

Sensibilité spectrale des récepteurs d'énergie rayonnante : applications astronomique et industrielles [suite]

Autor(en): **Rossier, Paul**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Archives des sciences physiques et naturelles**

Band (Jahr): **16 (1934)**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-741458>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

SENSIBILITÉ SPECTRALE

DES

RÉCEPTEURS D'ÉNERGIE RAYONNANTE

APPLICATIONS ASTRONOMIQUES ET INDUSTRIELLES

PAR

Paul ROSSIER

(suite)

V. — AUTRES APPLICATIONS DES COURBES DE SENSIBILITÉ.

27. — *Calcul du diamètre apparent d'une étoile en fonction de la température.*

Il existe une relation simple entre la magnitude bolométrique apparente, la température et le demi-diamètre apparent δ de deux étoiles, relation qui est la suivante

$$m'_{b, \text{app}} - m''_{b, \text{app}} = 5 \log \frac{\delta''}{\delta'} + 10 \log \frac{T''_e}{T'_e}$$

Si l'on a affaire à des magnitudes non bolométriques, la formule doit être complétée comme suit

$$m'_{1, \text{app}} + I'_1 - (m''_{1, \text{app}} + I''_1) = 5 \log \frac{\delta''}{\delta'} + 10 \log \frac{T''_e}{T'_e}$$

Il est facile d'éviter l'intervention simultanée de l'index absolu et de la température, et d'obtenir une relation liant

directement la température, le demi-diamètre apparent et les constantes de sensibilité.

Ecrivons l'expression de la magnitude absolue sous la forme

$$m_r = \mathcal{E} - 5 \log r_0 + 2,5(a + 4) \log \left(1 + \frac{b}{a\lambda_s T_e} \right).$$

Rapprochons-la des deux formules classiques suivantes

$$m_r = 5 + m_{\text{app}, r} + \log \pi,$$

$$\frac{\pi}{\delta} = \frac{\rho}{r_0}.$$

$m_{\text{app}, r}$ est la magnitude apparente, par opposition à la magnitude absolue (à 10 parsecs) m_r , ρ est le rayon de l'orbite terrestre et π la parallaxe.

Éliminons la magnitude absolue m_r ; il intervient un produit πr_0 , qui, d'après la dernière équation, n'est autre que $\rho \delta$. Pour δ , il vient enfin

$$\log \delta = 0,2 \mathcal{E} - 3,32244 - 0,2 m_{\text{app}} + 0,5(a + 4) \log \left(1 + \frac{b}{a\lambda_s T_e} \right).$$

On suppose le rayon du Soleil pris pour unité, ce qui donne $\rho = 215$ et $\log \rho = 2,33244$.

On détermine la constante \mathcal{E} en appliquant la formule en δ ou celle donnant la magnitude absolue à un astre connu, le Soleil, par exemple.

Dans le cas de l'acuité infinie, l'expression logarithmique en T_e de la magnitude est remplacée par $\frac{1,08574 b}{\lambda_s T_e}$. Il vient alors

$$\log \delta = 0,2 \mathcal{E}' - 3,33244 - 0,2 m_{\text{app}} + \frac{0,54287 \cdot b}{\lambda_s T_e}.$$

28. — Calcul de la longueur d'onde effective, cas du spectre normal.

On entend par longueur d'onde effective celle du maximum de puissance apparente, dans un spectre observé au moyen d'un récepteur et d'un système dispersif donnés.

Considérons le cas d'un spectre normal. La longueur d'onde effective est donnée par l'équation

$$\frac{dL'}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda} \{ E(\lambda) \sigma(\lambda) \} = 0 .$$

Dans l'hypothèse de la validité de la loi de Wien, le calcul est très simple, car on a

$$\frac{dE(\lambda)}{d\lambda} = \lambda^{-1} \left(\frac{b}{\lambda T_e} - 5 \right) E(\lambda)$$

et, pour $\sigma(\lambda)$,

$$\frac{d\sigma(\lambda)}{d\lambda} = \frac{a}{\lambda} \left(\frac{\lambda_s}{\lambda} - 1 \right) \sigma(\lambda) ,$$

d'où

$$\frac{dL'}{d\lambda} = \lambda^{-1} E(\lambda) \sigma(\lambda) \left(\frac{b}{\lambda T_e} - 5 + \frac{a\lambda_s}{\lambda} - a \right) .$$

La parenthèse seule peut s'annuler et la longueur d'onde effective est donnée par l'équation

$$\lambda_a = \frac{1}{a+5} \left(a\lambda_s + \frac{b}{T_e} \right) .$$

Quoique les deux fonctions $E(\lambda)$ et $\sigma(\lambda)$ possèdent chacune un maximum, d'abscisses généralement différentes, la puissance apparente n'en présente qu'un.

La longueur d'onde effective diminue lorsque la température augmente et cela d'autant plus rapidement que cette température est moindre. Lorsque T_e augmente indéfiniment, la longueur d'onde effective tend vers la limite finie

$$\frac{a\lambda_s}{a+5} .$$

Considérons la différence $\lambda_a - \lambda_m$, où λ_m est la longueur d'onde du maximum d'énergie. La loi du déplacement donne

$$\lambda_m = \frac{b}{5T_e} .$$

Il vient pour la différence

$$\lambda_a - \lambda_m = \frac{a}{a+5} \left(\lambda_s - \frac{b}{5T_e} \right) = \frac{a}{a+5} (\lambda_s - \lambda_m) .$$

Cette différence a le signe de $\lambda_s - \lambda_m$.

Examinons encore

$$\lambda_a - \lambda_s = \frac{5}{a+5} (\lambda_m - \lambda_s) .$$

Son signe est l'opposé de celui de $\lambda_s - \lambda_m$.

La longueur d'onde effective λ_a est donc comprise entre les deux longueurs d'onde λ_m et λ_s du maximum d'émission et du maximum de sensibilité. Elle est égale à λ_s si λ_m l'est, soit pour la température $T_e = \frac{b}{5\lambda_s}$.

Voyons l'influence de l'exposant d'acuité. Si $a = 0$, le récepteur est bolométrique; on a bien

$$\lambda_a = \frac{b}{5T_e} = \lambda_m .$$

Supposons $a = \infty$. Il vient $\lambda_a = \lambda_s$.

La longueur d'onde effective serait constante dans ce cas. L'hypothèse de la sensibilité concentrée est incompatible avec la réalité, tandis qu'au moins qualitativement, la théorie générale est satisfaisante.

29. — Colorimétrie.

On peut essayer de caractériser la couleur d'un astre, si elle n'est pas trop complexe, par la longueur d'onde du centre de gravité de l'aire limitée par l'axe des λ et la courbe de la densité de puissance apparente $E(\lambda) \sigma(\lambda)$.

Nous l'appellerons longueur d'onde colorimétrique λ_c . On a évidemment

$$\lambda_c = \frac{\int_0^{\infty} \lambda E(\lambda) \sigma(\lambda) d\lambda}{\int_0^{\infty} E(\lambda) \sigma(\lambda) d\lambda} .$$

Ces intégrales sont du type de celle déjà rencontrée à propos du calcul de la magnitude. Si l'on admet la validité de l'équation spectrale de Wien, le calcul donne

$$\lambda_c = \frac{a\lambda_s + \frac{b}{T_e}}{a+3} = \frac{a+5}{a+3}\lambda_a.$$

Les deux longueurs d'onde effective et colorimétrique sont proportionnelles. Celle-ci ne donne donc rien de plus que la première.

Si l'on suppose infinie l'acuité du maximum de sensibilité, on trouve

$$\lambda_c = \lambda_a = \lambda_s.$$

L'hypothèse de la sensibilité concentrée conduirait donc à l'identité de la couleur de toutes les étoiles, ce qui est évident *a priori*.

Examinons encore le cas d'un récepteur bolométrique, en posant $a = 0$. Il vient

$$\lambda_c = \frac{5}{3}\lambda_a = \frac{5}{3}\lambda_m.$$

Dans le cas d'un récepteur bolométrique, la longueur d'onde colorimétrique est les $\frac{5}{3}$ de celle du maximum d'émission.

