α_1 est — 0,609. Posons donc:

$$\alpha_1 = -0{,}609 = 12.5 \log \frac{\lambda_p}{\lambda_v} = 12{,}5 \log \frac{1}{1{,}118} \,. \qquad (38)$$

Le rapport des valeurs choisies par M. Brill est 1,24. Rapprocher les valeurs de λ_v et λ_p de façon que leur rapport soit 1,118 ne semble pas admissible. Supposons tout de même ce choix fait.

Afin d'éviter un nouveau calcul de α_2, remarquons qu'avec ces nouvelles valeurs, le numérateur et le dénominateur de la fraction qui figure sous le signe log sont plus voisins que prédédemment. Toutes les valeurs obtenues seraient inférieures aux valeurs correspondantes de la table de M. Tiercy. Cela imposerait à α_1 des variations encore plus considérables que celles du tableau précédent.

Nous arrivons donc aux conclusions suivantes: pour expliquer les variations de α, il faut écarter les constantes de M. Brill l'une de l'autre; mais il faut les rapprocher pour expliquer ses valeurs.

M. Tiercy a proposé, plus récemment, de considérer les valeurs λ_p et λ_v, non comme des constantes valables pour toute étoile, mais comme des fonctions de la magnitude de la source [1]. Cela revient à faire figurer dans la loi du rayonnement d'une étoile une fonction des dimensions. Les résultats sont justifiés par la comparaison avec la réalité. Nous nous proposons dans la suite de ce travail d'essayer d'améliorer la théorie de l'index de couleur en faisant intervenir les courbes de sensibilité spectrale des récepteurs, mais en admettant, jusqu'à preuve du contraire, la validité de la loi de Planck pour les atmosphères d'étoiles.

[1] *Archives*, (5), 11, p. 260 (1929); *Publ. de l'Obs. de Genève*, fasc. 9.

Chapitre IV.

APPLICATION DES COURBES DE SENSIBILITÉ

§ 19. — Hypothèses.

Des trois hypothèses faites au § 13, nous conserverons la première:

a) Le rayonnement des étoiles peut être assimilé à celui du corps noir.

Les hypothèses (*b*) et (*c*) seront remplacées par celle du § 5: l'expression analytique de la courbe de sensibilité d'un récepteur est:

$$\sigma(\lambda) = \sum_{i=1}^{i=k} C_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda} e^{1-\frac{\lambda_i}{\lambda}}\right)^{n_i}, \tag{9}$$

où la somme comporte autant d'addendes que la courbe possède de maxima.

§ 20. — Calcul de la magnitude relative a un récepteur de première espèce.

Les équations (10) et (11) donnent:

$$M_r = 2{,}5 \left[\log \mathcal{E} - \log \int_0^\infty \left(\frac{\lambda_m}{\lambda} e^{1-\frac{\lambda_m}{\lambda}}\right)^n \frac{C}{\lambda^5\left(e^{\frac{b}{\lambda T}} - 1\right)} d\lambda\right]$$

$$= 2{,}5 \left[\log \mathcal{E} - \log Ce^n . \lambda_m^n \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\lambda_m}{\lambda}n}}{\left(e^{\frac{b}{\lambda T}} - 1\right)\lambda^{5+n}} d\lambda\right] . \tag{39}$$

Appelons J l'intégrale du second membre et posons:

$$\nu\lambda = 1 \tag{40}$$

ou

$$\frac{d\nu}{\nu} = - \frac{d\lambda}{\lambda} \; ; \tag{41}$$

$$J = \int_{\infty}^{0} \frac{e^{-n\lambda_m} \nu^{5+n}}{\left(e^{\frac{b\nu}{T}} - 1\right)} \left(\frac{d\nu}{\nu^2}\right) . \tag{42}$$

Appliquons la formule du binôme à la parenthèse:

$$\left(e^{\frac{b\nu}{T}} - 1\right)^{-1} = e^{-\frac{b\nu}{T}} + e^{-2\frac{b\nu}{T}} + \dots + e^{-i\frac{b\nu}{T}} + \dots \; ; \tag{43}$$

J devient une somme d'intégrales de la forme:

$$K = \int_0^{\infty} e^{-\alpha\nu} . \nu^{\beta} \, d\nu \; , \tag{44}$$

où:

$$\begin{cases} \alpha = n\lambda_m + i\dfrac{b}{T} \; , \\ \beta = 3 + n \; . \end{cases} \tag{45}$$

