Sur la relation entre la loi d'assombrissement et la distribution de température à l'intérieur d'une étoile

Sur la relation entre la loi d'assombrissement et la distribution de température à l'intérieur d'une étoile

PAR

Georges TIERCY

RÉSUMÉ

Il s'agit ici d'un problème abordé pour la première fois par Milne en 1922, puis par Lundblad en 1923. La présente étude aboutit à la relation:

$$B(\tau) = \mathcal{F} \cdot \frac{2 - \alpha - \left(3 - \frac{\alpha}{2}\right)\tau}{4\left(1 - \frac{\alpha}{3}\right)},$$

où τ est l'opacité totale d'une couche stellaire d'épaisseur $(r_0 - r)$, r_0 étant le rayon de la surface de l'étoile et r le rayon d'une sphère concentrique plus petite que l'étoile; α est le coefficient d'assombrissement du disque visuel. Cette solution a l'avantage de donner successivement toutes les approximations du problème, sous la forme:

$$T^4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{\alpha}{2}}{1 - \frac{\alpha}{3}} \cdot T_e^4 \left(1 - \frac{3 - \frac{\alpha}{2}}{2 - \alpha}\tau\right).$$

Il suffit de connaître les valeurs successives de α.

1. — Introduction.

Nous avons récemment montré [1] comment on peut établir le raccord entre la distribution de température valable dans la partie centrale de l'étoile et la distribution de température dans la couche périphérique.

Rappelons que la distribution centrale résulte des travaux de M. C. Bialobrzeski [2] en 1913, et de la théorie construite par M. A.-S. Eddington dès 1915. Sous sa forme la plus simple, cette théorie ramène l'étude de l'équilibre radiatif d'une étoile à l'étude d'un cas polytropique du type d'Emden, avec la classe polytropique $n = 3$; c'était déjà ce que Bialobrzeski envisageait, sans toutefois préciser le caractère de l'équilibre thermodynamique stellaire, comme l'a fait ensuite M. Eddington. Ce dernier a d'ailleurs montré que la solution polytropique est valable dans une sphère de rayon r' égal aux $\frac{3}{4}$ environ du rayon r_0 de l'étoile; plus exactement, en employant la variable radiale ξ d'Emden, r_0 correspond à $\xi_0 = 6{,}9$ tandis que r' répond à $\xi = 5$. La solution polytropique donne une distribution de température indiquant, sur la sphère r', une température T' de l'ordre de 10^6 degrés.

En dehors de la sphère r', et jusqu'à la frontière r_0 de l'étoile, la solution polytropique n'est plus acceptable; elle conduit à une température nulle à la surface du corps, ce qui n'est manifestement pas le cas; on sait en effet que la température T_0 de surface est de l'ordre de grandeur de 10^4 degrés. Dans cette couche périphérique, on choisira telle loi qu'on voudra, pourvu qu'elle respecte la continuité de la pression et de la température sur la sphère r' de séparation.

Dans l'article cité, nous avons donné une solution numérique satisfaisante, basée sur la théorie générale de l'équilibre

[1] G. Tiercy, Sur la distribution des températures à l'intérieur d'une étoile. *C. R. Soc. de Phys. Genève*, 1934, II (*Archives* 1934, supplément); le même dans *Publ. Obs. Genève*, fasc. 26.

[2] Sur l'équilibre thermodynamique d'une sphère gazeuse libre. *Bull. Acad. Sc. Cracovie*, A, 1913, p. 264.

radiatif telle que l'ont établie notamment les travaux récents de Schwarzschild, Milne, Lindblad, Eddington, Jeans. Nous avons proposé une solution de seconde approximation, résumée par les formules suivantes:

$$\left\{\begin{aligned} B(\tau) &= \frac{7}{16}\mathcal{F}\cdot\left[1-\frac{27}{14}\tau\right], \\ I(\tau,\theta) &= \frac{7}{16}\mathcal{F}-\frac{27}{32}\mathcal{F}\cdot(\tau-\cos\theta), \\ T^4 &= \frac{7}{16}T_e^4\left(1-\frac{27}{14}\tau\right), \end{aligned}\right. \tag{1}$$

analogues aux formules approchées données par les auteurs cités plus haut; et nous avons montré comment on peut effectuer un calcul convenable des τ dans la couche périphérique, de $\xi = 5$ à ξ_0.