30. — *Expressions diverses concernant la magnitude.*

Nous avons vu que la magnitude globale ne peut généralement pas être représentée par la magnitude au maximum de sensibilité. On peut se demander si, parmi diverses longueurs d'ondes caractéristiques, il n'en est pas une à laquelle pourrait correspondre une magnitude élémentaire représentant mieux la magnitude proprement dite. A part celle du maximum de sensibilité λ_s , trois longueurs d'onde jouent un rôle important dans ces questions; ce sont celles du maximum d'émission λ_m , celle du maximum d'énergie apparente λ_a et enfin la longueur d'onde colorimétrique λ_c .

Des magnitudes correspondantes, examinons tout d'abord celle relative au maximum d'énergie apparente, soit à

$$\lambda = \lambda_a = \frac{a\lambda_s + \frac{b}{T_e}}{a + 5}.$$

Le calcul donne

$$\begin{aligned} m(\lambda_a) &= \mathcal{E} - 5 \log r_0 + 2,5 (a + 5) \log \left(a\lambda_s + \frac{b}{T_e} \right) \\ &\quad - 2,5 (a + 5) \log (a + 5) + 1,08574 (a + 5) \\ &= \mathcal{E}' - 5 \log r_0 + 2,5 (a + 5) \log \left(a\lambda_s + \frac{b}{T_e} \right). \end{aligned}$$

Elle est identique à la magnitude globale, sauf que le facteur $a + 5$ du terme logarithmique doit être remplacé par $a + 4$. Dans le cas où $a = 0$, qui correspond au récepteur bolométrique, le terme en T_e prend la forme $-12,5 \log T_e$, qui n'est autre que l'expression, dans le langage des magnitudes, de la loi du maximum de Wien: le maximum de l'émission du corps noir est proportionnel à la cinquième puissance de la température.

Si a augmente indéfiniment, un calcul identique à celui effectué à l'occasion de la magnitude globale conduit à la formule de la magnitude au maximum de sensibilité; cela est évident *a priori*, puisqu'alors la longueur d'onde effective et celle du maximum de sensibilité sont confondues.

Pour une acuité élevée du maximum de sensibilité, les valeurs de la magnitude globale et de la magnitude au maximum de puissance apparente sont pratiquement égales. Les deux expressions ont la même forme analytique; l'emploi de l'une ne présente aucun avantage sur l'autre.

Voyons maintenant la magnitude correspondant à la longueur d'onde colorimétrique. Un calcul analogue au précédent donne

$$\begin{aligned} m(\lambda_c) &= \mathcal{E} - 5 \log r_0 + 2,5 (a + 5) \log \left(a\lambda_s + \frac{b}{T_e} \right) \\ &\quad - 2,5 (a + 5) \log (a + 3) + 1,08574 (a + 3) \\ &= \mathcal{E}'' - 5 \log r_0 + 2,5 (a + 5) \log \left(a\lambda_s + \frac{b}{T_e} \right). \end{aligned}$$

Formons la différence de ces deux magnitudes élémentaires

$$m(\lambda_a) - m(\lambda_c) = 2,5(a + 5) \log \frac{a + 3}{a + 5} + 2 \cdot 1,08574 .$$

Cette différence est constante. Les remarques faites à propos de la magnitude au maximum de puissance apparente s'appliquent donc à la magnitude correspondant à la longueur d'onde colorimétrique.

Examinons encore la magnitude au maximum d'émission:

$$\begin{aligned} m_e &= \mathcal{E} - 5 \log r_0 + 2,5(a + 5) \log \frac{b}{5T_e} + 1,085745 \left(\frac{5a\lambda_s T_e}{b} + 5 \right) \\ &= \mathcal{E}' - 5 \log r_0 - 1,08574(a + 5) \log T_e + 5 \cdot 1,08574 \frac{a\lambda_s T_e}{b} . \end{aligned}$$

Les deux termes en T_e varient en sens inverses. Formons les dérivées

$$\frac{dm_e}{dT_e} = - \frac{1,08574(a + 5)}{T_e} + \frac{5 \cdot 1,08574 a \lambda_s}{b}$$

et

$$\frac{d^2 m_e}{dT_e^2} = \frac{1,08574(a + 5)}{T_e^2} .$$

La magnitude m_e est minimum pour

$$T_e = \frac{a + 5}{a} \times \frac{b}{5\lambda_s} = \frac{a + 5}{a} T' ,$$

où T' est la température du corps noir dont l'émission est maximum pour la longueur d'onde λ_s . Ce minimum a lieu pour des températures courantes du domaine astronomique.

Pour $a = 0$, cas du récepteur bolométrique, on retombe, pour l'expression de m_e , sur la loi du maximum de Wien; les dérivées et le minimum n'ont alors aucun sens, puisque λ_s est indéterminé.

L'hypothèse $a = \infty$, de la sensibilité concentrée, est vide de sens; elle conduirait en général à une mesure d'énergie dans

un domaine où la sensibilité du récepteur est nulle, sauf si $\lambda_s = \lambda_m$.

Les magnitudes diverses que nous venons d'étudier sont en réalité des expressions de la densité de puissance apparente; elles sont de nature différente d'une magnitude globale.

31. — *Calcul du diamètre apparent d'une étoile en fonction de la longueur d'onde effective.*

Nous avons vu (§ 27) que le demi-diamètre apparent d'une étoile est donné par la formule

$$\log \delta = 0,2 \mathcal{E} - 3,33244 - 0,2 m_{\text{app}} + 0,5 (a + 4) \log \left(1 + \frac{b}{a \lambda_s T_e} \right)$$

tandis que la température effective T_e est liée (§ 28) à la longueur d'onde effective λ_a par l'équation

$$\lambda_a = \frac{1}{a + 5} \left(a \lambda_s + \frac{b}{T_e} \right).$$

Éliminons la température. Il vient

$$\begin{aligned} \log \delta &= 0,2 \mathcal{E} - 3,33244 - 0,2 m_{\text{app}} \\ &\quad + 0,5 (a + 4) \log \frac{a + 5}{a} + 0,5 (a + 4) \log \frac{\lambda_a}{\lambda_s} \\ &= \mathcal{F}(a, \lambda_s) - 0,2 m_{\text{app}} + 0,5 (a + 4) \log \lambda_a. \end{aligned}$$

Le second membre est indépendant de toute échelle de température. λ_a est un résultat d'observation astronomique; a et λ_s , constantes de sensibilité du récepteur, peuvent, au moins en principe, être obtenus au laboratoire.

32. — *Calcul de la parallaxe d'une étoile dont le rayon est connu par des moyens géométriques.*

Il est parfois possible de déterminer le rayon r_0 d'une étoile dont la parallaxe est inconnue. Par exemple, l'étude complète des variables à éclipses, étude photométrique et spectro-

scopique, permet de calculer ce rayon, au moins pour l'une des composantes.

Connaissant la magnitude apparente de l'étoile, il est possible de calculer la parallaxe.

Pour cela, reprenons les deux équations du § 27:

$$m_r = \mathcal{E} - 5 \log r_0 + 2,5(a + 4) \log \left(1 + \frac{b}{a\lambda_s T_e} \right),$$

$$m_r = 5 + m_{\text{app}} + 5 \log \pi .$$

Éliminons la magnitude absolue m_r et résolvons par rapport à $\log \pi$. Il vient

$$\log \pi = 0,2\mathcal{E} - 1 + 0,5(a + 4) \log \left(1 + \frac{b}{a\lambda_s T_e} \right) - 0,2m_{\text{app}} - \log r_0 .$$

La constante \mathcal{E} est déterminée comme plus haut en appliquant la formule en $\log \pi$ ou celle en m_r à un astre connu, le Soleil, par exemple.

On peut, encore ici, introduire la longueur d'onde effective et éliminer la température.

Il vient alors

$$\log \pi = 0,2\mathcal{E} - 1 + 0,5(a + 4) \log \frac{a + 5}{a\lambda_s} \cdot \lambda_a - 0,2m_{\text{app}} - \log r_0 .$$

Les remarques faites précédemment sur l'indépendance de toute échelle de température s'appliquent encore ici.