Intégrons par parties:

$$K = \left[- \frac{e^{-\alpha\nu}}{\alpha} . \nu^{\beta}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha\nu}}{\alpha} \beta \nu^{\beta-1} \, d\nu = \frac{\beta}{\alpha} \int_0^{\infty} e^{-\alpha\nu} \nu^{\beta-1} \, d\nu \; . \tag{46}$$

En répétant β fois le même calcul:

$$K = \frac{\beta\,!}{\alpha^{\beta}} \int_0^{\infty} e^{-\alpha\nu} \, d\nu = \frac{\beta\,!}{\alpha^{\beta+1}} \; . \tag{47}$$

D'où, pour M_r:

$$M_r = 2{,}5 \left(\log \mathcal{E} - \log C e^n \lambda_m^n \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(3+n)\,!}{\left[n\lambda_m + i\dfrac{b}{T}\right]^{4+n}} \right) . \tag{48}$$

§ 21. — Cas de la courbe de deuxième espèce.

Il suffit de remplacer l'intégrale J par une somme d'intégrales du même type, multipliées par des constantes convenables. Cela revient à en faire autant dans les intégrales K et dans la formule (47). On a donc pour M_r:

$$M_r = 2{,}5\left(\log \mathcal{E} - \log C \sum_{\substack{i=1\\ j=1}}^{\substack{j=k\\ i=\infty}} \frac{e^{n_j}\lambda_j^{n_j}(3+n_j)\,!}{\left(n_j\lambda_j + i\dfrac{b}{T}\right)^{4+n_j}}\right). \qquad (49)$$

§ 22. — Expression de l'index relatif a deux récepteurs.

Appliquons l'équation de définition (12), avec la convention (15). Il vient:

$$I_{1,2} = 2{,}5 \log A \frac{\displaystyle\sum_{i=j=1}^{i=\infty,\, j=k''} \frac{e^{n''_j}\lambda''^{n''_j}_j(3+n''_j)\,!}{\left(n''_j\lambda''_j + i\dfrac{b}{T}\right)^{4+n''_j}}}{\displaystyle\sum_{i=j=1}^{i=\infty,\, j=k'} \frac{e^{n'_j}\lambda'^{n'_j}_j(3+n'_j)\,!}{\left(n'_j\lambda'_j + i\dfrac{b}{T}\right)^{4+n'_j}}} = 2{,}5 \log A \,.\, \varphi(T)\,, \qquad (50)$$

avec:

$$A = \frac{1}{\varphi(T_0)}\,,$$

(T_0 = température effective de l'étoile fondamentale).

Cette formule est embarrassée de sommations pénibles. Elle se simplifie si l'on se contente de la formule de Wien. Pour le voir, remarquons qu'on passe de la formule de Planck à celle de Wien en supprimant le (— 1) du dénominateur. Le développement (43) se réduit alors à son premier terme, c'est-à-dire que la sommation sur i ne comporte plus qu'un terme.

(50) devient alors:

$$\mathrm{I}_{1,2} = 2{,}5 \log \mathrm{A} \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{j=k''} \frac{e^{n''_j} \lambda_j''^{n''_j} (3 + n''_j)\,!}{\left(n''_j \lambda''_j + \frac{b}{\mathrm{T}}\right)^{4+n''_j}}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{j=k'} \frac{e^{n'_j} \lambda_j'^{n'_j} (3 + n'_j)\,!}{\left(n'_j \lambda'_j + \frac{b}{\mathrm{T}}\right)^{4+n'_j}}} . \tag{51}$$

Si les deux récepteurs sont de première espèce, cette formule se simplifie encore. On a:

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_{1,2} &= 2{,}5 \log \mathrm{A} \frac{e^{n''} \lambda''^{n''} (3 + n'')\,!}{\left(n'' \lambda'' + \frac{b}{\mathrm{T}}\right)^{4+n''}} \cdot \frac{\left(n' \lambda' + \frac{b}{\mathrm{T}}\right)^{4+n'}}{e^{n'} \lambda' (3 + n')\,!} \\ &= 2{,}5 \log \left(\frac{n'' \lambda'' + \frac{b}{\mathrm{T}_0}}{n'' \lambda'' + \frac{b}{\mathrm{T}}}\right)^{4+n''} \cdot \left(\frac{n' \lambda' + \frac{b}{\mathrm{T}}}{n' \lambda' + \frac{b}{\mathrm{T}_0}}\right)^{4+n'} . \end{aligned} \tag{52}$$

Il peut enfin se produire que les deux exposants de (52) soient égaux. Il vient alors:

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_{1,2} &= 2{,}5 \log \mathrm{A} \left(\frac{\lambda''}{\lambda'}\right)^{n} \left(\frac{n\mathrm{T}\lambda' + b}{n\mathrm{T}\lambda'' + b}\right)^{n+4} \\ &= 2{,}5 (n + 4) \log \left(\frac{n\lambda'' \mathrm{T}_0 + b}{n\lambda' \mathrm{T}_0 + b}\right) \left(\frac{n\lambda' \mathrm{T} + b}{n\lambda'' \mathrm{T} + b}\right) . \end{aligned} \tag{53}$$

Nous appellerons respectivement les formules (50), (51), (52) et (53) formules complète, réduite, à double exposant, à simple exposant.