Rappelons que B (T) ou B (τ) représente l'intensité du rayonnement noir, I (τ, θ) l'intensité de la radiation faisant un angle θ avec la normale à la surface considérée, T_e la température effective, et $\mathcal{F}$ le flux moyen équivalent défini par l'égalité:

$$F = \pi\mathcal{F},$$

où F est le flux net de surface. Quant à la quantité τ, désignée sous le nom d'*opacité totale* dans la théorie de l'équilibre radiatif, elle est définie par la relation:

$$\tau = \int_{r_0}^{r} k\rho\, dr; \tag{2}$$

k est le coefficient d'absorption; et l'on sait qu'on a:

$$k = \frac{k_1}{\mu}\cdot\frac{\rho}{T^{\frac{7}{2}}},$$

où k_1 est une constante et μ le poids atomique moyen; on voit de suite que, sous cette forme et avec ces limites, τ sera un nombre négatif lorsqu'on s'enfoncera sous la surface de l'étoile en direction du centre.

L'étude de raccord numérique que nous avons exposée [1] a montré que la fonction $B(\tau)$ présente une singularité à la surface ($\tau = 0$), comme l'avait indiqué Milne, en ce sens que B tend elle-même vers une valeur finie déterminée à la surface, tandis que sa dérivée B' prend des valeurs de plus en plus grandes pour τ petit et devient infinie pour $\tau = 0$. D'ailleurs cette singularité ne nous gênera pas dans la présente étude, où nous n'aurons pas à utiliser de développement taylorien pour $B(\tau)$; l'emploi d'un tel développement serait en effet criticable à la surface; nous n'y aurons pas recours. Nous nous bornerons à exiger que le flux net de surface ait la valeur voulue:

$$F = \pi \mathcal{F} = \sigma T_e^4 ;$$

c'est bien le cas de la solution (1), pour laquelle on a:

$$2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} I(0, \theta) \cos\theta \,.\, \sin\theta \,.\, d\theta = \pi \mathcal{F} ;$$

la singularité n'intervient que dans le calcul numérique des τ (voir notre article cité).

2. — La loi d'assombrissement relative a (1).

Avec $\tau = 0$, la solution (1) des équations de l'équilibre radiatif donne:

$$I(0, \theta) = \frac{1}{2} \mathcal{F} \,.\, \left(\frac{7}{8} + \frac{27}{16} \cos\theta\right) , \tag{3}$$

approximation qui diffère peu, numériquement, de la première approximation donnée par Milne:

$$I(0, \theta) = \frac{1}{2} \mathcal{F} \,.\, \left(1 + \frac{3}{2} \cos\theta\right) . \tag{4}$$

[1] G. Tiercy, *loc. cit.*

L'intensité suivant la ligne joignant le centre de l'étoile à l'observateur est:

$$\mathrm{I}(0\,,\,0) = \frac{41}{32}\mathcal{F}\,; \tag{5}$$

de sorte qu'on obtient le rapport:

$$\frac{\mathrm{I}(0\,,\,\theta)}{\mathrm{I}(0\,,\,0)} = \frac{14}{41} + \frac{27}{41}\cos\theta\,. \tag{6}$$

Ce rapport exprime ce qu'on appelle la *loi d'assombrissement* pour la surface du disque visuel apparent; elle est évidemment de la forme générale:

$$\frac{\mathrm{I}(0\,,\,\theta)}{\mathrm{I}(0\,,\,0)} = 1 - \alpha + \alpha\cos\theta\,; \tag{7}$$

le coefficient α est dit *coefficient d'assombrissement*; dans le cas de notre approximation (1), on a:

$$\alpha = \frac{27}{41}\,; \tag{8}$$

la première approximation de Milne (*M. N.*, 81, 1921) conduit à $\alpha = \frac{3}{5}$; il en est de même de la première approximation d'Eddington (*The internal constitution of the Stars*, 1926); celle de Jeans (*M. N.*, 81, 1921) donne $\alpha = \frac{2}{3}$, comme celle de Schwarzschild; on remarquera que la valeur (8) est $\alpha = 0{,}659$ très proche de $\frac{2}{3}$.

3. — Relation entre la loi d'assombrissement et la distribution de température a l'intérieur du corps (couche superficielle).

C'est là un problème qui a été abordé pour la première fois par Milne en 1922 [1], puis par Lundblad en 1923 [2].

Il s'agit d'exprimer la fonction B (τ) au moyen du coefficient

[1] *Phil. Trans. Royal Soc.*, 223 A, 1922.
[2] *Astrophysical Journal*, 58, 1923.

d'assombrissement α; du point de vue physique, on peut admettre en effet qu'à une loi d'assombrissement donnée correspond une seule distribution de température.

