LE PROBLÈME DE L'INDEX DE COULEUR
EN ASTRONOMIE PHYSIQUE

PAR

Paul ROSSIER

(Suite et fin)

CHAPITRE V.

ROLE DE L'ATMOSPHÈRE STELLAIRE

§ 28. — LES RAIES D'ABSORPTION.

On ne peut admettre que la courbe de répartition de l'énergie dans un spectre stellaire soit une courbe de Planck, sans faire abstraction des « creux » que représentent les raies d'absorption de la couche renversante de l'étoile. Dans la théorie précédente, nous avons calculé l'éclat de l'étoile en négligeant ce déficit de puissance. Il est possible d'en tenir compte comme suit: on supposera que la courbe réelle de répartition de l'énergie possède une ordonnée nulle, ou réduite, sur la largeur de la raie. Il est certain que l'on n'obtient ainsi qu'une approximation assez grossière. Mais comme il ne s'agit que de calculer une correction à apporter à une grandeur déjà connue, il est inutile de chercher une rigueur que l'observation est loin d'atteindre.

Soit donc λ_i la longueur d'onde d'une raie d'absorption,

Λ_i la largeur de celle-ci. La correction à apporter à l'éclat donné par l'expression sous le signe log de (48) sera:

$$\Delta E_r = -\sum_i \int_{\lambda_i - \frac{\Lambda_i}{2}}^{\lambda_i + \frac{\Lambda_i}{2}} \left[\sigma(\lambda_i) . \frac{C}{\lambda_i^5 \left(e^{\frac{b}{\lambda_i T}} - 1 \right)} - \rho(\lambda_i) \right] d\lambda_i . \quad (81)$$

Si la raie est « obscure », $\rho(\lambda_i)$ est nul. Si elle est sombre :

$$\rho(\lambda_i) < \frac{C}{\lambda_i^5 \left(e^{\frac{b}{\lambda_i T}} - 1 \right)} . \quad (82)$$

Enfin, si la raie est brillante, l'inégalité précédente change de sens.

Vu le caractère exceptionnel des étoiles à raies brillantes et le fait qu'on n'est pas encore au clair sur les valeurs normales de l'index de couleur de ces astres, nous excluerons ce cas de notre étude.

Il est certain que l'intervalle d'intégration est suffisamment court pour qu'on puisse écrire (81) sous la forme:

$$\Delta E_r = -\sum \sigma(\lambda_i) \left[\frac{C}{\lambda_i^5 \left(e^{\frac{b}{\lambda_i T}} - 1 \right)} - \rho(\lambda_i) \right] \Lambda_i . \quad (83)$$

Il reste encore dans notre formule, pour chaque raie, deux constantes $\rho(\lambda_i)$ et Λ_i. Il y a peut-être possibilité d'en réduire le nombre à deux par élément participant à l'absorption (molécules, atomes, atomes ionisés). Pour chacun de ces corps on pourrait admettre que l'éclat du fond de la raie est donné par une loi analogue à celle de Planck, à condition de choisir convenablement le paramètre T, qui n'aura qu'une relation lointaine avec la température.

On pourrait aussi admettre que $\rho(\lambda_i)$ est la même fonction de Planck que celle admise pour l'étoile, mais multipliée par un coefficient inférieur à 1.

(83) devient alors:

$$\Delta E_r = -\sum \sigma(\lambda_i) \frac{C_1 \Lambda_i}{\lambda_i^5 \left(e^{\frac{b}{\lambda_i T}} - 1\right)} . \tag{84}$$

Si l'on admet, avec la théorie cinétique, que la largeur d'une raie est proportionnelle à la longueur d'onde. On pourrait donc mettre Λ_i sous la forme:

$$\Lambda_i = k \, . \, \lambda_i \ , \tag{85}$$

où la constante k devrait être choisie convenablement pour chaque élément. Cela revient à modifier C_1 dans (84).

Ces considérations permettraient de rendre le calcul praticable dans le cas des types spectraux peu avancés, où le nombre de substances est restreint.

Quant aux autres étoiles, il faudrait essayer de grouper les raies par région spectrale, ou de les classer par intensité. Le moment ne semble pas prochain où la photométrie sera en état de contrôler ces calculs.

§ 29. — Effet de l'atmosphère sur le fond continu du spectre.