§ 23. — Discussion de la formule complète.

Dans l'état actuel des méthodes d'observation, elle semble présenter une complication peu en rapport avec la précision accessible en ces matières. En effet, l'absorption atmosphérique terrestre, encore trop mal connue, suffit à rendre la loi de Planck non rigoureusement applicable aux étoiles. Contentons-nous donc de vérifier la convergence des séries qui y figurent. Cela revient à étudier une série de la forme:

$$\sum \frac{1}{(a + ix)^c} \cdot$$

Or:

$$\frac{1}{(a + ix)^c} < \frac{1}{(ix)^c} = \frac{d}{i^c} \ ;$$

et $\sum \frac{1}{i^c}$ est convergente si c est supérieur à 1, ce qui est réalisé puisque n est positif.

§ 24. — Discussion de la formule a double exposant, le second membre étant considéré comme fonction de la température.

Nous supposons $n' \neq n''$. La formule peut s'écrire:

$$\begin{aligned} \mathrm{I}(\mathrm{T}) &= m \operatorname{Log} \mathrm{B} \frac{\left(n'\lambda' + \frac{b}{\mathrm{T}}\right)^{4+n'}}{\left(n''\lambda'' + \frac{b}{\mathrm{T}}\right)^{4+n''}} = m \operatorname{Log} \mathrm{B} \frac{(n'\lambda'\mathrm{T} + b)^{4+n'}}{(n''\lambda''\mathrm{T} + b)^{4+n''}} . \mathrm{T}^{n''-n'} \\ &= m \left\{ \operatorname{Log} \mathrm{B} + (4 + n') \operatorname{Log}\left(n'\lambda' + \frac{b}{\mathrm{T}}\right) \right. \\ &\qquad \left. - (4 + n'') \operatorname{Log}\left(n''\lambda'' + \frac{b}{\mathrm{T}}\right) \right\} , \end{aligned} \tag{52}$$

où Log signifie logarithme naturel, et où:

$$\left\{ \begin{aligned} m &= \frac{2,5}{\mathrm{M}} = 1,08574 \ , \\ \mathrm{B} &= \frac{\left(n''\lambda'' + \frac{b}{\mathrm{T}_0}\right)^{4+n''}}{\left(n'\lambda' + \frac{b}{\mathrm{T}_0}\right)^{4+n'}} . \end{aligned} \right. \tag{54}$$

Pour T infini, on a:

$$\left. \begin{aligned} \mathrm{I}(\infty) &= m \operatorname{Log} \mathrm{B} \frac{(n'\lambda')^{4+n'}}{(n''\lambda'')^{4+n''}} \ ; \\ \mathrm{I}(\infty) &\ \text{ est fini} \ . \end{aligned} \right. \tag{55}$$

Si T est nul, il vient:

$$I(0) = m \operatorname{Log} b^{n'-n''} . 0^{n''-n'} .$$

Donc:

$$\begin{aligned} I(0) &= -\infty \quad \text{si} \quad n'' > n' , \\ I(0) &= \infty \quad \text{si} \quad n'' < n' . \end{aligned} \tag{56}$$

Calculons $\frac{dI}{dT}$:

$$\frac{dI}{dT} = - \frac{mb \left\{ 4 [n'' \lambda' - n' \lambda'] - \frac{b}{T} [n'' - n'] + n' n'' [\lambda'' - \lambda'] \right\}}{(n' \lambda' T + b)(n'' \lambda'' T + b)} . \tag{57}$$

Le dénominateur de cette fraction est toujours positif. Quant au numérateur, il pourra changer de signe ou pas, suivant les valeurs relatives des constantes qui y figurent. Soit par exemple:

$$\begin{aligned} \lambda'' &> \lambda' , \\ n'' &> n' . \end{aligned} \tag{58}$$

Si n' et n'' sont peu différents, le deuxième terme de l'accolade ne sera jamais prépondérant; I et T varieront en sens inverses.

§ 25. — Discussion de la formule a double exposant, en considérant le second membre comme fonction de l'un des exposants.