On a pour le flux net en général:

$$F = \pi\mathcal{F} = \int I \cos\theta d\omega = 2\pi \int_0^{\pi} I(\tau, \theta) \cos\theta . \sin\theta . d\theta ;$$

pour le flux net de surface, les limites de l'intégrale sont 0 et $\frac{\pi}{2}$, puisqu'il n'y a pas de flux entrant; on peut écrire:

$$\mathcal{F} = \frac{2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} I(0, \theta) \cos\theta . \sin\theta . d\theta}{2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta . \sin\theta . d\theta} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} I(0, \theta) \cos\theta . \sin\theta . d\theta , \tag{9}$$

où l'on voit que $\mathcal{F}$ est l'intensité moyenne apparente pour le disque visuel entier.

Portant alors (7) dans (9), on obtient:

$$\frac{\mathcal{F}}{I(0, 0)} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \alpha + \alpha\cos\theta) \cos\theta . \sin\theta . d\theta = 1 - \frac{\alpha}{3} ;$$

$$\mathcal{F} = I(0, 0) . \left(1 - \frac{\alpha}{3}\right) , \tag{10}$$

relation qui a toujours lieu lorsqu'il existe un coefficient d'assombrissement α.

D'autre part, l'équation de l'équilibre radiatif parfait ($\varepsilon = 0$; la matière ne libère aucune énergie subatomique) donne:

$$2B(\tau) = \int_0^{\pi} I(\tau, \theta) . \sin\theta . d\theta , \tag{11}$$

valable près de la surface; on en tire, pour $\tau = 0$:

$$2B(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} I(0, \theta) . \sin\theta . d\theta ;$$

et à cause de :

$$I(0,\theta) = I(0,0).[1-\alpha+\alpha\cos\theta], \tag{12}$$

on a:

$$2B(0) = I(0,0).\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\alpha+\alpha\cos\theta)\sin\theta.d\theta;$$

$$2B(0) = I(0,0).\left(1-\frac{\alpha}{2}\right), \tag{13}$$

relation qui a toujours lieu, comme (10), lorsqu'on traite le cas d'un α déterminé.

De (10) et (13), on trouve que:

$$\frac{2B(0)}{\mathcal{F}} = \frac{1-\frac{\alpha}{2}}{1-\frac{\alpha}{3}},$$

$$B(0) = \frac{\mathcal{F}}{2}.\frac{1-\frac{\alpha}{2}}{1-\frac{\alpha}{3}}, \tag{14}$$

égalité toujours satisfaite pour tout cas de α. Cela conduit à une température de surface T_0 donnée par:

$$T_0^4 = \frac{1}{2}.\frac{1-\frac{\alpha}{2}}{1-\frac{\alpha}{3}}.T_e^4; \tag{15}$$

on peut donc, dès qu'on connaît α, préciser la température de surface T_0 en fonction de T_e.

Par exemple, avec $\alpha = \frac{27}{41}$, on obtient:

$$T_0^4 = \frac{55}{128}T_e^4, \tag{16}$$

température T_0 très légèrement inférieure à celle donnée par notre approximation (1):

$$T_0^4 = \frac{7}{16}T_e^4 = \frac{56}{128}T_e^4;$$

en fait, (6) fournit une troisième approximation; car nous avons utilisé l'intensité correspondant à (1) pour obtenir une nouvelle approximation de B (0).

Si l'on adopte cette nouvelle valeur (16) de T_0, cela revient à poser:

$$a_1 = \frac{55}{128}\mathcal{F}, \quad \text{au lieu de} \quad \frac{7}{16}\mathcal{F},$$

dans l'expression:

$$B(\tau) = a_1 + a_2\tau ;$$

il faut donc calculer la valeur correspondante de a_2, qui se trouve par la condition que le flux net de surface soit égal à $\pi\mathcal{F}$; on obtient:

$$\left\{\begin{aligned} B(\tau) &= \frac{55}{128}\mathcal{F} . \left(1 - \frac{219}{110}\tau\right), \\ I(\tau, \theta) &= \frac{55}{128}\mathcal{F} - \frac{219}{256}\mathcal{F} . (\tau - \cos\theta) ; \end{aligned}\right. \tag{17}$$

cela fournirait une nouvelle valeur de α, au moyen de laquelle on établirait une nouvelle approximation de T_0, de B (τ) et de I (τ, θ).

Mais, comme on s'en rend compte immédiatement en comparant entre elles les solutions (1) et (17), la différence effective est dès lors si faible qu'il ne paraît pas utile de pousser plus loin cette recherche numérique.