Considérons un certain volume V de l'atmosphère de l'étoile. Il reçoit des couches inférieures une certaine puissance w sous forme d'énergie rayonnante, plus une puissance w' par conduction, convection, transformations atomiques ou chimiques, etc. De la puissance w, une portion ρw est réfléchie, une autre portion δw est diffusée, la quantité αw absorbée et τw est transmise. On a:

$$\rho + \delta + \alpha + \tau = 1 \ . \tag{86}$$

De là résulte que la puissance transmise est moindre que w, ce qui ne signifie pas que la puissance émise lui soit inférieure. En effet, la matière contenue dans le volume V va émettre une puissance sensiblement égale à la puissance reçue. Mais ceci ne veut pas dire que toute cette puissance sorte de l'atmosphère, ni que la radiation sensible à l'extérieur de l'étoile ait la même composition spectrale que la radiation émise par les couches profondes. En effet, les divers facteurs ρ, δ, α, τ sont fonctions de la longueur d'onde. En particulier, la diffusion augmente quand λ diminue. On doit donc s'attendre, si aucun effet compensateur ne se produit, à ce qu'il y ait un certain déficit de puissance pour les petites longueurs d'onde. L'expérience permet d'ailleurs d'en constater l'existence. Or, cet effet ne permet plus de supposer que la fonction $e(\lambda)$, que nous avons fait intervenir dans le calcul de l'éclat et de l'index, soit une fonction de Planck. Au contraire, il nous faut poser:

$$e(\lambda) = q(\lambda) \cdot p(\lambda) \ , \tag{87}$$

où $p(\lambda)$ est la fonction de Planck et $q(\lambda)$ un facteur inférieur à 1, relativement petit avec λ et tendant vers 1 dès que λ croît. Nous ne poserons pas la question de trouver l'expression de $q(\lambda)$. Pour le but que nous poursuivons, il suffit que nous en ayons une valeur ayant la précision des fonctions de sensibilité $\sigma(\lambda)$ que nous avons introduites, et en outre que les calculs auxquels conduira cette expression pour l'index de couleur ne soient pas d'une complication trop grande.

Posons donc:

$$q(\lambda) = e^{-\frac{r}{\lambda}} \ . \tag{88}$$

L'intégrale entrant dans le calcul de l'éclat devient:

$$\int_0^\infty \left(\frac{\lambda_m}{\lambda} e^{1-\frac{\lambda_m + \frac{r}{n}}{\lambda}}\right)^n \frac{C\,d\lambda}{\lambda^5\left(e^{\frac{b}{\lambda T}} - 1\right)} \ . \tag{89}$$

Il suffit donc, dans tous les calculs précédents, de remplacer λ_m par $\lambda_m + \frac{r}{n}$. (La constante C disparaît dans l'expression de l'index). Ceci s'applique en particulier aux formules de définition de l'index de couleur (50) à (53).

La constante r, constante d'absorption du fond continu, dépend évidemment de la constitution physique de l'étoile.

Nous ne discuterons pas la question de savoir comment elle varie avec le type spectral, le caractère de géant ou de nain, la masse ou la magnitude absolue.

CHAPITRE VI.

APPLICATION NUMÉRIQUE DES FORMULES A SIMPLE ET DOUBLE EXPOSANTS A L'INDEX PHOTO-VISUEL

§ 30. — INDEX PHOTO-VISUEL.

Formons la liste des principales valeurs publiées, ramenées toutes à la valeur 0 pour le type A_0. On obtient la table suivante:

Type	King [1]	M[t] Wilson [2]	Parhurst [3]	Schwarzschild [4]	Stratton [5]	Russel [6] géants	Russel [6] nains	Graff [7]
B_0	— 0,31	— 0,32	— 0,54	— 0,34	— 0,34	— 0,33	— 0,33	— 0,42
B_5	— 0,17	— 0,17	— 0,22	— 0,20	— 0,12	— 0,18	— 0,18	— 0,21
A_0	0	0	0	0	0	0	0	0
A_5	+ 0,18	+ 0,19	+ 0,24	+ 0,20	+ 0,14	+ 0,20	+0,20	+ 0,21
F_0	0,32	0,38	0,46	0,40	0,28	0,33	0,33	0,42
F_5	0,52	0,62	0,69	0,60	0,42	0,47	0,47	0,63
G_0	0,71	0,86	0,92	0,84	0,56	0,67	0,57	0,84
G_5	0,90	1,15	1,14	1,10	0,78	0,92	0,65	1,05
K_0	1,16	1,48	1,38	1,35	1,00	1,12	0,78	1,26
K_5	1,42	1,84	1,61	1,80	1,18	1,57	0,98	1,47
M	+ 1,67	+ 1,88	+ 1,83	+ 2,17	+ 1,35	+ 1,73	+ 1,45	+ 1,68

L'échelle de Graff, adoptée par M. Bosler [8], est une moyenne ajustée de diverses valeurs. Elle est représentée par une fonction

[1] *Annals of the Harvard College Observatory*, LIX, n° VI, 1912, p. 157.