33. — Relation entre la longueur d'onde effective et l'index absolu.

Rapprochons les expressions de la longueur d'onde effective (§ 28)

$$\lambda_a = \frac{1}{a + 5} \left(a\lambda_s + \frac{b}{T_e} \right)$$

et de l'index absolu, relatif au même récepteur (§ 18)

$$I = 2,5 \log \left(\frac{T_e}{T_e^*} \right)^4 \left(\frac{a\lambda_s + \frac{b}{T_e}}{a\lambda_s + \frac{b}{T_e^*}} \right)^{a+4}.$$

Éliminons la température T_e entre ces deux expressions. Il vient

$$I = 10 \log \frac{(a+5)\lambda_a^* - a\lambda_s}{(a+5)\lambda_a - a\lambda_s} + 2,5(a+4) \frac{\lambda_a}{\lambda_a^*}.$$

où λ_a^* est la longueur d'onde effective d'une étoile d'index absolu nul.

Cette formule est indépendante de toute échelle de température. Elle ne contient que des données de l'observation astronomique, la longueur d'onde effective λ_a ou d'expériences de laboratoire, les constantes de sensibilité a et λ_s relatives au récepteur considéré.

A notre connaissance, aucune application n'a été faite des trois dernières formules démontrées.

34. — Calcul de la longueur d'onde effective, cas du spectre prismatique.

Les longueurs d'onde effectives sont généralement déterminées au moyen de réseaux, dont la dispersion est normale. L'emploi du réseau a comme inconvénients une grosse perte de lumière et une multiplication des images qui en limitent l'utilisation aux étoiles brillantes, déjà bien connues par d'autres méthodes. L'emploi d'un prisme supprime ces inconvénients, mais l'interprétation des résultats est compliquée par le fait que le spectre n'est pas normal.

Nos hypothèses permettent de traiter ce problème. La puissance apparente dans un domaine de largeur $d\lambda$ du spectre est

$$dL' = E(\lambda) \sigma(\lambda) d\lambda = E(\lambda) \sigma(\lambda) \frac{d\lambda}{dx} \cdot dx,$$

où x est l'abscisse du point considéré du spectre.

Le maximum apparent de densité de puissance apparente a lieu pour la longueur d'onde λ_p donnée par l'équation

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dL'}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left\{ E(\lambda_p) \sigma(\lambda_p) \frac{d\lambda_p}{dx} \right\} = 0 .$$

Dans le cas particulier de la validité de l'équation spectrale de Wien et de la fonction $\sigma(\lambda)$, il vient

$$\frac{d^2\lambda_p}{dx^2} + \left(\frac{d\lambda_p}{dx} \right)^2 \lambda_p^{-2} \left(\frac{b}{T_e} - [a + 5]\lambda_p + a\lambda_s \right) = 0 ,$$

équation qui contient comme cas particulier celle déjà trouvée dans le cas du spectre normal; il suffit d'annuler la deuxième dérivée pour cela.

Discutons sommairement l'équation générale. La longueur d'onde effective apparente λ_p est peu différente de la longueur d'onde effective λ_a correspondant au cas de la dispersion normale.

Posons donc

$$\lambda_p = \lambda_a + \Delta\lambda .$$

λ_a annule la parenthèse de l'équation fondamentale. Il vient

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_p^2 \frac{d^2\lambda_p}{dx^2}}{(a + 5) \left(\frac{d\lambda_p}{dx} \right)^2} .$$

$\Delta\lambda$ a le signe de la deuxième dérivée, qui est positive, puisque la dispersion diminue quand la longueur d'onde augmente.

La longueur d'onde effective apparente λ_p est donc plus grande que la longueur d'onde effective λ_a . Il est d'ailleurs évident que le tassement du spectre dans le rouge déplace le maximum apparent d'énergie apparente vers les grandes longueurs d'onde.

La formule en $\Delta\lambda$ suppose connue l'inconnue principale λ_p . On peut opérer par approximations successives, puisque λ_p est peu différent de λ_a . On introduit λ_a dans la formule à la place de λ_p . On obtient ainsi une valeur approximative de $\Delta\lambda$

d'où une valeur approchée de λ_p , au moyen de laquelle on peut recommencer le calcul, s'il y a lieu. Nous allons voir que la première approximation suffira souvent, car la longueur d'onde effective λ_a et la longueur d'onde effective apparente λ_p diffèrent d'une quantité pratiquement constante. Pour démontrer cette propriété et pousser plus loin la discussion, il faut faire une hypothèse sur la fonction $\lambda(x)$ qui lie l'abscisse x lue sur le spectre à la longueur d'onde λ . Supposons pour cela une formule de Hartmann-Cornu, fonction qui sera certainement suffisante, vu le petit domaine de variation de λ considéré ici. Soit donc

$$\lambda = \lambda_0 + H(x - x_0)^{-1}.$$

On pourrait introduire cette expression dans l'équation fondamentale. On serait conduit ainsi à une équation du second degré dont la discussion est alourdie par la forme compliquée des coefficients. On a avantage à utiliser la méthode de fausse position exposée ci-dessus. Calculons les dérivées et déterminons $\Delta\lambda$. Il vient

$$\frac{d\lambda}{dx} = -H(x - x_0)^{-2}, \quad \frac{d^2\lambda}{dx^2} = +2H(x - x_0)^{-3},$$

$$\Delta\lambda = \frac{2\lambda_p^2}{(a + 5)(\lambda_p - \lambda_0)}.$$

Examinons encore comment varie $\Delta\lambda$ en fonction de λ_p et calculons la dérivée

$$\frac{d(\Delta\lambda)}{d\lambda_p} = \frac{2\lambda_p(\lambda_p - 2\lambda_0)}{(a + 5)(\lambda_p - \lambda_0)^2}.$$

Or la constante expérimentale λ_0 (sans signification physique), mais qui dépend de la matière du prisme et de la région spectrale étudiée, est une quantité de l'ordre de 2000 ou 3000 Angströms¹. Les longueurs d'onde effectives sont de l'ordre de 4500 Angströms pour le domaine photographique et de 5500 Angströms dans le cas de l'œil. On a donc sensiblement $\lambda_p = 2\lambda_0$, et la

¹ Exemple cité par STRATTON, *Astronomical Physics* $\lambda_0 = 3036$ Angströms; prisme objectif Schaer-Boulenger de l'Observatoire de Genève $\lambda_0 = 2018$ Angströms.

parenthèse du numérateur est petite. $\Delta\lambda$ est pratiquement indépendant de λ_p . Ce résultat est évidemment indépendant de la forme analytique de la fonction de dispersion $\lambda(x)$.

A notre connaissance, cette constance de $\lambda_p - \lambda_a$ n'a jamais été vérifiée expérimentalement par des déterminations de longueurs d'onde effectives réalisées au moyen d'un réseau et d'un prisme montés sur un même équatorial.

35. — Réfraction atmosphérique.

Une application importante de la théorie de la longueur d'onde effective apparente est celle que l'on peut faire au calcul de la réfraction atmosphérique et à sa variation en fonction de la température de l'étoile observée.

En pointant l'image d'une étoile, visuellement ou photographiquement, on opère sur un petit spectre donné par l'atmosphère. Pour des distances zénithales z pas trop considérables, la réfraction atmosphérique est

$$\mu \operatorname{tg} z,$$

où μ , dit constante de la réfraction, est égal à la quantité dont l'indice de réfraction de l'air dépasse 1. On suppose la réfraction exprimée en radians. Les mesures de l'indice de réfraction donnent

$$\mu = \alpha + \beta\lambda^{-2}$$

où

$$\begin{aligned}\alpha &= 287,87 \times 10^{-6} \\ \beta &= 1,316 \times 10^{-14} \text{ cm}^2,\end{aligned}$$

dans des conditions normales de pression et de température. La « constante » μ est donc fonction de la longueur d'onde.