D'ailleurs, il suffit de généraliser le calcul ci-dessus pour obtenir une expression de B (τ) en fonction de α. De (15), on a:

$$a_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{\alpha}{2}}{1 - \frac{\alpha}{3}} . \mathcal{F} ;$$

puis:

$$B(\tau) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{\alpha}{2}}{1 - \frac{\alpha}{3}} \mathcal{F} + a_2 \tau \ ;$$

$$I(\tau, \theta) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{\alpha}{2}}{1 - \frac{\alpha}{3}} \mathcal{F} + a_2 (\tau - \cos\theta) \ ;$$

$$I(0, \theta) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{\alpha}{2}}{1 - \frac{\alpha}{2}} \mathcal{F} - \alpha_2 \cos\theta \ ;$$

$$\text{Flux net de surface} = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} I(0, \theta) \,.\, \cos\theta \,.\, \sin\theta \,.\, d\theta \ ;$$

$$\pi\mathcal{F} = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{\alpha}{2}}{1 - \frac{\alpha}{3}} \mathcal{F} - a_2 \cos\theta \right] . \cos\theta \,.\, \sin\theta \,.\, d\theta \ ;$$

$$\pi \,.\, \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{\alpha}{2}}{1 - \frac{\alpha}{3}} \mathcal{F} - \frac{2\pi\alpha_2}{3} = \pi\mathcal{F} \ ;$$

$$a_2 = -\mathcal{F} \,.\, \left[\frac{3\left(1 - \frac{\alpha}{6}\right)}{4\left(1 - \frac{\alpha}{3}\right)} \right] ;$$

$$B(\tau) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{\alpha}{2}}{1 - \frac{\alpha}{3}} \,.\, \mathcal{F} \left[1 - \frac{3 - \frac{\alpha}{2}}{2 - \alpha} \,.\, \tau \right] . \qquad (18)$$

Cette formule est valable quel que soit α; elle conduit à une valeur correcte du flux net de surface, soit $\pi\mathcal{F}$. Si on y fait $\alpha = \frac{3}{5}$, on trouve la solution (1) de seconde approximation, qui conduit à la nouvelle valeur $\alpha = \frac{27}{41}$; portant celle-ci dans

(18), on trouve la solution de troisième approximation (17); et ainsi de suite.

On peut écrire cette expression générale de B (τ) comme suit:

$$B(\tau) = \mathcal{F} \cdot \frac{2 - \alpha - \left(3 - \frac{\alpha}{2}\right)\tau}{4\left(1 - \frac{\alpha}{3}\right)} \; ; \qquad (18')$$

je ne crois pas que cette expression ait déjà été signalée; elle me paraît assez commode; la distribution correspondante des températures est:

$$T^4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{\alpha}{2}}{1 - \frac{\alpha}{3}} \cdot T_e^4 \left(1 - \frac{3 - \frac{\alpha}{2}}{2 - \alpha} \tau \right) . \qquad (19)$$

D'autres formules ont été données pour B (τ, α), notamment par Milne [1] et par Lundblad [2]; elles sont établies en faisant usage d'un développement de B (τ) en série de Taylor:

$$B(\tau(= B(0) + \tau B'(0) + \dots ;$$

mais nous avons dit au n° 1 que l'emploi d'un tel développement est criticable; il a d'ailleurs été critiqué par Faxen [3]; il semble qu'il vaille mieux l'éviter.

L'avantage de la nouvelle solution (18) ou (18') est qu'on n'y a pas recours au développement en question; et cette formule est capable de nous fournir toutes les approximations numériques successives du problème.

Cependant, il ne faut pas oublier que la forme même de cette solution de B (τ) n'est pas rigoureuse, et qu'il y a une chute rapide de température dans la dernière pellicule de la matière stellaire, comme nous l'avons montré dans l'article cité [4] au

[1] *Loc. cit.*
[2] *Loc. cit.*
[3] *A. N.*, 224, 1925, p. 241.
[4] *C. R. Soc. de Phys.*, 1934, II (*Archives* 1934, supplément); le même dans *Publ. Obs. Genève*, fasc. 26.

n° 1. Dans cette pellicule extrême, la fonction B (τ) devrait contenir un terme en $\tau \log \tau$. Mais pratiquement, il ne paraît pas utile de retenir ce fait dans les formules; l'essentiel est, me semble-t-il, d'obtenir une valeur correcte du flux de surface et d'assurer le raccord avec la sphère centrale de rayon r'.

Or, ce raccord est assuré par les formules (1) par exemple, complétées par le procédé de distribution des températures exposé dans l'article cité [4]; la singularité signalée s'introduit alors sans danger par le calcul des τ.