[2] K. GRAFF, *Grundriss der Astrophysik*, III.

[3] *Astrophysical Journal*, XXXVI, 1912, p. 218.

[4] *Abhandlungen der kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 6, 1910, n° 6.

[5] STRATTON, *Astronomical Physics*.

[6] RUSSEL-DUGAN-STEWART, *Astronomy*, vol. II, p. 734.

[7] SCHEINER et GRAFF, *Astrophysik*, 1922, p. 327.

[8] J. BOSLER, *Astrophysique*, 1928, p. 504.

quasi linéaire de l'intervalle spectral. C'est peut-être, pour l'index moyen, celle qui fera ressortir le plus vivement les erreurs systématiques d'une formule. D'ailleurs, si l'on trace les courbes représentant ces diverses valeurs de I, en fonction de l'intervalle spectral, on trouve à peu près des droites, sauf pour l'échelle relative aux nains de M. Russel; dans ce cas, la courbure est dirigée vers le bas pour les premiers types et vers le haut pour les types avancés. L'inflexion se trouve vers G_0. Il sera donc facile de modifier une formule numérique établie pour l'index de Graff, et de l'adapter à une autre échelle.

La variété des chiffres du tableau précédent montre combien la notion d'index photo-visuel est encore mal définie, ou plutôt montre l'intérêt qu'auraient les observateurs à étudier très sérieusement les courbes de sensibilité de leurs yeux et de leurs plaques. Même dans un système homogène, des erreurs de quelques centièmes sont probables.

§ 31. — Echelles de températures stellaires.

Les principales déterminations de températures stellaires publiées sont les suivantes: les mesures spectro-photométriques visuelles de Wilsing et Scheiner, celles de Rosenberg obtenues par la méthode photographique, de Russel [1], d'Abbot au radiomètre, de Stratton, de Saha [2] et de M. Tiercy [3].

Celles de M. Russel, basées sur les considérations du § 14 et sur une formule analogue à (29) n'ont pas qualité pour critiquer notre théorie. Les échelles de MM. Saha et Tiercy sont des échelles de températures réelles de la couche renversante, tandis que c'est essentiellement le rayonnement de la photosphère qui détermine l'éclat de l'étoile. Nous devons donc choisir les températures effectives pour les faire entrer dans nos formules basées sur la loi de Planck. M. Graff a réduit à nouveau les mesures de Wilsing et Scheiner et leur a fait subir un ajustement graphique.

[1] *Nature*, XCIII, 1914, p. 227.
[2] *Philosophical Magazine*, XLI, 1921, p. 276.
[3] *Archives* (5), 9, p. 87 (1927).

TEMPÉRATURES.

Type	Wilsing [1]	Rosen-berg [2]	Abbot [3]	Strattn [4]	Graff [5]
B_0	12300	30000		23000	18300
B_5	11450	18000			13700
A_0	10250	12000	12500	10000	11000
A_5	9000	9000			9100
F_0	7950	7850		7500	7700
F_5	6880	6930	8000		6700
G_0	5980	6000	5800	6000	5900
G_5	5250	5200	5300	5300	5300
K_0	4570	4570		4500	4600
K_5	3860	3840	3000	3900	4200
M	3550	3580	2600	3000	3800

Une valeur de toute importance pour l'étalonnage est celle admise pour le type A_0, puisque les étoiles A_0 jouent le rôle de l'étoile fondamentale. La valeur 11000, voisine de la moyenne des valeurs précédentes, peu différente des 12000 de M. Saha, et obtenue par M. Russel, semble être assez sûre. L'échelle de Graff, pas trop éloignée de la moyenne, est celle que nous adopterons, de façon à opérer sur un matériel d'indices et de températures aussi homogène que possible.

M. Graff pense que les erreurs à craindre sont de l'ordre de 1000° vers 10000°, de 250° pour 5000°, et de 100° pour les étoiles plus froides. M. Bosler estime l'approximation à 10 % [6].

§ 32. — POSITION DU PROBLÈME.

