Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 16 (1934)

Artikel: Sur les axiomes d'Archimède et de Cantor
Autor: Hertz, P.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-741531

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

P. Hertz. — *Sur les axiomes d'Archimède et de Cantor.*

J'ai l'honneur de vous faire part de quelques résultats que M. Bernays et moi avons obtenus. Nos recherches portent sur deux célèbres axiomes, dont l'importance pour les fondements de la géométrie est bien connue, et sur leurs relations mutuelles, à savoir l'axiome d'Archimède et l'axiome de Cantor. On s'est accoutumé à énoncer ce dernier de la manière suivante: s'il y a sur une droite un « emboîtement de segments » (nous entendons par là une suite infinie de segments dont chacun, à l'exception du premier, est contenu entièrement[1] dans le précédent) et que leurs longueurs tendent vers zéro, il y a un point et un seul à l'intérieur de tous ces segments.

Mais qu'il n'y ait qu'un seul point n'a pas besoin d'être statué expressément. Cela peut se déduire des autres axiomes. Cependant si nous supprimons cette partie de la thèse, on pourrait, à ce qu'il semble, se passer de la condition de convergence dans l'hypothèse de la proposition, car on pourrait dire que les emboîtements non convergents ont toujours un point dans leur intérieur.

En réalité ceci est valable pour toute géométrie archimédienne; pour une géométrie non-archimédienne, il n'en est pas ainsi. Il y a en effet des emboîtements dans lesquels il est impossible d'intercaler un point. C'est pourquoi il n'est pas permis d'omettre la condition de convergence pour peu qu'on désire ne pas changer la portée de l'axiome. Dans une géométrie non-archimédienne, il faut donc discerner les deux axiomes: l'un contenant dans l'hypothèse la condition de convergence et l'autre ne la contenant pas. Désignons pour abréger — suivant R. Baldus et A. Schmidt[2] — du nom d'axiome cantorien *topologique* la proposition T_1 disant que *tous* les emboîtements contiennent un point à l'intérieur, tandis que la propo-

[1] C'est-à-dire sans que les deux segments aient en commun une extrémité ou deux.

[2] Sitzungsbr. d. Heidelberger Akademie d. Wissenschaften, 1930, Hft. V; 1931, Hft. V.

sition — plus faible — limitant cette propriété aux emboîtements convergents, sera nommée axiome cantorien *métrique*. Demandons-nous maintenant quelles relations existent entre ces deux axiomes et l'axiome d'Archimède.

L'axiome topologique entraîne, comme il va de soi, l'axiome métrique, le second étant plus faible. Mais l'axiome métrique n'entraîne ni l'axiome topologique, ni l'archimédien. Pour reconnaître cela, on se sert d'un exemple qui a été discuté par Hilbert dans ses cours. L'axiome archimédien n'entraîne pas l'axiome métrique (témoin l'ensemble des nombres rationnels) et d'autant moins l'axiome topologique. Enfin, MM. R. Baldus et A. Schmidt [1] ont démontré que de l'axiome métrique et de l'axiome archimédien réunis découle l'axiome topologique. Il reste à examiner si de l'axiome topologique découle l'axiome archimédien. C'était là le sujet de notre recherche. La réponse est négative.

En effet, on peut construire un système d'éléments, qui tout en satisfaisant à l'axiome topologique n'est pas archimédien. Il est impossible d'entrer ici dans les détails de la construction. Quelques remarques suffiront.

Si l'on a réussi à trouver un système non-archimédien, il peut arriver qu'il ne présente pas les propriétés métriques sans lesquelles nous ne nous croyons guère en droit de considérer le système comme une géométrie. Il se peut qu'il y manque l'addition ou au moins la multiplication. Mais par un simple procédé nous pouvons prendre comme point de départ un tel système pour arriver à un autre comportant une addition, procédé que nous voulons illustrer par l'exemple que voici: Soit un ensemble de trois nombres a_1, a_2, a_3. Il serait difficile d'établir dans ce système d'une manière plausible une addition. Mais considérons au contraire le système des fonctions $c_1 t^{a_1} + c_2 t^{a_2} + c_3 t^{a_3}$, t étant une variable et c_1, c_2, c_3 des nombres réels. Ce système est un module. La même méthode nous conduit d'un module sans multiplication à un anneau.

Mais si nous nous servons de ce principe, nous trouvons nécessaire, pour obtenir un système satisfaisant à T_1, que le

[1] *Loc. cit.*

système dont nous partons satisfasse à une condition plus forte T_2. Celle-ci s'énonce de la manière suivante: Etant donné un emboîtement *quelconque* des segments (qui peuvent même avoir des extrémités communes), il doit toujours y avoir un point à l'intérieur de tous ces segments. Contrairement à l'axiome T_1, l'axiome T_2 n'est pas valable pour le continu. Notre problème se réduit donc à construire un système satisfaisant entre autres à cet axiome.

Nous partons d'une droite. Partout où T_2 ne se trouve pas réalisé, nous insérons une autre droite. Soit par exemple x un point quelconque. Nous intercalons *avant* x une nouvelle droite, et nous établissons l'ordre suivant : Viennent d'abord tous les points se trouvant avant x (à sa gauche), suit alors la nouvelle droite, enfin x et les points suivants (les points se trouvant à droite de x). On intercalera de même une droite *après* x et de cette manière chaque point de la droite originaire sera encadré par deux droites. Du reste pour notre but spécial il faut que nous ajoutions une droite qui est considérée comme précédante au système obtenu jusqu'ici. Mais tout cela ne constitue que le premier pas de notre opération. En effet, par ce procédé, on a introduit de nouvelles infractions à T_2 et des infractions à T_1, ce qui nous oblige à appliquer un procédé analogue. Ainsi, à chaque nombre correspond un système d'éléments qui, par une suite de modifications, résulte de la droite originairement donnée. Il faut aller jusqu'aux nombres transfinis et envisager toutes les modifications qui correspondent aux nombres de la deuxième classe. Nous obtiendrons alors un système tel que nous le désirons. Et ce système nous permettra de construire, en appliquant à deux reprises le procédé indiqué au sixième alinéa, un système non-archimédien et satisfaisant à l'axiome cantorien topologique.