La réfraction est proportionnelle à μ , qui, lui, est proportionnel aux abscisses du spectre atmosphérique. Choisissons μ comme variable indépendante.

Il s'agit maintenant de déterminer la valeur de μ qui correspond au maximum apparent d'énergie apparente dans le spectre atmosphérique. Nous admettrons qu'on pointe ce maximum.

L'équation fondamentale qui détermine la longueur d'onde λ_p de ce maximum est

$$\frac{d^2\lambda_p}{dx^2} + \left(\frac{d\lambda_p}{dx}\right)^2 \lambda_p^{-2} \left(\frac{b}{T_e} - [a + 5]\lambda_p + a\lambda_s\right) = 0.$$

L'équation $\mu = \alpha + \beta\lambda^{-2}$ donne

$$\lambda = \sqrt{\frac{\beta}{\mu - \alpha}}; \quad \frac{d\lambda}{d\mu} = -\frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{2(\mu - \alpha)^{\frac{3}{2}}}; \quad \frac{d^2\lambda}{d\mu^2} = \frac{3\beta^{\frac{1}{2}}}{4(\mu - \alpha)^{\frac{5}{2}}}$$

Remplaçons dans l'équation fondamentale. Il vient

$$3\beta^{\frac{1}{2}} + (\mu - \alpha)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{b}{T_e} - [a + 5]\beta^{\frac{1}{2}}[\mu - \alpha]^{-\frac{1}{2}} + a\lambda_s\right) = 0$$

et

$$\mu = \alpha + \left(\frac{a + 2}{a\lambda_s + \frac{b}{T_e}}\right)^2 \beta.$$

La variation de réfraction avec la température augmente lorsque l'acuité du maximum de sensibilité et sa longueur d'onde diminuent, car alors, le terme en $\frac{b}{T_e}$ augmente d'importance.

Si a est infini, μ est indépendant de la température et devient

$$\mu = \alpha + \beta\lambda_s^{-2},$$

ce qui est évident *a priori*.

Même pour l'étude qualitative de la variation de réfraction atmosphérique avec la température de l'étoile, l'hypothèse de la sensibilité concentrée est insuffisante, car l'existence du phénomène a été constatée expérimentalement.

VI. — VALEURS NUMÉRIQUES DES CONSTANTES
DE SENSIBILITÉ.

36. — Détermination directe.

Elle consiste à tracer la courbe expérimentale de sensibilité du récepteur considéré et à lui comparer la fonction

$$\sigma(\lambda) = \left(\frac{\lambda_s}{\lambda} e^{1 - \frac{\lambda_s}{\lambda}} \right)^a.$$

Donnons un exemple. Les plaques Cappelli-blu ont fait l'objet d'une étude de sensibilité spectrale par M. Abetti¹.

La courbe obtenue comporte un maximum unique pour $\lambda_s = 4,6 \times 10^{-5}$ cm. Admettons cette valeur de λ_s , prenons les logarithmes: chaque point de la courbe fournit une équation linéaire en a . On résout le système ainsi obtenu par une méthode appropriée. Numériquement, il vient

$$\lambda_s = 4,6 \times 10^{-5} \text{ cm}; \quad a = 208.$$

La comparaison de la courbe expérimentale avec celle donnée par l'équation figure dans le tableau ci-dessous².

$\lambda \cdot 10^5$	σ obs.	σ calc.	Résidus Obs.-calc.
cm.			
4,0	0,18	0,12	+ 0,06
4,2	0,36	0,41	— 0,05
4,4	0,85	0,81	+ 0,04
4,6	1,00	1,00	0,00
4,8	0,91	0,83	+ 0,08
5,0	0,52	0,50	+ 0,02
5,2	0,14	0,22	— 0,08
5,4	0,02	0,08	— 0,06

¹ G. ABETTI, Determinazioni degli indici di colore di stelle doppie. *Osservazioni e memorie del R. Osservatorio Astrofisico di Arcetri-Firenze*, fasc. 40, p. 12.

² P. ROSSIER, Sur la sensibilité spectrale des plaques photographiques, *Compte rendu de la Soc. de Physique de Genève*, 48, III; *Publ. Obs. Genève*, fasc. 17 (1934).

Sans être très remarquable, le résultat est nettement supérieur à celui correspondant à l'hypothèse de la sensibilité concentrée, qui consisterait à poser $\sigma(\lambda) = 0$ et $\sigma(4,6 \times 10^{-5} \text{ cm}) = 1$.

Il serait fastidieux de multiplier ces exemples, d'autant plus que les valeurs trouvées par les divers expérimentateurs sont peu concordantes. Citons quelques chiffres relatifs à l'œil.

M. Nutting¹, par exemple, indiquait, lors de ses premières recherches, $\lambda_v = 5,1 \times 10^{-5} \text{ cm}$, alors que König, à la fin du siècle passé, donnait $\lambda_v = 5,6 \times 10^{-5} \text{ cm}$.

Venons-en à des valeurs plus modernes. M. Nutting², dans son grand mémoire sur la question, pose $\lambda_v = 5,5 \times 10^{-5} \text{ cm}$ et $a = 181$.

M. Bernewitz³ utilise la courbe de sensibilité déterminée par M. Henning⁴; il pose $\lambda_v = 5,52 \times 10^{-5} \text{ cm}$ et $a = 140$, et ajoute à la formule deux termes correctifs de peu d'importance.

Dans ses recherches, M. Brill⁵ admet les deux valeurs $\lambda_v = 5,29 \times 10^{-5} \text{ cm}$ et $\lambda_p = 4,25 \times 10^{-5} \text{ cm}$ pour l'œil et la plaque photographique.

M. Bender⁶ compare la courbe de sensibilité de l'œil pour la *fovea centralis* à celle relative aux régions périphériques de la rétine. Sur la *fovea*, il trouve que le maximum de sensibilité se produit pour la longueur d'onde $5,5 \times 10^{-5} \text{ cm}$. Au bord de la rétine, ce maximum a lieu pour la longueur d'onde $5,2 \times 10^{-5} \text{ cm}$. Ce phénomène, déjà reconnu par Macé de Lépinay et Nicati⁷,

¹ *Physical Review*, XXIV, p. 205.

² *Philosophical Magazine*, 29, 1915, p. 305.

³ Ueber die Dichte der Doppelsterne. *Astr. Nach.*, 213, 1.

⁴ *Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik*, 1919, 1.

⁵ *Astr. Nach.*, 219, 5254, 1923.

⁶ H. BENDER, Untersuchungen am Lummer-Pringsheimschen Spektralflickerphotometer, cité par J. Wilsing, Messungen der Farben, der Helligkeiten und der Durchmesser der Sterne mit Anwendung der Planckschen Gleichung. *Publikationen des Astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam*, 76, vol. 24, 3 (1920), p. 16.

⁷ J. MACÉ DE LÉPINAY et NICATI, Recherches sur la comparaison photométrique des diverses parties d'un même spectre. *Annales de chimie et de physique*, 5^{me} série, tome XXX, 1893, p. 153.

A. BLANC, *Rayonnement, Eclairage*, Colin, Paris, p. 140.

provient probablement de la structure irrégulière de la rétine et du rôle différent que jouent les bâtonnets, très sensibles à la lumière, mais incapables de donner la sensation de couleur, et les cônes, seuls présents dans la *fovea*, auxquels sont dus la différenciation des couleurs.

On recommande parfois la vision oblique pour certaines observations astronomiques relatives à des astres de faible éclat. Les propriétés que nous venons de rappeler montrent le peu de sécurité de mesures obtenues par cet artifice.

Tout ce qui précède montre bien l'incertitude qui règne en ces matières. Les méthodes de laboratoire donnent des résultats qui dépendent beaucoup des conditions des expériences. En 1907, déjà, M. Nutting¹ signalait la nécessité d'étudier la courbe de sensibilité de l'œil de chaque observateur, et cela à l'époque des observations.