Notre théorie est suffisamment perfectionnée pour ne faire appel qu'à des mesures de laboratoire. Or celles-ci existent pour l'œil. En effet, pour des éclairements moyens (de l'ordre

[1] *Publikationen des Ast. Obs. zu Potsdam*, XIX, 1909, nº 56.
[2] *Astronomische Nachrichten*, 193, 1912, p. 357.
[3] ABBOT, *The Earth and the stars*.
[4] STRATTON, *Astronomical Physics*.
[5] SCHEINER et GRAFF, *Astrophysik*, 1922, p. 362.
[6] J. BOSLER, *L'évolution des étoiles*, 1923, p. 29.

de 25 bougies-mètre) on a donné les valeurs $\lambda_m = (5,5) . 10^{-5}$ et $n = 181$ [1]. Quant aux plaques photographiques, il est bien connu que leur sensibilité varie énormément avec les circonstances. Il semble donc illusoire de vouloir appliquer, à une échelle d'index choisie plus ou moins arbitrairement, une courbe de sensibilité des plaques, dont l'arbitraire est tout aussi grand. La méthode rationnelle serait d'étudier l'œil et les plaques dans des circonstances se rapprochant autant que possible de celles de l'observation astronomique (ce qui, à notre connaissance, est encore à faire).

Essayons de déterminer les constantes de nos formules par des données uniquement astronomiques. Il semble ici qu'on pourrait nous faire le même reproche que celui que nous adressons à M. Russel, lorsqu'il fait intervenir le Soleil pour déterminer les constantes numériques de sa formule. Les deux questions sont entièrement différentes: au lieu de faire, comme M. Russell, des hypothèses extrêmement strictes, et qui s'éloignent de la réalité, puis de déterminer expérimentalement des coefficients que sa théorie permet de calculer (§ 15), nous introduisons dans nos calculs des constantes qui ne peuvent être déterminées que par l'expérience. Il est juste de remarquer que, dès qu'on lui accorde un nombre suffisant d'arbitraires, le calculateur peut plus facilement faire jouer sa formule.

§ 33. — Formule a simple exposant.

Les constantes qui entrent dans la formule à simple exposant sont au nombre de trois: les longueurs d'onde du maximum de sensibilité de l'œil et de la plaque, et l'exposant lui-même.

En ce qui concerne cet exposant nous pouvons admettre qu'il est inférieur à la valeur admise pour l'œil, $n = 181$. En effet, le maximum de sensibilité de l'œil est très marqué, beaucoup plus que celui de la plaque. Or, nous l'avons démontré [2], ceci implique que l'exposant relatif à la plaque est moindre que celui

[1] H. Bouasse, *loc. cit.*, p. 209.
[2] § 6, formule 8.

de l'œil. Si nous choisissons une valeur unique pour ces deux exposants, nous ne pourrons satisfaire à la réalité physique qu'en prenant pour n une valeur inférieure à 181.

Les expériences faites sur l'œil avaient conduit à une certaine valeur pour la longueur d'onde du maximum, valable pour des éclairements de beaucoup supérieurs à ceux dont on use en photométrie astronomique. Or le phénomène de Purkinje, appliqué à l'œil, conduit à indiquer une longueur d'onde relative au maximum, qui diminue en même temps que l'éclairement. Nous devrons donc supposer:

$$\lambda_v \leq (5,5) \, . \, 10^{-5} \text{ cm} \, . \tag{90}$$

§ 34. — Longueurs d'onde de M. Brill.

La première idée qui se présente est de poser, avec M. Brill:

$$\begin{aligned} \lambda_v &= 5,29 \, . \, 10^{-5} \text{ cm} \, , \\ \lambda_p &= 4,25 \, . \, 10^{-5} \text{ cm} \, . \end{aligned} \tag{91}$$

Nous allons voir que ces valeurs ne conviennent pas. Appliquons les formules (72). Il vient:

$$\begin{gathered} a = 9,705 \; ; \qquad y = 18,0 \; ; \qquad c = 8,949 \; ; \\ p = 1 + \frac{0,756}{n + 8,940 + \dfrac{18}{n}} \, . \end{gathered} \tag{92}$$

La condition (80) est satisfaite: $a + c > 8$.

Etablissons l'équation (71) en utilisant une étoile du type K_0 en plus de l'étoile fondamentale A_0. Posons donc:

$$\begin{aligned} T_0 &= 11\,000 \, , \qquad & T &= 4600 \, , \\ I_0 &= 0 \, , & I &= 1,26 \, . \end{aligned} \tag{93}$$

On a alors:

$$f(n) = 10^{\frac{1,26}{2,5}} = 3,19 \, . \tag{94}$$

La condition (77) donne:

$$f(n) \rightarrow e^{a-c} = 2{,}13 \ . \tag{95}$$

Pour de grandes valeurs de n, nous savons que $f(n)$ croît. Il est donc certain que n doit être relativement petit pour satisfaire à l'équation (94).