Nous supposerons connu et fixe l'un des exposants, n''. Si c'était n', la discussion suivante s'appliquerait à $I_{2,1} = - I_{1,2}$.

Si n' est inconnu, la connaissance de la température effective T et de l'index I d'une étoile d'état physique différent de celui de l'étoile fondamentale suffira pour le déterminer, n' devra satisfaire à l'équation:

$$10^{\frac{I}{2,5}} . \left(\frac{n'' \lambda'' + \frac{b}{T}}{n'' \lambda'' + \frac{b}{T_0}} \right)^{n''+4} = \left(\frac{n' + \frac{b}{\lambda' T}}{n' + \frac{b}{\lambda' T_0}} \right)^{n'+4} = \alpha = p^{n'+4} . \tag{59}$$

En posant:

$$a = \frac{b}{\lambda' T} \; ; \qquad x = \frac{b}{\lambda' T_0} \; ; \qquad p = 1 + \frac{a - x}{n' + x} = 1 + \frac{\beta}{n' + x} \; . \tag{60}$$

Si T_0 est supérieure à T:

$$a > x \; , \qquad p > 1 \; . \tag{61}$$

Lorsque n augmente, p diminue.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si} \quad n' = 0 \; , \; p = 1 + \dfrac{\beta}{x} \; ; \\ \text{si} \quad n' = \infty \; , \; p = 1 \; . \end{array} \right. \tag{62}$$

Posons:

$$f(n') = p^{n'+4} \; ; \tag{63}$$

$n' = n^* + b$;

n' et n^* tendent simultanément vers l'infini. Dans ces circonstances:

$$f(n') = p^{n+4-x} = \left(1 + \frac{\beta}{n^*}\right)^{4-x} \left(1 + \frac{\beta}{n^*}\right)^{n^*}_{n' \to \infty} \to \left(1 + \frac{\beta}{n' + b}\right)^{4-x} . e^{\beta} \; . \tag{64}$$

Calculons $\dfrac{df(n')}{dn'}$. Pour cela, posons:

$$\operatorname{Log} f(n') = (n' + 4) \operatorname{Log} p \; . \tag{65}$$

Il vient:

$$\frac{df(n')}{dn'} = p^{n'+3} \left\{ p \operatorname{Log} p - \frac{(n' + 4)\beta}{(n' + x)^2} \right\} = p^{n'+3} . q \; . \tag{66}$$

Si n est grand, q et $\dfrac{df(n')}{dn'}$ sont positifs. $f(n')$ croît donc pour de grandes valeurs de n. Pour certaines valeurs des constantes, il peut se faire que $f(n')$ décroisse dans un certain domaine.

§ 26. — DISCUSSION DE LA FORMULE A SIMPLE EXPOSANT, EN CONSIDÉRANT LE SECOND MEMBRE COMME FONCTION DE LA TEMPÉRATURE.

$$\mathrm{I}(\mathrm{T}) = 2{,}5 \log \mathrm{B}\left(\frac{n\lambda'\mathrm{T} + b}{n\lambda''\mathrm{T} + b}\right)^{4+n} = m \operatorname{Log} \mathrm{B}\left(\frac{n\lambda'\mathrm{T} + b}{n\lambda''\mathrm{T} + b}\right)^{4+n}, \tag{53}$$

avec:

$$\mathrm{B} = \left(\frac{n\lambda''\mathrm{T}_0 + b}{n\lambda'\mathrm{T}_0 + b}\right)^{4+n}. \tag{67}$$

Faisons successivement $\mathrm{T} = 0$ et $\mathrm{T} = \infty$. Il vient:

$$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{I}(0) = 2{,}5 \log \mathrm{B}\ ; \\ &\mathrm{I}(\infty) = 2{,}5 \log \mathrm{B}\left(\frac{\lambda'}{\lambda''}\right)^{4+n}\ ; \end{aligned}\right. \tag{68}$$

Le domaine de variation de I est:

$$\mathrm{I}_0 - \mathrm{I}(\infty) = 2{,}5 \log \left(\frac{\lambda''}{\lambda'}\right)^{4+n}. \tag{69}$$

En effet, formons $\frac{d\mathrm{I}}{d\mathrm{T}}$:

$$\frac{d\mathrm{I}}{d\mathrm{T}} = -\frac{mbn(\lambda'' - \lambda')(4 + n)}{(n\lambda'\mathrm{T} + b)(n\lambda''\mathrm{T} + b)}\ ; \tag{70}$$

I varie toujours dans le même sens, et d'autant plus rapidement que T est plus petit.