Dans l'ignorance des difficultés du problème photométrique appliqué à l'astronomie, les précautions indispensables n'ont pas été prises dans les travaux cités ci-dessus. Il semble donc bien audacieux de vouloir appliquer à l'astrophysique les résultats numériques des expériences de laboratoire. D'ailleurs, celles-ci sont généralement exécutées sur des surfaces matérielles étendues et non sur des points stellaires. Les intensités d'éclairage sont beaucoup plus considérables que lors des observations astronomiques. Dans ces conditions, le phénomène de Purkinje rend illusoire tout résultat quantitatif.

Signalons, à titre d'exemple, la table d'index absolu et de longueurs d'ondes effectives visuelles établie par M. Bernewitz². Les résultats obtenus pour l'index sont extrêmement faibles: ils ne dépassent pas 0,1 magnitude. Les longueurs d'ondes effectives visuelles ne varieraient que de 5,42 à $5,68 \times 10^{-5}$ cm, pour des étoiles de type spectral passant de A_0 à M_c , ce qui paraît être peu. Ces valeurs semblent indiquer qu'un exposant d'acuité de l'ordre de 140 est trop élevé pour les conditions d'observation astronomique. C'est ce qui se confirmera par la suite.

¹ *Physical Review*, XXIV, p. 204.

² *Loc. cit.*

Dans l'incertitude où nous sommes des valeurs des constantes de sensibilité à appliquer au cas de l'observation astronomique, nous renverserons le problème. Nous admettrons la forme analytique des diverses fonctions concernant les indices de couleur ou la longueur d'onde effective. Partant de valeurs expérimentales pour ces grandeurs, nous en déduirons les constantes de sensibilité, dont la connaissance nous permettra de perfectionner quelque peu les tables existantes d'index absolu et de préciser les conditions de leur emploi.

Nous examinerons ainsi trois échelles de longueurs d'onde effectives, deux photographiques et une visuelle; nous comparerons à la théorie deux échelles d'index de couleur photo-visuel et enfin, nous étudierons deux échelles d'index absolu.

Nous obtiendrons en général des exposants d'acuité notablement inférieurs à ceux que nous avons cités ci-dessus, pour l'œil comme pour la plaque photographique.

Des vérifications seront enfin obtenues par l'étude de la magnitude absolue, celle du diamètre apparent de quelques étoiles, de la colorimétrie, de la longueur d'onde effective du Soleil ou de la réfraction atmosphérique. L'ensemble ainsi obtenu, sans être encore parfaitement cohérent, montre bien la nécessité, pour augmenter la valeur des résultats d'observation, d'étudier les courbes de sensibilité des divers récepteurs utilisés. Cette étude est délicate. Elle s'avère de plus en plus indispensable pour faire disparaître les divergences systématiques de diverses séries d'observations.

37. — *Détermination des constantes de sensibilité par l'étude de l'index de couleur photo-visuel.*

La notion d'index de couleur a été introduite à propos de la comparaison des magnitudes visuelles et photographiques, en posant

$$I_{pv} = m_{\text{app}, p} - m_{\text{app}, v} .$$

L'index de couleur est ainsi un résultat de mesures indépendant de toute hypothèse sur les astres observés ou les récepteurs.

Il a été fait de nombreuses séries de mesures de cette grandeur; leur variété provient des différences des divers récepteurs utilisés. Dans la plupart des travaux publiés, la variable indépendante choisie est le type spectral, autre donnée immédiate de l'observation.

Si l'expérience donne l'index de couleur en fonction du type spectral, la théorie l'exprime en fonction de la température effective. Un changement de variable s'impose donc.

Mais les échelles de température ne sont pas toutes cohérentes. Dans un problème tel que celui qui nous occupe ici, seules peuvent être choisies des échelles de températures effectives déterminées dans l'hypothèse que les étoiles rayonnent comme des radiateurs intégraux. Les échelles de température réelle de la photosphère basées sur la théorie de l'ionisation doivent être exclues. Toute échelle basée sur une théorie de l'index de couleur doit aussi être éliminée, puisque c'est précisément une telle théorie qu'il s'agit d'éprouver.

En premier lieu, nous fixerons notre choix sur les valeurs d'indices et de températures indiquées par M. Graff; l'échelle d'indices est une moyenne ajustée de diverses valeurs expérimentales. Elle est une fonction linéaire de l'intervalle spectral. Quant à son échelle de températures, elle est basée sur une réduction des mesures très soignées de Scheiner et Wilsing; elle s'écarte peu de la moyenne des valeurs trouvées par divers observateurs qui se basent sur l'identité du rayonnement du corps noir et de celui des étoiles. En choisissant des valeurs dues à un seul astronome, on peut espérer une homogénéité qu'on ne saurait attendre de travaux plus disparates.

Le tableau suivant indique:

- I. Le type spectral;
- II. La température effective T_e , selon M. Graff¹;
- III. L'index de couleur I , d'après le même observateur²;
- IV. La dérivée $\frac{dI}{dT_e}$, relative à un intervalle de température de 100° ;

¹ SCHEINER und GRAFF, *Astrophysik*, 1922, p. 327.

² *Idem*, p. 362.

- V. L'erreur ΔI sur l'index provenant d'une erreur de température de 10%;
- VI. L'index calculé en première approximation;
- VII. Les résidus correspondants, dans le sens observation-calcul;
- VIII. L'index calculé en deuxième approximation;
- IX. Les résidus correspondants;
- X. Une limite supérieure des erreurs de température correspondant aux résidus précédents.

Le rapprochement des valeurs de l'index et de la température obtenu par le calcul de la dérivée $\frac{dI}{dT_e}$ montre immédiatement une incohérence partielle des deux ensembles et cela dans le domaine spectral G_5 à K_5 , où la dérivée, après avoir crû régulièrement en valeur absolue, décroît, pour croître à nouveau très rapidement. Si l'on admet l'échelle d'indices et son caractère linéaire, il y a lieu de soupçonner l'échelle des températures. Nous admettrons cependant ces valeurs sans y rien changer.

D'accord avec M. Graff, M. Bosler estime à 10% les erreurs possibles sur la température¹. Calculons donc les erreurs ΔI que peut comporter d'après cela une table d'indices calculés à partir des températures. La colonne V du tableau les indique. Tant que les températures ne seront pas mieux connues, une théorie qui reproduit à 0,1 magnitude près les valeurs observées de l'index doit être tenue pour satisfaisante.

Ce qui précède montre qu'au fond, il faudrait déterminer les températures à partir des valeurs observées de l'index et pas l'inverse, car si $\frac{dI}{dT_e}$ est grand, $\frac{dT_e}{dI}$ est petit. C'est une propriété assez générale du rayonnement que de permettre des déterminations de température d'une précision qui généralement dépasse celle des données de l'expérience, à cause des extractions de racines auxquelles conduit cette méthode.

Nous allons déterminer les constantes de sensibilité qui correspondent à la table ci-jointe. Nous admettrons la validité d'une formule à simple exposant. La marche des opérations

¹ J. BOSLER, *L'évolution des étoiles*, 1923, p. 29.

est la suivante: choisir des valeurs admissibles de λ_v et λ_p , longueurs d'onde des maxima de sensibilité de l'œil et de la plaque, établir l'équation transcendante qui détermine l'exposant d'acuité, calculer celui-ci, calculer la table correspondant aux valeurs obtenues, comparer ces résultats avec les données et améliorer les constantes de sensibilité d'après ces résidus.

Pour fixer les idées adoptons les valeurs de M. Brill des longueurs d'onde des maxima de sensibilité $\lambda_v = 5,29 \times 10^{-5}$ cm et $\lambda_p = 4,25 \times 10^{-5}$ cm.

Etablissons l'équation en a , en partant des deux lignes du tableau relatives aux types A_0 et K_0 , soit aux températures de 11000° et 4600° , avec les valeurs 0 et 1,26 pour l'index. Les formules générales (§ 25) donnent

$$\alpha = 1,432 \cdot 10^5 \left(\frac{1}{5,29 \cdot 11000} + \frac{1}{4,25 \cdot 4600} \right) = 9,785 ,$$

$$\beta = 1,432 \cdot 10^5 \left(\frac{1}{4,25 \cdot 11000} + \frac{1}{5,29 \cdot 4600} \right) = 8,948 ,$$

$$\gamma = 0,837 .$$

On a bien $\alpha + \beta > 8$, la fonction $z(a)$ croît avec a pour de grandes valeurs de a . L'équation en a est

$$10^{\frac{1,26}{2,5}} = 3,19 = z(a) .$$

Mais pour a infini on a $z(a) = e^\gamma < e < 3,19$.