La valeur maximale de p correspond à:

$$n = \sqrt{y} = 4{,}2 \ . \tag{73}$$

On voit facilement que pour des valeurs de n de cet ordre, $f(n)$ est de beaucoup inférieure à 2.

Cependant, il pourrait se faire que $f(n)$ présentât un ou plusieurs maxima pour des valeurs de n comprises entre 5 et 181. Le calcul montre que ce n'est pas le cas, car on a:

n	p	$f(n)$
50	1,0128	1,89
100	1,00694	2,00
150	1,00476	2,04

Il n'y a pas, dans le domaine qui nous intéresse, de valeur de n satisfaisant à l'équation (94). Il n'est donc pas possible de construire une formule à simple exposant, admettant des maxima de sensibilité correspondant aux valeurs de M. Brill, et représentant l'index photo-visuel.

§ 35. — Choix des longueurs d'onde des maxima de sensibilité.

Pour augmenter la valeur du maximum de $f(n)$ dans l'équation (94), il faut choisir des valeurs plus écartées pour a et c. Cela revient à prendre, pour les maxima de sensibilité, des valeurs plus différentes l'une de l'autre, que celles de M. Brill. Remarquons en passant qu'en faisant des hypothèses aussi sommaires que celles qui sont à la base de la formule à simple exposant, on arrive à des conclusions analogues à celles du § 18, pour expliquer les variations de la fonction α.

Faisons donc une hypothèse extrême, et choisissons pour λ_v et λ_p les grandeurs données par Graff[1]:

$$\lambda_v = 5{,}75 \,.\, 10^{-5} \text{ cm} \,,$$

$$\lambda_p = 4{,}10 \,.\, 10^{-5} \text{ cm} \,.$$

La première de ces valeurs ne satisfait pas à la condition $\lambda_v \leq (5{,}5) \times 10^{-5}$. Cela n'a pas d'importance pour l'instant, car ce que nous désirons, c'est voir s'il est possible d'admettre une formule à simple exposant. Il nous faut pour cela faire une hypothèse dans laquelle la différence des deux longueurs d'onde risque de dépasser la valeur réelle.

On a alors :

$$\left.\begin{aligned} a = 9{,}875 \;; \qquad y = 17{,}2 \;; \qquad c = 8{,}859 \;; \\ p = 1 + \frac{1{,}286}{n + 8{,}859 + \dfrac{17{,}2}{n}} \,. \end{aligned}\right\} \tag{96}$$

Le maximum de $f(n)$, correspondant à $n = \infty$, est 3,6. Ces valeurs semblent donc plausibles.

La constante qui nous manque est n. La formule (69) nous permet de déterminer une valeur minimale pour n. En effet, on a dans le cas particulier qui nous occupe:

$$\mathrm{I}(o) - \mathrm{I}(\infty) > 2{,}2 \,.$$

Donc on peut poser sans crainte

$$1 = (4 + n) \log\left(\frac{5{,}75}{4{,}10}\right) \,, \tag{97}$$

d'où:

$$n > 3 \,. \tag{98}$$

Après quelques essais, on trouve $f(48) = 3{,}193$. La valeur $n = 48$ satisfait donc à l'équation (95).

Introduisons ces diverses valeurs dans l'équation (53), et sortons du signe log les facteurs indépendants de T, il vient:

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= -\,1{,}014 + 130 \log\left(1 + \frac{209}{\mathrm{T} + 519}\right) \\ &= \mathcal{A} + \mathcal{B} \log\left(1 + \frac{g}{\mathrm{T} + h}\right) \,. \end{aligned} \tag{99}$$

[1] Scheiner et Graff, *Astrophysik*, 1922, p. 329.

§ 36. — Vérification numérique.

Appliquons la formule précédente (où nous avons remplacé 519 par 500 au dénominateur) au divers types spectraux des § 30 et 31, et calculons les différences « observation-calcul »; il vient :

Type	I calculé	I observé	Résidu R (O — C)	(100 R)^2
B_0	— 0,389	— 0,42	— 0,031	9,6
B_5	— 0,189	— 0,21	— 0,021	4,4
A_0	+ 0,003	0,00	— 0,003	0,1
A_5	0,202	0,21	+ 0,008	0,6
F_0	0,407	0,42	+ 0,013	1,7
F_5	0,602	0,63	+ 0,028	7,8
G_0	0,800	0,84	+ 0,040	16,0
G_5	1,021	1,05	+ 0,029	8,4
K_0	1,251	1,26	+ 0,009	0,8
K_5	1,442	1,47	+ 0,028	7,8
M	1,665	1,68	+ 0,014	2,0
			Somme .	59,2

Les différences entre le calcul et l'observation ne dépassent pas 0,04 magnitude. Mais cette différence présente un caractère systématique très marqué. Il sera donc raisonnable de considérer la formule (99) comme approximative, et de chercher à en améliorer la valeur des coefficients.