§ 27. — DISCUSSION DE LA FORMULE A SIMPLE EXPOSANT, EN CONSIDÉRANT LE SECOND MEMBRE COMME FONCTION DE CET EXPOSANT.

Soient T et I la température effective et l'index d'une étoile de constitution différente de celle de l'étoile fondamentale.

n devra satisfaire à l'équation:

$$10^{\frac{\mathrm{I}}{2{,}5}} = \left(\frac{n + \dfrac{b}{\lambda''\mathrm{T}_0}}{n + \dfrac{b}{\lambda'\mathrm{T}_0}} \cdot \frac{n + \dfrac{b}{\lambda'\mathrm{T}}}{n + \dfrac{b}{\lambda''\mathrm{T}}}\right)^{n+4} = p^{n+4} = f(n)\ . \tag{71}$$

Posons:

$$\left\{\begin{array}{l} p = \dfrac{n^2 + an + y}{n^2 + cn + y} = 1 + \dfrac{a - c}{n^2 + cn + y} \; ; \qquad a - c = \alpha \; ; \\ a = b\left(\dfrac{1}{\lambda'' \mathrm{T}_0} + \dfrac{1}{\lambda' \mathrm{T}}\right) \; ; \quad y = \dfrac{b^2}{\lambda' \lambda'' \mathrm{T} \mathrm{T}_0} \; ; \quad c = b\left(\dfrac{1}{\lambda' \mathrm{T}_0} + \dfrac{1}{\lambda'' \mathrm{T}}\right) \; ; \end{array}\right. \tag{72}$$

On peut toujours supposer $a > c$. Si cela n'était pas, on permuterait les rôles des deux récepteurs et les considérations suivantes s'appliqueraient à $\mathrm{I}_{2,1} = - \mathrm{I}_{1,2}$.

Il en résulte que p est toujours positif, et supérieur à 1 sauf pour $n = \infty$ et pour $n = 0$, où $p = 1$.

Lorsque n augmente à partir de 0, p croît donc tout d'abord, puis décroît pour de grandes valeurs de n.

Cherchons le maximum de p.

$$\frac{dp}{dn} = \frac{(c - a)(n^2 - y)}{(n^2 + cn + y)^2} \; ; \tag{73}$$

$\dfrac{dp}{dn}$ a donc le signe de $\sqrt{y} - n$ où la racine doit être prise avec le signe $+$, puisque nous ne nous intéressons qu'à des valeurs positives de n.

Examinons la fonction $f(n)$.

$$f(0) = 1 \; . \tag{74}$$

Examinons ce que devient $f(n)$ si n croît indéfiniment. Pour cela posons:

$$n' = n + c + \frac{y}{n} \; ; \quad n = \frac{n' - c + n'\sqrt{1 - \dfrac{2c}{n'} + \dfrac{c^2 - y}{n'^2}}}{2} \; ; \tag{75}$$

Si nous voulons que n et n' soient simultanément infinis, il faut prendre le radical avec le signe $+$. On a, pour de grandes valeurs de n':

$$n = \frac{n' - c}{2} + \frac{n'}{2} + \beta \qquad \text{où} \qquad \beta \longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad n' \longrightarrow \infty \; ; \tag{76}$$

d'où pour $f(n)$:

$$f(n) = \left(1 + \frac{\alpha}{n'}\right)^{n' - \frac{c}{2} + 3} \longrightarrow e^{a-c} \,. \tag{77}$$

Cherchons $\frac{df(n)}{dn}$ en posant $\operatorname{Log} f(n) = (n + 4) \operatorname{Log} p$:

$$\frac{df(n)}{dn} = p^{n+3}\left([n + 4]\frac{dp}{dn} + p \operatorname{Log} p\right) = p^{n+3} \cdot q \,. \tag{78}$$

Le signe de la dérivée est celui de q. Le deuxième terme en est toujours positif. Le premier ne l'est que pour des valeurs de n du domaine de croissance de p. Il pourra donc se faire que pour certaines valeurs des constantes, la fonction $f(n)$ décroisse. Nous allons voir que, sous certaines conditions, et pour de grandes valeurs de n, $f(n)$ est toujours croissante. Pour cela, développons q en série. Il vient :

$$\left\{\begin{aligned} q &= \frac{(n + 4)(c - a)(n^2 - y)}{(n^2 + cn + y)^2} + p \operatorname{Log} p = \\ &= n^{-2}(a - c)\left(\frac{a + c}{2} - 4\right) + \dots \,; \end{aligned}\right. \tag{79}$$

La condition est :

$$a + c > 8 \,. \tag{80}$$

(A suivre.)