Les valeurs de longueurs d'onde de M. Brill ne conviennent pas. Les nouvelles valeurs à choisir doivent donner un γ plus grand que celui ci-dessus. Or α et β diffèrent d'autant plus que λ_v et λ_p sont eux-mêmes plus différents.

Choisissons donc des valeurs extrêmes et admettons pour λ_v la plus grande valeur donnée par les travaux modernes de laboratoire $\lambda_v = 5,6 \times 10^{-5}$ cm et posons, pour fixer les idées, $\lambda_p = 4,0 \times 10^{-5}$ cm.

Il vient alors

$$\alpha = 10,108 , \quad \beta = 8,814 , \quad \gamma = 1,294 , \quad p = 18,095 .$$

La condition pour a infini devient

$$e^{1,294} = 3,65 > 3,19 .$$

Ces valeurs peuvent convenir.

L'équation transcendante en a est

$$3,19 = \left(1 + \frac{1,294}{a + 8,814 + \frac{18,095}{a}} \right)^{a+4} = y(a)^{a+4}.$$

La valeur $a = 50$ donne

$$y(50) = 1,02187 \quad \text{et} \quad z(50) = 3,21.$$

Choisissons donc la valeur $a = 50$ comme première approximation. Il vient alors pour l'index

$$\begin{aligned} I &= 135 \log \left(\frac{50 \cdot 4,0 \cdot T_e + 143\,200}{50 \cdot 5,6 \cdot T_e + 143\,200} \right) - A \\ &= 135 \log \left(1 - \frac{80}{280 + \frac{143\,200}{T_e}} \right) - A, \end{aligned}$$

où A est une constante déterminée par la condition que l'index est nul pour la température de 11000° .

Les valeurs correspondantes de l'index figurent sur le tableau ainsi que leurs résidus, colonnes VI et VII. Ces résidus sont largement compris dans les limites d'erreurs de la colonne V. Cependant, ils présentent un caractère systématique qu'on peut essayer d'éliminer en augmentant quelque peu le coefficient du logarithme. La détermination de cette amélioration dB peut être faite en posant

$$dI = dB \log \left(1 - \frac{80}{280 + \frac{143\,200}{T_e}} \right) - dA.$$

On élimine dA en considérant l'équation relative au type A_0 , pour lequel $I = 0$.

Il semble nuisible d'appliquer aux équations résiduelles ainsi obtenues la méthode des moindres carrés qui exagère parfois le poids des cas extrêmes. Or nous savons précisément que les dernières valeurs du tableau (qui correspondent aux basses températures) sont les moins sûres. La diminution du résidu pour les trois dernières lignes justifie ce doute. Aussi contentons-

nous d'additionner les équations résiduelles en amenant tous les coefficients de l'inconnue à être positifs. Il vient finalement $dB = + 2,4$, d'où la formule

$$I = 137,4 \log \left(1 - \frac{80}{280 + \frac{143\,200}{T_e}} \right) - A'.$$

Les valeurs correspondantes et leurs résidus sont donnés dans les colonnes VIII et IX du tableau, tandis que la dernière colonne donne, sans tenir compte du signe, une limite supérieure de la quantité dont il faudrait modifier la température pour que la formule ci-dessus donne rigoureusement les chiffres observés. On les obtient par division des nombres de la colonne IX par ceux de la colonne IV. Ces corrections sont si petites qu'on ne peut évidemment demander plus de précision à la théorie.

INDEX PHOTO-VISUEL, TYPE SPECTRAL ET TEMPÉRATURE.
Echelle de M. Graff.

I Type spectral	II T_e	III I obs.	IV $\frac{dI}{dT_e}$ pour 100°	V ΔI	VI I calc. 1 ^{re} app.	VII Résidus Obs.-calc.	VIII I calc. 2 ^{me} app.	IX Résidus Obs.-calc.	X ΔT
B ₀	18300	— 0,42			— 0,398	— 0,022	— 0,405	— 0,015	—
B ₅	13700	— 0,21	— 0,0046	± 0,07	— 0,195	— 0,015	— 0,198	— 0,012	300°
A ₀	11000	0,00	— 0,0078	0,11	0,000	0,000	0,000	0,000	—
A ₅	9100	+ 0,21	— 0,011	0,11	+ 0,202	+ 0,008	+ 0,206	+ 0,004	40
F ₀	7700	+ 0,42	— 0,015	0,12	+ 0,410	+ 0,010	+ 0,416	+ 0,004	30
F ₅	6700	+ 0,63	— 0,021	0,15	+ 0,607	+ 0,023	+ 0,618	+ 0,012	60
G ₀	5900	+ 0,84	— 0,026	0,16	+ 0,809	+ 0,031	+ 0,824	+ 0,016	70
G ₅	5300	+ 1,05	— 0,035	0,20	+ 0,996	+ 0,054	+ 1,013	+ 0,037	110
K ₀	4600	+ 1,26	— 0,030	0,15	+ 1,268	— 0,008	+ 1,290	— 0,030	100
K ₅	4200	+ 1,47	— 0,052	0,23	+ 1,459	+ 0,011	+ 1,485	— 0,015	30
M	3800	+ 1,68	— 0,053	0,21	+ 1,685	— 0,005	+ 1,715	— 0,035	70

Revenons maintenant aux constantes de sensibilité en posant

$$137,4 = 2,5 (a + 4) ,$$

$$280 = a \lambda_v ,$$

$$80 = a (\lambda_v - \lambda_p) .$$

Il vient

$$a = 51 , \quad \lambda_v = 5,50 \times 10^{-5} \text{ cm} , \quad \lambda_p = 3,93 \times 10^{-5} \text{ cm} .$$

La valeur de λ_v est absolument normale. Celle de λ_p peut paraître un peu faible. Quant à la valeur de l'exposant d'acuité, elle est de beaucoup inférieure à celles qui ont été obtenues au laboratoire. Ce dernier résultat se confirmera par la suite.

Donnons un deuxième exemple dont les données sont choisies de façon entièrement différente. M. Wilsing compare l'échelle d'indices de couleur de M. King à ses propres déterminations de températures ¹.

Le tableau ci-dessous donne les valeurs suivantes calculées, comme le fait M. Wilsing, au millième de magnitude et arrondies au centième de magnitude:

- I. La variable de M. Wilsing, $\frac{b}{T_e}$;
- II. La température effective T_e ;
- III. L'index admis par M. Wilsing ;
- IV. L'index calculé en première approximation ;
- V. Les résidus, observation-calcul ;
- VI. L'index calculé en deuxième approximation ;
- VII. Les résidus.

M. Wilsing représente ces valeurs au moyen d'une formule de Russel, linéaire en b/T_e . Les valeurs observées se répartissent autour de cette droite, sauf aux extrémités. M. Wilsing attribue ces anomalies à l'insécurité de certaines corrections de magnitude, pour ces valeurs extrêmes.

¹ J. WILSING, Effektive Temperaturen von 199 helleren Sterne nach spektralphotometrische Methoden. *Publikationen des Astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam*, Vol. 24, Nr. 74 (1919).

E. S. KING, Photographic magnitudes of 153 stars. *Annals of the Harvard College Observatory*, vol. 59, n° VI et vol. 76 (1919).

L'application de la formule de M. Russel donne les résultats suivants

$$I = -0,913 + 5630 \times \frac{b}{T_e} .$$

On en déduit

$$\frac{1}{\lambda_v} - \frac{1}{\lambda_p} = \frac{5630}{1,08574} = 5185 .$$

Admettons la valeur $\lambda_v = 5,5 \times 10^{-5}$ cm.