§ 37. — Deuxième approximation.

Pour chercher à éliminer le caractère systématique des résidus du § 36, nous allons appliquer la méthode des moindres carrés à l'ensemble des valeurs du tableau précédent. Commençons par différencier la formule (99) par rapport aux coefficients. Il vient :

$$dI = d\mathcal{A} + d\mathcal{B} \log\left(\frac{209}{T + 519}\right)$$
$$+ 130 . 0{,}4343 . \frac{(T + 519)\, dg - 209 . 519\, dh}{(T + 519)(T + 728)} . \qquad (100)$$

Remarquons que les diverses différentielles qui y figurent ne sont pas toutes du même ordre de grandeur, car une variation de $\mathcal{A}$ du premier terme se reporte en entier sur I, tandis qu'une variation notable des deux coefficients g et h, figurant sous le signe log, n'a qu'une faible influence sur I. Nous allons supposer que seuls les deux coefficients $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ varient, calculer les améliorations à introduire dans la formule, puis essayer d'en faire autant pour g et h.

En multipliant par 100, on obtient le système d'équations:

$$\left\{\begin{array}{rcl}
-3,1 & = & 100\, d\mathcal{A} + 0,48\, d\mathcal{B} \\
-2,1 & = & 100\, d\mathcal{A} + 0,63\, d\mathcal{B} \\
-0,3 & = & 100\, d\mathcal{A} + 0,79\, d\mathcal{B} \\
+0,8 & = & 100\, d\mathcal{A} + 0,94\, d\mathcal{B} \\
+1,3 & = & 100\, d\mathcal{A} + 1,09\, d\mathcal{B} \\
+2,8 & = & 100\, d\mathcal{A} + 1,24\, d\mathcal{B} \\
+4,0 & = & 100\, d\mathcal{A} + 1,40\, d\mathcal{B} \\
+2,9 & = & 100\, d\mathcal{A} + 1,56\, d\mathcal{B} \\
+0,9 & = & 100\, d\mathcal{A} + 1,74\, d\mathcal{B} \\
+2,8 & = & 100\, d\mathcal{A} + 1,89\, d\mathcal{B} \\
+1,4 & = & 100\, d\mathcal{A} + 2,06\, d\mathcal{B}
\end{array}\right. \qquad (101)$$

Résolvons par les moindres carrés. Pour cela, soustrayons de chacune de ces équations l'équation normale obtenue en prenant la moyenne de ces 11 équations, puis formons la deuxième équation normale, par multiplication par le coefficient de $d\mathcal{B}$; il vient:

$$\left\{\begin{array}{rcl}
1,04 & = & 100\, d\mathcal{A} + 1,257\, d\mathcal{B} \\
8,15 & = & 2,75\, d\mathcal{B}
\end{array}\right. , \qquad (102)$$

et enfin:

$$\begin{array}{rcl}
d\mathcal{A} & = & -\ 0,027 \\
d\mathcal{B} & = & +\ 2,96 \quad \text{soit } 3
\end{array} , \qquad (103)$$

d'où, pour la formule pratique après sa première amélioration:

$$\mathrm{I} = -\ 1,041 + 133 \log\left(\frac{209}{\mathrm{T} + 500}\right) . \qquad (104)$$

Les résidus et leurs carrés sont alors:

	R	(100 R)^2	
B_0	— 0,018	3,2	
B_5	— 0,013	1,7	
A_0	+ 0,001	0,0	
A_5	+ 0,007	0,5	
F_0	+ 0,007	0,5	
F_5	+ 0,018	3,2	(105)
G_0	+ 0,025	6,3	
G_5	+ 0,011	1,2	
K_0	— 0,019	3,6	
K_5	— 0,002	0,0	
M	— 0,020	4,0	

La somme des carrés des résidus de la formule initiale était proportionnelle à 59,2. Actuellement elle l'est à 24,2. L'amélioration est sensible, mais le caractère systématique des valeurs des résidus n'a pas disparu. Il semble donc utile de modifier les deux derniers coefficients.

Afin d'éviter des quotients mal déterminés, parce que grands, nous allons calculer par quelles valeurs, nécessairement peu différentes de 1, il faut multiplier les deux coefficients g et h.

Pour cela mettons la formule (104) sous la forme:

$$I = -1,041 + 57,76 \operatorname{Log}\left(1 + \frac{209[1+\alpha]}{T + 500[1+\beta]}\right). \tag{106}$$

En y considérant α et β comme des différentielles, il vient:

$$dI = 57,76 \, . \frac{209}{T+700}\left[\alpha - \frac{500}{T+500}\beta\right]. \tag{107}$$

Egalons les résidus aux valeurs de dI:

$$\left|\begin{array}{rcl} -0,018 &=& 0,63\,\alpha - 0,017\,\beta \\ -0,013 &=& 0,83\,\alpha - 0,029\,\beta \\ +0,001 &=& 1,02\,\alpha - 0,044\,\beta \\ +0,007 &=& 1,23\,\alpha - 0,064\,\beta \\ +0,007 &=& 1,44\,\alpha - 0,088\,\beta \\ +0,018 &=& 1,63\,\alpha - 0,113\,\beta \\ +0,025 &=& 1,83\,\alpha - 0,143\,\beta \\ +0,011 &=& 2,05\,\alpha - 0,177\,\beta \\ -0,019 &=& 2,28\,\alpha - 0,223\,\beta \\ -0,002 &=& 2,46\,\alpha - 0,262\,\beta \\ -0,020 &=& 2,68\,\alpha - 0,313\,\beta \end{array}\right. \tag{108}$$

Les premiers membres de ce système d'équations ont une allure très nette: ils croissent, puis décroissent, lorsque T croît. Les valeurs absolues des coefficients de α et β, au contraire, varient toujours dans le même sens. L'amélioration proposée ne semble donc guère utile. Si l'on fait le calcul, on trouve pour α et β des valeurs extrêmement faibles qui n'entraînent que des variations insensibles des valeurs admises 209 et 500 pour les constantes de la formule.

§ 38. — Effet d'une erreur sur la température.

Différentions (104) par rapport à T:

$$dI = \frac{57{,}76 \,.\, 209}{(T + 709)(T + 500)} dT \cong \frac{12100}{(T + 600)^2} dT \,. \qquad (108)$$

Soit:

$$\begin{array}{lll} T = 3400 \,, & dT = 50 \;; & dI = 0{,}038 \,. \\ T = 9400 \,, & dT = 200 \;; & dI = 0{,}024 \,. \\ T = 13400 \,, & dT = 500 \;; & dI = 0{,}031 \,. \end{array}$$

La formule (104) représente donc la réalité avec plus de précision que celle avec laquelle on sait déterminer une température effective stellaire.

§ 39. — Retour aux constantes principales.

Egalons les valeurs numériques précédentes à leurs expressions théoriques. Il vient:

$$\begin{aligned} &2{,}5(n + 4) \log \left(\frac{T_0 + \dfrac{b}{n\lambda''}}{T_0 + \dfrac{b}{n\lambda'}} \right) = -\ 1{,}041 \\ &2{,}5(n + 4) = 133 \qquad\qquad\qquad\qquad (109) \\ &\frac{b}{n}\left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda''}\right) = 209 \\ &\frac{b}{n\lambda''} = 519 \qquad \text{où} \quad b = 1{,}432 \,, \end{aligned}$$

d'où:

$$\begin{aligned} n &= 49{,}2 \\ \lambda'' &= 5{,}61 \times 10^{-5} \text{ cm} \\ \lambda' &= 3{,}94 \times 10^{-5} \text{ cm} \\ T_0 &= 11\,830 \,. \end{aligned} \qquad (110)$$

§ 40. — Formule a double exposant avec $n'' = 181$.

Théoriquement, elle est plus satisfaisante que celle à simple exposant. Pratiquement, cette dernière fournit de si bons résultats qu'il ne semble guère utile de chercher mieux. Cependant la discussion peut être intéressante à d'autres points de vue: elle pourar servir à vérifier si les constantes de sensibilité spectrale de l'œil, déterminées pour des éclairements usuels, sont encore valables pour le cas qui nous occupe. Le fait que l'œil est soumis au phénomène de Purkinje laisse supposer le contraire. Pour cela, faisons un premier calcul en posant $n'' = 181$ (œil) et en adoptant les longueurs d'onde du § 39. La théorie du § 25 donne alors $n' = 29$ et la formule (52) est:

$$I = 82{,}5 \log\left(1 + 0{,}1023\left[\frac{11\,000}{T} - 1\right]\right) \\ - 462{,}5 \log\left(1 + 0{,}01266\left[\frac{11\,000}{T} - 1\right]\right). \qquad (111)$$