Il vient $\frac{1}{\lambda_v} = 18182$, $\frac{1}{\lambda_p} = 23367$ et $\lambda_p = 4,28 \times 10^{-5}$ cm. Ces valeurs sont tout à fait admissibles, mais dépendent entièrement du choix de la première. Nous savons d'ailleurs que la théorie de Russel est incapable de déterminer séparément les deux valeurs λ_v et λ_p . La formule à simple exposant le permet. Elle donne en outre l'exposant d'acuité commun a .

Nous opérerons, comme dans le cas précédent, par approximations successives. Mettons la formule à simple exposant sous la forme

$$I = M \log \left(1 - \frac{a(\lambda_v - \lambda_p)}{a\lambda_v + \frac{b}{T_e}} \right) - N .$$

Posons en première approximation des valeurs arrondies de celles trouvées dans le cas précédent:

$$\lambda_v = 5,5 \times 10^{-5} \text{ cm} ,$$

$$\lambda_p = 4,0 \times 10^{-5} \text{ cm} ,$$

$$a = 50 ,$$

et calculons la parenthèse. Laissant arbitraire le coefficient M il vient

$$I = M \log \left(1 - \frac{75 \cdot 10^{-5}}{275 \cdot 10^{-5} + \frac{1,432}{T_e}} \right) - N .$$

INDEX DE COULEUR ET TEMPÉRATURE.

Echelles de MM. King et Wilsing.

I	II	III	IV	V	VI	VII
$\frac{b}{T_e}$	T_e	I obs.	I calc. 1 ^{re} app.	Résidus Obs.-calc.	I calc. 2 ^{me} app.	Résidus Obs.-calc.
7,0-10 ⁻⁵ cm	20500°	— 0,26	— 0,78	+ 0,53	— 0,51	+ 0,26
9,0	15900	— 0,29	— 0,62	+ 0,33	— 0,39	+ 0,09
11,8	12100	— 0,04	— 0,41	+ 0,38	— 0,21	+ 0,18
14,3	10000	— 0,13	— 0,22	+ 0,09	— 0,06	— 0,06
16,4	8730	— 0,04	— 0,07	+ 0,03	+ 0,06	— 0,10
18,7	7660	+ 0,07	+ 0,10	— 0,03	+ 0,19	— 0,12
21,1	6790	+ 0,22	+ 0,27	— 0,04	+ 0,33	— 0,11
23,6	6070	+ 0,39	+ 0,45	— 0,05	+ 0,47	— 0,08
25,9	5530	+ 0,46	+ 0,60	— 0,15	+ 0,60	— 0,14
29,2	4900	+ 0,85	+ 0,83	+ 0,03	+ 0,78	+ 0,07
30,9	4630	+ 0,87	+ 0,94	— 0,07	+ 0,87	— 0,01
33,6	4260	+ 1,00	+ 1,11	— 0,11	+ 1,01	— 0,01
36,8	3890	+ 1,18	+ 1,32	— 0,14	+ 1,18	+ 0,01
38,8	3690	+ 1,17	+ 1,44	— 0,27	+ 1,28	— 0,11
41,5	3450	+ 1,47	+ 1,60	— 0,13	+ 1,41	+ 0,07
43,8	3270	+ 1,66	+ 1,74	— 0,08	+ 1,52	+ 0,14
46,3	3090	+ 1,57	+ 1,89	— 0,32	+ 1,64	— 0,07

Pour déterminer M, formons deux équations en choisissant dans le tableau deux valeurs aussi écartées que possible et qui semblent acceptables d'après celles qui les encadrent. Prenons donc les lignes relatives à $\frac{b}{T_e} = 16,4 \times 10^{-5}$ et $41,5 \times 10^{-5}$ cm.

Les indices correspondants sont $-0,037$ et $+1,474$. Éliminant N par soustraction, on trouve $M = 142$, qui correspond à $a = 51,8$, valeur très voisine de celle admise, soit 50.

Pour déterminer N, calculons le premier terme de I, pour chacune des 17 lignes du tableau, formons-en la somme ainsi que celle des valeurs observées de I. On obtient ainsi une équation en N. Soustrayons N, il vient les valeurs calculées en première approximation de I, colonne IV, ainsi que les résidus, colonne V. Ces résidus sont relativement grands et montrent un caractère systématique accusé. Pour les diminuer, nous disposons des deux constantes $a(\lambda_v - \lambda_p)$ et $a\lambda_v$ qui figurent sous le signe log.

L'influence d'une erreur dans les valeurs hypothétiques choisies a beaucoup plus d'importance sur la constante du numérateur que sur le dénominateur. Améliorons donc le numérateur au moyen des résidus. Le signe des résidus montre qu'il faut diminuer ce numérateur. Il y a à cela une raison d'ordre physique: l'échelle d'index photo-visuels de M. King est notablement moins étendue que celle admise par M. Graff, qui nous a servi dans le calcul précédent. Pour des étoiles de type spectral variant de A_0 à K_0 , la première indique un indice variant de 0 à 1 et la deuxième de 0 à 1,26. Cela indique que les valeurs λ_v et λ_p correspondant aux deux maxima de sensibilité des récepteurs de M. King sont plus voisines que celles que nous avons trouvées plus haut. Posons donc

$$I = 142 \log \left(\frac{\alpha}{275 + \frac{143\,200}{T_e}} \right) - N .$$

Il vient

$$dI = - \frac{61,67}{275 - \alpha + \frac{143\,200}{T_e}} d\alpha - dN = - \frac{61,67}{200 + \frac{143\,200}{T_e}} d\alpha - dN .$$

Chaque ligne du tableau donne une équation en $d\alpha$ et dN . Éliminons dN en soustrayant l'équation moyenne, additionnons les équations obtenues après avoir amené à l'identité tous les signes des coefficients de $d\alpha$. Il vient

$$d\alpha = - 11,5 \times 10^{-5} \text{ cm}$$

d'où la formule

$$I = 142 \log \left(1 - \frac{63,5}{275 + \frac{143\,200}{T_e}} \right) - N' .$$

La nouvelle valeur N' est encore déterminée par une moyenne et on trouve finalement les valeurs de I calculé, indiquées dans la colonne VI du tableau. Les résidus n'ont plus guère de caractère systématique, leurs valeurs ne dépassent le dixième de magnitude, indiqué précédemment comme critère de

validité d'une théorie de l'index, que dans des cas d'irrégularité notable des valeurs observées, irrégularités qui se manifesteraient par rapport à toute courbe moyenne passant par l'ensemble des points observés.

Il est donc impossible de demander à la théorie de représenter mieux les observations.

Les constantes de sensibilité sont enfin déterminées comme plus haut et on trouve

$$a = 51,8, \quad \lambda_v = 5,31 \times 10^{-5} \text{ cm} \quad \text{et} \quad \lambda_p = 4,18 \times 10^{-5} \text{ cm}.$$

La coïncidence de la valeur de l'exposant d'acuité avec celle déterminée au moyen de l'échelle d'indices de M. Graff est remarquable. Quant aux valeurs des longueurs d'onde des maxima de sensibilité, elles sont en plein accord avec ce que nous en savons.

On peut reprocher aux considérations précédentes l'étroitesse de l'hypothèse de l'identité des exposants d'acuité relatifs à l'œil et à la plaque photographique. En tout état de cause, l'expérience montre que la différence de ces deux exposants est de l'ordre de grandeur de l'incertitude de la détermination de a . Nous savons d'ailleurs que l'index est peu sensible à une variation de l'exposant d'acuité. Pour tenir compte de la différence des deux exposants et appliquer la formule à double exposant, il faudrait disposer de valeurs de températures beaucoup plus précises que celles actuellement obtenues.

La petitesse relative des valeurs trouvées pour l'exposant d'acuité laisse supposer toutes les difficultés que doit rencontrer la théorie de l'index de couleur basée sur l'hypothèse de la sensibilité concentrée.

38. — *Vérification par la formule de la magnitude absolue.*

Cette magnitude est donnée par la formule (§ 11)

$$m_r = \mathcal{E} - 5 \log r_0 + 2,5(a + 4) \log \left(a \lambda_s + \frac{b}{T_e} \right).$$

Adoptons les constantes de sensibilité données par l'appli-

cation de la formule à simple exposant à l'étude de l'échelle d'index de couleur de M. Graff. Prenons le rayon du Soleil comme unité de longueur pour les rayons stellaires. Admettons les valeurs classiques de 6200° pour la température du Soleil et 4,83 pour sa magnitude visuelle absolue. Avec les constantes $\lambda_v = 5,50 \times 10^{-5}$ cm et $a = 51$, on trouve, après simplification, la formule numérique

$$m_v = 0,11 - 5 \log r_0 + 137,4 \log \left(1 + \frac{511}{T_e} \right),$$

qui est relative aux observations visuelles.

Pour établir la formule correspondante dans le cas de la plaque photographique, admettons avec M. Graff la valeur 0,79 pour l'index de couleur du Soleil¹. Sa magnitude absolue photographique est alors $m_p = 5,62$, et la formule est

$$m_p = -0,89 - 5 \log r_0 + 137,4 \log \left(1 + \frac{714}{T_e} \right).$$

Les constantes choisies ici sont un peu différentes de celles de la table d'index qui est à la base de nos premiers calculs. Essayons, à titre de contrôle, de déterminer au moyen des deux équations ci-dessus, la température d'une étoile d'index nul. Elle est donnée par l'équation

$$m_p - m_v = -1,00 + 137,4 \log \frac{1 + \frac{714}{T_e^*}}{1 + \frac{511}{T_e}} = 0.$$

Il vient $T_e^* = 11500^\circ$, valeur peu différente de celle admise initialement.

Les tables d'index de couleur et de température dont nous avons fait usage pour déterminer les constantes de sensibilité ne font aucune distinction entre les étoiles naines et géantes. Ici, au contraire, nous avons déterminé les constantes d'étalonnage des deux formules de la magnitude absolue au moyen d'une étoile naine, le Soleil. Cette paire de formules, appliquée aux

¹ SCHEINER-GRAFF. *Astrophysik*, 1922, p. 193.

étoiles d'index nul, donc à des astres chauds, fournit un résultat satisfaisant. Les formules numériques ci-dessus sont donc applicables à toute la branche des étoiles naines, au moins pour les classes A, F et G.

39. — Vérification interférométrique.

Rappelons que le demi-diamètre apparent δ d'une étoile est donné par l'expression (§ 27)

$$\log \delta = 0,2 \mathcal{E} - 3,32244 - 0,2 m_{\text{app}} + 0,5 (a + 4) \log \left(1 + \frac{b}{a \lambda_s T_e} \right),$$

où la constante \mathcal{E} est la constante d'étalonnage de la formule concernant la magnitude absolue de même forme que celle-ci en T_e .

Admettons les valeurs du paragraphe précédent pour la magnitude visuelle. Il vient $\mathcal{E} = 0,11$, d'où

$$\log \delta'' = - 3,300 - 0,2 m_v + 27,5 \log \left(1 + \frac{511}{T_e} \right).$$

Comparons les valeurs données par cette formule à celles obtenues pour quelques étoiles par la méthode interférométrique. Il vient

DIAMÈTRE APPARENT DE QUELQUES ÉTOILES.

	δ obs.	$m_{\text{app}, v}$	Type spectral	T_e	δ calculé
α Orion . .	0",0235	0,9	M_a	3000°	0",027
α Bouvier .	012	0,2	K	4000	15
α Scorpion .	020	1,2	M_{ap}	3000	24
α Taureau .	010	1,1	K_5	3500	13
β Pégase . .	0105	2,6	M_a	3000	12
α Herculi .	015	3,5	M_b	2700	12
\circ Baleine .	0",028	2,0	M_b	2700	0",024

La concordance est excellente. Reste évidemment un certain arbitraire sur la température. Il n'en est pas moins remarquable qu'une formule numérique, dont les constantes ont été choisies

en partant de l'hypothèse de la validité d'une formule à simple exposant pour l'index de couleur, dont la constante d'étalonnage a été déterminée au moyen d'une étoile naine, le Soleil, donne, pour les géantes froides considérées ci-dessus, un résultat aussi bon, et cela d'autant plus que c'est précisément pour les étoiles froides que la théorie présente le moins de sécurité.

Cette théorie semble donc applicable à tout l'ensemble des étoiles, sauf peut-être à quelques cas exceptionnels.

40. — *Vérification par la parallaxe de variables à éclipses.*

En admettant la valeur des constantes établies au paragraphe précédent, la formule donnant cette parallaxe est (§ 32)

$$\log \pi = -0,78 + 27,5 \log \left(1 + \frac{511}{T_e} \right) - 0,2 m_{\text{app}} - \log r_0 .$$

Appliquons-la au cas de l'étoile Algol en admettant les données suivantes proposées par M. Lause¹:

Rayon de l'étoile principale: 3,12 rayons solaires;

Température: 13000°;

Magnitude au minimum secondaire: 2,26, que nous admettrons égale à celle de l'étoile principale.

Le calcul donne une parallaxe de 0",055; M. Stebbins l'estime également à 0",07 et M. Lause à 0",02. Ce résultat est donc satisfaisant, sans qu'on puisse lui attribuer une grande importance pour la vérification de la théorie.

L'incertitude des parallaxes est si grande que nous nous contenterons de cet exemple.

41. — *Index absolu visuel du Soleil.*

Admettons la valeur $5,5 \times 10^{-5}$ cm pour la longueur d'onde du maximum de sensibilité de l'œil. La température du corps

¹ F. LAUSE, *Stelle variable ad ecclisse, Coelum IV*, 1934, p. 224.

noir qui a son maximum d'émission pour cette longueur d'onde est

$$T' = \frac{0,2864}{5,5 \times 10^{-5}} = 5200^\circ .$$

La température d'un astre d'index absolu visuel minimum est donc (§ 19)

$$T_m = \frac{5}{4} \times T' = 6500^\circ ,$$

chiffre très voisin de la température effective du Soleil. Notre œil est donc construit de telle sorte que l'index absolu visuel de notre astre central est minimum. Exprimons la chose dans le langage de la photométrie des physiciens et rappelons que l'index absolu est le logarithme de l'inverse du facteur de visibilité. Le facteur de visibilité, ou à un point de vue peu différent, le rendement lumineux du Soleil est maximum.

Cette adaptation de notre œil au milieu n'a rien pour nous étonner, examinée du point de vue biologique. Sans vouloir attribuer à cette remarque une importance disproportionnée, signalons simplement que cette coïncidence laisse supposer que le choix de nos hypothèses est heureux.

42. — *Vérification colorimétrique.*

Nous avons montré (§ 29) que la longueur d'onde colorimétrique est

$$\lambda_c = \frac{a\lambda_s + \frac{b}{T_e}}{a + 3} .$$

Calculons en quelques valeurs relatives à l'œil, avec les constantes déjà trouvées, $a = 51$ et $\lambda_v = 5,5 \times 10^{-5}$ cm.

LONGUEUR D'ONDE COLORIMÉTRIQUE ET TEMPÉRATURE.

T_e	λ_c	Teinte
2500	$6,29 \times 10^{-5}$ cm	rouge
5000	5,74	jaune
10000	5,46	
15000	5,37	

Le résultat est satisfaisant pour les étoiles plus froides que le Soleil, étoiles auxquelles notre œil attribue une teinte caractéristique. Quant aux étoiles chaudes, elles paraissent blanches avec addition plus ou moins considérable de jaune ou de bleu. Notre œil, adapté à l'examen de corps moins chauds que le Soleil, réagit maladroitement lorsqu'il s'agit de qualifier le rayonnement des astres très chauds. C'est probablement là la raison pour laquelle la longueur d'onde colorimétrique des étoiles très chaudes ne semble pas avoir de sens physique bien déterminé.

Les considérations précédentes ne sont pas de nature à permettre une vérification précise de la théorie. Il n'en est pas moins certain qu'ici encore, l'expérience la confirme qualitativement et quantitativement.

Observatoire de Genève.

(A suivre)