Les résidus sont relativement grands et ont un caractère nettement systématique:

B_0	+ 0,056	F_0	— 0,031	K_0	— 0,001
B_5	+ 0,018	F_5	— 0,023	K_5	+ 0,054
A_0	0,000	G_0	— 0,012	M	+ 0,093
A_5	— 0,017	G_5	— 0,005		

Calculons les améliorations à apporter aux coefficients 0,1023; 0,01266 et 11000 au moyen des trois équations linéaires obtenues en additionnant

1° Les deux équations relatives aux résidus B_0 et B_5;
2° Les trois équations correspondant à F_0, F_5 et G_0;
3° Les deux équations données par K_5 et M.

On trouve ainsi:

$$I = 82,5 \log\left(1 + 0,07334\left[\frac{11\,000}{T} - 1\right]\right)$$
$$- 462,5 \log\left(1 + 0,007978\left[\frac{11\,000}{T} - 1\right]\right). \quad (112)$$

Les résidus sont alors:

B_0	$+ 0,004$	F_0	$- 0,003$	K_0	$- 0,008$
B_5	$- 0,004$	F_5	$+ 0,012$	K_5	$+ 0,038$
A_0	$0,000$	G_0	$+ 0,018$	M	$+ 0,032$
A_5	$+ 0,023$	G_5	$+ 0,026$		

Ces résultats sont comparables, comme précision, à ceux donnés par la formule à simple exposant.

Il est alors intéressant de revenir aux constantes fondamentales. On trouve:

$$\lambda_p = 5,63 \times 10^{-5} \text{ cm},$$
$$\lambda_v = 8,90 \times 10^{-5} \text{ cm},$$

ce qui est contraire à l'expérience.

La valeur $n'' = 181$ ne convient donc pas aux circonstances de l'observation astronomique.

La formule exacte ne saurait être très différente de la formule à simple exposant. Le phénomène de Purkinje doit donc avoir une double action sur l'œil: la diminution de l'intensité de la source déplace le maximum de sensibilité vers les petites longueurs d'onde; elle diminue l'acuité du maximum de la courbe de sensibilité de l'œil.

§ 41. — Conclusions.

Dans l'état actuel des mesures astro-photométriques, les hypothèses du § 19 donnent pleine satisfaction, au moins en ce qui concerne les étoiles géantes.

Il est cependant à désirer que la précision des mesures soit accrue, et surtout que la sensibilité des récepteurs utilisés, soit étudiée très complètement, et cela dans des conditions voisines de celles de l'observation astronomique.

Ceci est particulièrement important pour les observations visuelles. Car, il sera toujours possible de reconstituer, tant bien que mal, des plaques photographiques analogues à celles utilisées dans un travail donné; mais il est à tout jamais impossible d'être renseigné sur les particularités d'un œil, qui a nécessairement vieilli depuis les observations. Il semble que cette étude de l'œil devrait être faite à l'époque même des mesures, car il y a tout lieu de supposer que « l'équation personnelle photométrique » soit variable et capricieuse, au même titre que l'équation personnelle des observateurs de position.

La connaissance de la courbe de sensibilité permettrait de réduire les observations photométriques en magnitudes bolométriques. Leur comparaison, de catalogue à catalogue, serait du plus haut intérêt, pour l'étude des échelles photométriques admises par les divers observateurs. Cette réduction se ferait en calculant l'index absolu (§ 11) du récepteur utilisé. Ce calcul est possible au moyen des hypothèses du § 19, et cela pour chaque type spectral.

La question reste ouverte de savoir si la théorie précédente est encore applicable aux photomètres électriques. Leur perfectionnement, au point de vue de la stabilité et de la sensibilité, l'accroissement du nombre des mesures, au moyen de métaux différents, permettent de grands espoirs. En effet, il sera peut-être une fois possible d'appliquer en toute sécurité la méthode de M. Russel, qui calcule les températures stellaires à partir de l'index.

Cependant, l'atmosphère terrestre constitue encore un gros obstacle à l'obtention de résultats très sûrs. Le perfectionnement de nos connaissances sur l'extinction, *au moment de l'observation*, semble très désirable [1].

[1] Le sujet de cette étude m'a été proposé par M. le Professeur Tiercy, Directeur de l'Observatoire de Genève; je tiens à le remercier ici pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail.