

**Zeitschrift:** Archives des sciences physiques et naturelles  
**Band:** 17 (1935)

**Artikel:** Le problème du "décalagé" des phases dans les variations périodiques des céphéides  
**Autor:** Tiercy, Georges  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-741555>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 04.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Le problème du "décalage" des phases dans les variations périodiques des céphéides

PAR

**Georges TIERCY**

## I. — GÉNÉRALITÉS.

1. — Rappelons tout d'abord en quoi consistent ce que nous appelons ici les *décalages des phases*.

On sait que, dans la théorie des pulsations des Céphéides, le rayon de la « sphère pulsante » varie périodiquement, oscillant entre un maximum et un minimum. La courbe représentant cette variation est quelquefois très simple; le plus souvent, elle présente des accidents sous la forme de maxima et minima secondaires ou de points d'inflexion; on l'appelle communément « courbe de pulsation ».

Simultanément, la magnitude de l'étoile varie périodiquement et avec la même période; il en est de même de la pression et de la température de la couche renversante, donc aussi de l'état d'ionisation de cette dernière, et par conséquent du spectre de l'étoile.

Mais il est bien connu que les extrema de la magnitude ne se produisent pas aux moments des extrema de pulsation; l'étude de la courbe des vitesses radiales d'une Céphéide permet de constater un retard des extrema de magnitude sur les dates des extrema du rayon. Il y a donc un *décalage* entre les phases respectives des extrema de pulsation et celles des extrema de lumière. Semblablement, les extrema de la pression dans la



couche renversante ou ceux de la température effective, quoique précédant quelque peu les extrema correspondants de lumière <sup>1</sup>, se produisent avec un *retard* sur les dates des extrema de pulsation.

La théorie est-elle capable de rendre compte de ces décalages ? Telle est la question que je me propose d'examiner dans les pages qui suivent.

La théorie des sphères pulsantes proposée par M. A. S. ED-DINGTON dès 1919 conduit au calcul de l'amplitude de la pulsation pour chaque valeur du rayon, au moyen d'une équation différentielle du second ordre<sup>2</sup>; et l'on peut, par suite, représenter analytiquement la courbe des vitesses radiales. Mais cette théorie, basée sur une loi de pulsation du type adiabatique, ne rend pas compte du *retard* dont il est fait mention ci-avant; elle est par conséquent insuffisante à ce point de vue.

Après avoir vainement essayé de la modifier et de la compléter pour mieux l'ajuster aux faits constatés, je me suis demandé si la théorie des pulsations de type adiabatique ne simplifiait pas par trop le mécanisme de la pulsation dans la partie principale de l'étoile (c'est-à-dire de  $r = 0$  à  $r = r' = \frac{3}{4} r_0$ ) en considérant que, dans ce domaine, tous les rayons augmentaient ou diminuaient simultanément, réalisant leurs extrema respectifs en même temps ? Est-ce bien le cas ? Et n'y a-t-il pas lieu de concevoir une différence de phase entre les variations correspondantes de deux rayons quelconques ? Dans une telle conception, la pulsation se transmettrait de proche en proche, du noyau central à la périphérie.

C'est à ce nouveau point de vue que je me suis placé dans la présente étude. La théorie que je propose ci-après semble permettre de rendre compte du *décalage* caractéristique en question, à la recherche duquel je me suis particulièrement attaché.

Quant à l'amplitude de la pulsation pour chaque rayon  $r$ ,

<sup>1</sup> Voir *Publ. Obs. Genève*, fasc. 20 à 25. Et aussi: G. TIERCY, *L'équilibre radiatif dans les étoiles*. Gauthier-Villars, 1935, chap. XIII et XIV. Voir aussi: *Archives*, 5 (15), 1933.

<sup>2</sup> G. TIERCY, *loc. cit.*, chap. XII.

on peut, semble-t-il, la considérer comme suffisamment bien représentée par le calcul basé sur la loi adiabatique, au moins en première approximation <sup>1</sup>.

Nous examinerons successivement le cas d'une pulsation uniforme (contraction uniforme et dilatation homogène), et celui d'une variation simplement homologue. J'ai adopté pour cette analyse une notation de départ comparable à celle de M. P. RUDZKI <sup>2</sup>.

Nous admettrons qu'il ne se produit pas de courants dans le sens radial ou dans tout autre sens, c'est-à-dire que les seules variations du rayon  $r$  afférent à une particule donnée proviennent du mouvement de pulsation. Dans ces conditions, on n'a à envisager que deux équations sur les quatre de l'hydrodynamique; en appelant  $\omega$  la vitesse dans le sens radial, c'est-à-dire  $\omega = \frac{dr}{dt}$ , on a:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \omega \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial r} = 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \omega \frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho \left( \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{2\omega}{r} \right) = 0, \end{array} \right. \quad (1)$$

où  $P = p + p'$  représente la pression totale, et  $\mathcal{V}$  le potentiel de l'attraction.

La seconde équation (1) n'est pas autre chose que la dérivée, par rapport à  $r$ , de cette autre égalité:

$$\frac{\partial M_r}{\partial t} + \omega \frac{\partial M_r}{\partial r} = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{dM_r}{dt} = 0,$$

dans laquelle on a:

$$M_r = 4\pi \int_0^r \rho r^2 dr.$$

Ainsi la masse  $M_r$  contenue à l'intérieur d'une sphère de rayon  $r$  ne change pas, quelle que soit la contraction ou la

<sup>1</sup> Voir plus loin, aux nos 20 et 21.

<sup>2</sup> *Bulletin astronomique*, 1902. Etude de la contraction uniforme.

dilatation, uniforme ou non; la matière n'est pas échangée entre les différentes couches successives; celles-ci sont plus ou moins serrées, voilà tout.

Si le rapport  $\alpha = \frac{r}{r_0}$  reste constant pour une couche donnée, la contraction ou la dilatation est dite uniforme; si la pulsation est simplement homologue, le rapport  $\alpha$  est fonction du temps  $t$ .

On aperçoit tout de suite que, dans le cas d'une contraction uniforme, les extrema de la pression totale  $P$  coïncideront dans le temps avec ceux du rayon  $r$ ; car le minimum de  $P$  correspondra à la phase du maximum de place disponible, tandis que le maximum de  $P$  se produira lorsque la place sera le plus restreinte; il ne peut donc pas être prévu de *décalage* dans ce cas. Un *décalage* ne peut intervenir que si  $\alpha$  est une fonction du temps, fonction d'ailleurs périodique, et de période égale à celle de la variation de magnitude; dans ces conditions, certaines couches seront comprimées plus que d'autres au même instant, comparativement à ce qui se produit dans une transformation uniforme.

Il ne sera pas dépourvu d'intérêt, cependant, d'analyser de plus près le cas de la pulsation uniforme; nous aurons l'occasion de retrouver la limite de celle-ci.

## II. — PULSATION DITE UNIFORME.

2. — *Formule générale de P.* — La pression totale est donnée, comme on sait, par l'expression suivante, résultant de l'intégration de la première égalité (1):

$$P = \int_r^{r_0} \rho \left[ \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial r} - \frac{d\omega}{dt} \right] dr, \quad (2)$$

où l'on a:

$$\rho = \frac{1}{4\pi r^2} \cdot \frac{\partial M_r}{\partial r};$$

l'indice zéro se rapporte aux valeurs de surface. Nous poserons ici, en reprenant les notations de Rudzki:

$$\tau = \frac{1}{r_0}, \quad z = \frac{r}{r_0}, \quad (3)$$

d'où l'on tire:

$$r = \frac{z}{\tau} \quad \text{et} \quad \frac{dr}{dt} = \omega = -\frac{z}{\tau^2} \cdot \frac{d\tau}{dt}.$$

On trouve:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial r} &= G \frac{M_r}{r^2} = G \frac{M_r}{z^2} \cdot \tau^2; \\ \frac{d\omega}{dt} &= z \left[ \frac{2}{\tau^3} \left( \frac{d\tau}{dt} \right)^2 - \frac{1}{\tau^2} \cdot \frac{d^2\tau}{dt^2} \right]; \end{aligned}$$

et pour la pression:

$$P = \int_z^1 \tau^3 \frac{\partial M_r}{\partial z} \cdot \frac{1}{4\pi z^2} \left\{ \frac{GM_r}{z^2} \cdot \tau^2 - z \left[ \frac{2}{\tau^3} \left( \frac{d\tau}{dt} \right)^2 - \frac{2}{\tau^2} \cdot \frac{d^2\tau}{dt^2} \right] \right\} \frac{dz}{\tau}. \quad (4)$$

Cette expression met en jeu les vitesses  $\frac{d\tau}{dt}$  qui caractérisent la transformation.

Si ces vitesses sont négligeables, c'est-à-dire si la transformation est extrêmement lente, l'expression (4) se réduit à:

$$P = \tau^4 \cdot \varphi(z), \quad (5)$$

et la distribution des pressions  $P$  dans le corps de l'étoile est réglémentée par la fonction  $\varphi(z)$ ; on retrouve là le cas d'application du théorème du viriel, pour lequel il faut considérer une durée extrêmement longue. La pression est alors inversement proportionnelle à la quatrième puissance du rayon, puisque  $\tau = \frac{1}{r_0}$ ; et la valeur que prend  $\tau$  à un instant  $t$  détermine la distribution de  $P$  à cet instant.

Mais si les vitesses de transformation ne sont pas négligeables, il faut garder, dans l'expression (4), les termes en  $\frac{d\tau}{dt}$  et  $\frac{d^2\tau}{dt^2}$ ; c'est ce qui se présente dans le cas des *Céphéides*; et l'on voit qu'alors la pression ne varie plus comme l'inverse de  $r^4$ ; on ne

se trouve plus dans les conditions analytiques qui étaient celles d'une étoile invariable. D'ailleurs le fait que  $P$  n'est plus proportionnelle à  $\rho^{\frac{4}{3}}$  entraîne que la température  $T$  n'est plus proportionnelle à l'inverse du rayon.

3. — *Cas d'une transformation extrêmement lente.* — Entendons-nous bien; la transformation s'effectuant avec une vitesse négligeable, la formule (5) donne la distribution des pressions  $P$  dans toute l'étoile, puisque  $z$  reste constant pour une couche déterminée; si, au bout d'un temps extrêmement grand,  $r_0$  a changé quelque peu de valeur (donc  $\tau$ ), la distribution des pressions est encore donnée par la fonction  $\varphi(z)$ , qui n'a pas varié.

D'autre part, dans de telles conditions de stabilité, c'est-à-dire lorsque les vitesses  $\frac{d\tau}{dt}$  sont négligeables, la distribution de  $P$  à l'intérieur de l'étoile est acquise par la solution de M. Bialobrzski ou par celle de M. Eddington<sup>1</sup>; on part, comme on sait, de l'équation de l'équilibre mécanique:

$$\frac{dP}{dr} = -g\rho ; \quad (6)$$

avec  $p = \frac{R}{\mu}\rho T$  et  $p' = \frac{1}{3}aT^4$ , et en posant:

$$\rho = u^3, \quad u = u_c \psi, \quad r = \frac{\xi}{\omega u_c}, \quad (7)$$

on trouve la distribution<sup>2</sup>:

$$P = C\rho^{\frac{4}{3}} = Cu^4 = Cu_c^4 \psi^4, \quad (8)$$

où  $C$ ,  $u_c$  et  $\omega$  sont des constantes, et où  $\psi$  est donnée par l'équation différentielle d'Emden (classe polytropicque  $n = 3$ ):

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi} \cdot \frac{d\psi}{d\xi} + \psi^3 = 0. \quad (9)$$

<sup>1</sup> G. TIERCY, *L'équilibre radiatif dans les étoiles*. Gauthier-Villars, 1935.

<sup>2</sup> *Loc. cit.*

Si alors on compare les deux expressions de P :

$$\left\{ \begin{array}{l} P = \tau^4 \cdot \varphi(x) = \frac{\varphi(x)}{r_0^4}, \\ P = Cu_c^4 \psi^4 = P_c \psi^4, \end{array} \right.$$

on voit qu'on a, pour la fonction  $\varphi(x)$  :

$$\varphi(x) = r_0^4 P_c \psi^4. \quad (10)$$

Cette relation établit le passage de la solution de M. Rudzki à la solution de M. Bialobrzewski et de M. Eddington. Remarquons qu'au centre de l'étoile, on a :

$$\psi = 1, \quad \varphi_c(x) = r_0^4 P_c.$$

Avec la loi de Mariotte et de Gay-Lussac, on a encore :

$$T = \tau \cdot \varphi_1(x) = \frac{\varphi_1(x)}{r_0}, \quad (11)$$

distribution de la température à un moment donné; la fonction  $\varphi_1(x)$  caractérise cette distribution. Or, avec la solution de Bialobrzewski et d'Eddington, on a :

$$T = u_c \Theta \cdot \psi = T_c \psi, \quad (\Theta = \text{const.}) ; \quad (12)$$

en identifiant (11) et (12), il vient :

$$\varphi_1(x) = r_0 T_c \psi. \quad (13)$$

A ces deux relations donnant respectivement P et T en fonction de  $\tau$ , il faut joindre la suivante :

$$\rho = \tau^3 \cdot f(x), \quad (14)$$

qui est tirée de :

$$M_r = 4\pi \int_0^r \rho r^2 dr \quad \text{ou} \quad \rho = \frac{\tau^3}{4\pi x^2} \cdot \frac{\partial M_r}{\partial x}.$$



L'égalité  $T = \tau \cdot \varphi_1(z)$  constitue ce que l'on a appelé le paradoxe de Lane.

Les expressions

$$P = \tau^4 \cdot \varphi(z) \quad \text{et} \quad T = \tau \cdot \varphi_1(z)$$

ne sont donc valables que si la transformation, est infiniment lente; on se trouve alors en présence des conditions de stabilité d'une étoile invariable. C'est le cas où l'on peut utiliser le fameux théorème du viriel de Clausius.

4. — *Transformations plus rapides.* — Or, dans le cas d'une Céphéide, la variation de  $r_0$  est au contraire rapide; les vitesses  $\frac{d\tau}{dt}$  ne sont plus négligeables; les expressions (5) et (11) ne sont plus valables; seule l'égalité (14) subsiste, puisque  $z$  est indépendant du temps.

La distribution de la pression  $P$  est alors donnée par l'expression (4) complète, que nous reproduisons ci-après:

$$P = \int_z^1 \tau^3 \cdot \frac{\delta M_r}{\delta z} \cdot \frac{1}{4\pi z^2} \left\{ \frac{GM_r}{z^2} \cdot \tau^2 - z \left[ \frac{2}{\tau^3} \left( \frac{d\tau}{dt} \right)^2 - \frac{1}{\tau^2} \cdot \frac{d^2\tau}{dt^2} \right] \right\} \frac{dz}{\tau} .$$

La première partie en est proportionnelle à  $\tau^4$ ; elle correspond à la solution polytropique du cas de stabilité:

$$P = Cu_c^4 \psi^4 = \tau^4 \cdot \varphi(z) ;$$

la seconde partie est proportionnelle à une fonction de  $\tau$ ,  $\frac{d\tau}{dt}$  et  $\frac{d^2\tau}{dt^2}$ . On peut écrire:

$$P = \tau^4 \cdot \varphi(z) - \left[ \frac{2}{\tau} \left( \frac{d\tau}{dt} \right)^2 - \frac{d^2\tau}{dt^2} \right] \cdot \int_z^1 \frac{\delta M_r}{\delta z} \cdot \frac{1}{4\pi z} \cdot dz ;$$

ou bien, en désignant l'intégrale par  $\Phi(z)$ :

$$P = \tau^4 \cdot \varphi(z) + \left[ \frac{d^2\tau}{dt^2} - \frac{2}{\tau} \left( \frac{d\tau}{dt} \right)^2 \right] \cdot \Phi(z) . \quad (15)$$

Les quantités,  $\varphi(z)$  et  $\Phi(z)$  sont des constantes pour une valeur donnée du rayon; et l'on voit que, pour la couche

correspondante, la pression  $P$  dépend, non seulement de  $\tau$  (donc de  $\frac{1}{r_0}$ ), mais encore de  $\frac{d\tau}{dt}$  et  $\frac{d^2\tau}{dt^2}$ .

Si l'on donne à  $r_0$  une valeur moyenne  $r_{0,i}$ , on aura ce qu'on peut appeler les données *statiques*, autour desquelles les variables oscillent durant la pulsation. On écrira:

$$\tau_i = \frac{1}{r_{0,i}} ;$$

et la répartition statique de la pression est la suivante:

$$P_i = \tau_i^4 \cdot \varphi(z) ,$$

où:

$$\varphi(z) = r_{0,i}^4 \cdot P_c \psi^4 ,$$

comme on a vu ci-avant.

Il résulte de ces remarques et de l'expression (15) que la variation  $\delta P$  de la pression est due à deux causes:

1° La variation du rayon dans la forme statique:

$$P = \tau^4 \cdot \varphi(z) = \frac{\varphi(z)}{r_0^4} = P_c \psi^4 ,$$

qui entraîne une variation de  $P_c$  centrale; cette valeur de  $P$  serait suffisante dans le cas d'une modification extrêmement lente du rayon  $r_0$ .

Cette première partie de la variation de  $P$  à partir de l'état statique peut s'écrire:

$$P' - P_i = \tau^4 \varphi(z) - \tau_i^4 \varphi(z) = \varphi(z) \cdot \left[ \frac{1}{r_0^4} - \frac{1}{r_{0,i}^4} \right] .$$

2° La variation due aux termes relatifs à la vitesse  $\frac{d\tau}{dt}$  de transformation; cette variation a pour expression:

$$\left[ \frac{d^2\tau}{dt^2} - \frac{2}{\tau} \left( \frac{d\tau}{dt} \right)^2 \right]_{\tau_i} \cdot \Phi(z) .$$

On a donc au total, à partir de  $P_i$ :

$$\delta P_i = \varphi(x) \cdot [\tau^4 - \tau_i^4] + \left[ \frac{d^2 \tau}{dt^2} - \frac{2}{\tau} \left( \frac{d\tau}{dt} \right)^2 \right]_{\tau_i} \cdot \Phi(x) . \quad (16)$$

Si l'on adopte la notation:

$$\begin{aligned} P &= P_i (1 + P_1) , \\ P - P_i &= P_i P_1 = \delta P_i , \end{aligned} \quad (17)$$

où l'on voit bien que  $P_1$  ne peut pas être supérieure à l'unité en valeur absolue, il vient encore, avec  $P_i = \tau_i^4 \cdot \tau(x)$ :

$$P_1 = \frac{\delta P_i}{P_i} = \frac{\varphi(x) \cdot [\tau^4 - \tau_i^4] + \left[ \frac{d^2 \tau}{dt^2} - \frac{2}{\tau} \left( \frac{d\tau}{dt} \right)^2 \right]_{\tau_i} \cdot \Phi(x)}{\tau_i^4 \cdot \varphi(x)} ;$$

ou bien:

$$\tau_i^4 \cdot P_0 = [\tau^4 - \tau_i^4] + \left[ \frac{d^2 \tau}{dt^2} - \frac{2}{\tau} \left( \frac{d\tau}{dt} \right)^2 \right]_{\tau_i} \cdot \frac{\Phi(x)}{\varphi(x)} . \quad (18)$$

L'étude de cette fonction  $P_1$  doit permettre de découvrir le *décalage* des phases des extrema de  $P$  sur celles des extrema du rayon, si ce décalage existe.

5. — *Les fonctions  $\tau$  et  $\Phi$ .* — Rappelons qu'on a posé:

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi(x) &= \int_x^1 \frac{\delta M_r}{\delta z} \cdot \frac{GM_r}{4\pi z^4} \cdot dz , \\ \Phi(x) &= \int_x^1 \frac{\delta M_r}{\delta z} \cdot \frac{dz}{4\pi z} ; \end{aligned} \right.$$

et la formule (10) a précisé la valeur de  $\varphi(x)$  en fonction de la variable  $\psi$  d'Emden:

$$\varphi(x) = r_0^4 P_c \psi^4 ,$$

la valeur centrale de  $\psi$  étant  $\psi_c = 1$ .

Pour obtenir une expression plus commode de  $\Phi(z)$ , nous retiendrons que:

$$\rho = \frac{\tau^3}{4\pi z^2} \cdot \frac{\partial M_r}{\partial z},$$

comme on l'a vu par (14); de sorte qu'il vient:

$$\frac{\partial M_r}{\partial z} \cdot \frac{1}{4\pi z} = \frac{z \cdot \rho}{\tau^3};$$

et l'on a:

$$\Phi(z) = \int_z^1 \frac{\rho z}{\tau^3} dz = \int_z^1 r_0^3 \rho z \cdot dz = r_0^3 \int_z^1 \rho z \cdot dz.$$

Mais à cause de la définition de  $z$ , on a encore:

$$\Phi(z) = r_0^3 \int_r^{r_0} \rho \frac{r}{r_0} \cdot d\left(\frac{r}{r_0}\right) = r_0 \int_r^{r_0} \rho \cdot r dr;$$

et si, dans cette expression, on remplace  $\rho$  et  $r$  par les variables (7) d'Emden, on trouve:

$$\Phi(z) = \frac{\xi_0}{\omega^3} \cdot \int_{\xi}^{\xi_0} \psi^3 \cdot \xi d\xi; \quad (19)$$

d'ailleurs, la théorie des sphères gazeuses en état d'équilibre polytropique donne<sup>1</sup>:

$$\omega^3 = \frac{4\pi \mathfrak{M}_0}{M},$$

où  $M$  est la masse totale de l'étoile; pour la classe polytropique  $n = 3$ , les tables d'Emden donnent:

$$\xi_0 = 6,90 \quad \text{et} \quad \mathfrak{M}_0 = 2,0182.$$

Par les formules (10) et (19), on peut calculer  $\varphi$  et  $\Phi$  pour chaque valeur du rayon, c'est-à-dire chaque valeur de  $\xi$ ; il suffit d'utiliser les tables d'Emden pour  $n = 3$ .

<sup>1</sup> G. TIERCY, *L'équilibre radiatif dans les étoiles*, loc. cit.

On peut cependant simplifier le calcul de (19) en tenant compte de l'équation (9), qui détermine  $\psi$ :

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi} \cdot \frac{d\psi}{d\xi} + \psi^3 = 0 ;$$

on en tire:

$$\int_{\xi}^{\xi_0} \psi^3 \cdot \xi d\xi = - \int_{\xi}^{\xi_0} \frac{d^2\psi}{d\xi^2} \cdot \xi d\xi - 2 \int_{\xi}^{\xi_0} \frac{d\psi}{d\xi} \cdot d\xi ;$$

$$\int_{\xi}^{\xi_0} \psi^3 \cdot \xi d\xi = - \left[ \xi \cdot \frac{d\psi}{d\xi} \right]_{\xi}^{\xi_0} - [\psi]_{\xi}^{\xi_0} = \xi \frac{d\psi}{d\xi} - \xi_0 \cdot \left( \frac{d\psi}{d\xi} \right)_0 + \psi ,$$

puisque  $\psi_0 = 0$ ; maintenant, la table d'Emden donne:

$$\mathcal{N}_0 = - \left( \xi^2 \frac{d\psi}{d\xi} \right)_0 = 2,0182 ;$$

on trouve ainsi:

$$\int_{\xi}^{\xi_0} \psi^3 \cdot \xi d\xi = \xi \frac{d\psi}{d\xi} + \psi + 0,278 ;$$

et:

$$\Phi(z) = \frac{\xi_0}{\omega^3} \left( \xi \frac{d\psi}{d\xi} + \psi + 0,278 \right) . \quad (20)$$

Cette expression s'annule à la frontière de la sphère polytropicque, de même que la quantité  $\varphi(z)$ .

Ainsi les égalités (10) et (20) permettent un calcul numérique facile de  $\varphi$  et  $\Phi$  pour toute valeur de  $\xi$ .

6. — *Variation de P.* — Partons de l'expression (15), que nous reproduisons ci-après:

$$P = \tau^4 \cdot \varphi(z) + \Phi(z) \cdot \left[ \frac{d^2\tau}{dt^2} - \frac{2}{\tau} \left( \frac{d\tau}{dt} \right)^2 \right] .$$

Désignant toujours par l'indice ( $i$ ) les conditions moyennes ou de stabilité, nous posons ensuite:

$$\left\{ \begin{array}{l} r_0 = r_{0,i} (1 + r_1) , \\ \tau = \tau_i (1 + \tau_1) , \end{array} \right. \quad (21)$$

en rappelant que:

$$\tau = \frac{1}{r_0}, \quad \tau_i = \frac{1}{r_{0,i}}.$$

On obtient:

$$\frac{d\tau}{dt} = \tau_i \frac{d\tau_1}{dt}, \quad \frac{d^2\tau}{dt^2} = \tau_i \frac{d^2\tau_1}{dt^2}; \quad (22)$$

d'où:

$$P = \tau_i^4 \varphi(z) \cdot (1 + \tau_1)^4 + \Phi(z) \cdot \tau_i \left[ \frac{d^2\tau_1}{dt^2} - \frac{2}{1 + \tau_1} \left( \frac{d\tau_1}{dt} \right)^2 \right]; \quad (23)$$

puis:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + \tau_1 = \frac{1}{1 + r_1} = 1 - r_1 + r_1^2 - r_1^3 + \dots; \\ \tau_1 = -r_1 + r_1^2 - r_1^3 + \dots; \\ \frac{1}{1 + \tau_1} = 1 + r_1; \end{array} \right.$$

et les dérivées suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\tau_1}{dt} = \frac{dr_1}{dt} (-1 + 2r_1 - 3r_1^2 + 4r_1^3 - \dots); \\ \frac{d^2\tau_1}{dt^2} = \frac{d^2r_1}{dt^2} (-1 + 2r_1 - 3r_1^2 + \dots) + \left( \frac{dr_1}{dt} \right)^2 \cdot (2 - 6r_1 + 12r_1^2 - 20r_1^3 + \dots); \end{array} \right.$$

de sorte que l'expression (23) devient:

$$\left\{ \begin{array}{l} P = \tau_i^4 \varphi(z) \cdot (1 - 4r_1 + 10r_1^2 - 20r_1^3 + \dots) \\ + \Phi(z) \cdot \tau_i \left[ \frac{d^2r_1}{dt^2} (-1 + 2r_1 - 3r_1^2) + \left( \frac{dr_1}{dt} \right)^2 \cdot (2 - 6r_1 + 12r_1^2 - 20r_1^3) - \right. \\ \left. - 2(1 + r_1) (-1 + 2r_1 - 3r_1^2 + 4r_1^3 \dots)^2 \cdot \left( \frac{dr_1}{dt} \right)^2 \right]; \end{array} \right.$$

nous conserverons les termes de cette quantité jusqu'à l'ordre de  $r_1^3$ ; et nous rappelons que  $\tau_i^4 \varphi(z) = P_i$ .

Admettons maintenant que nous ayons affaire avec le cas le plus simple, celui où la variation de  $r_1$  serait donnée par une fonction trigonométrique élémentaire:

$$r_1 = A \cos Nt,$$

où  $N$  = constante; il est entendu que, le plus souvent, la courbe de pulsation correspond à une fonction moins simple;

mais cela n'a aucune importance ici, puisque le but essentiel de cette analyse est de dépister un décalage éventuel.

On a, dans ces conditions:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dr_1}{dt} = - AN \sin Nt ; \quad \frac{d^2 r_1}{dt^2} = - N^2 r_1 ; \\ \left( \frac{dr_1}{dt} \right)^2 = A^2 N^2 \sin^2 Nt = A^2 N^2 - N^2 r_1^2 ; \end{array} \right.$$

d'où:

$$P = P_i (1 - 4r_1 + 10r_1^2 - 20r_1^3) + \Phi(z) \cdot \tau_i \left[ N^2 (r_1 - 2r_1^2 + 3r_1^3) \right], \quad (24)$$

en abandonnant les puissances de  $r_1$  supérieures à la troisième.

En ordonnant (24) par rapport à  $r_1$ , il vient:

$$P = P_i + r_1 \left[ N^2 \cdot \Phi \cdot \tau_i - 4P_i \right] - r_1^2 \left[ 2N^2 \tau_i \Phi - 10P_i \right] + r_1^3 \left[ 3N^2 \tau_i \Phi - 20P_i \right]. \quad (25)$$

Ainsi, avec cette approximation,  $P$  apparaît comme un polynôme du troisième degré en  $r_1$ , et dont les coefficients dépendent de  $\xi$  par l'intermédiaire des fonctions  $\varphi(z)$  et  $\Phi(z)$ .

Or, avec (10) et (20), on a:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_i = \tau_i^4 \varphi(z) = P_{c,i} \psi^4 \quad (\text{répartition statique}), \\ N^2 \tau_i \Phi = \frac{N^2 \xi_0}{\omega^3 r_{0,i}} \left( \xi \frac{d\psi}{d\xi} + \psi + 0,278 \right); \end{array} \right. \quad (26)$$

et d'ailleurs, d'après la théorie de l'équilibre radiatif stellaire<sup>1</sup>:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_c = \frac{\pi G}{\omega^2} \cdot u_c^4 ; \quad u_c = \frac{\xi_0}{r_0} \cdot \left( \frac{4\pi \mathcal{M}_0}{M} \right)^{-\frac{1}{3}} \\ \omega^3 = \frac{4\pi \mathcal{M}_0}{M} ; \quad \mathcal{M}_0 = 2,0182 ; \quad \xi_0 = 6,90 ; \end{array} \right. \quad (27)$$

ces valeurs correspondent à la classe polytropique  $n = 3$ ; on en tire:

$$P_i = \psi^4 \cdot \pi G \left( \frac{\xi_0}{r_{0,i}} \right)^4 \cdot \left( \frac{M}{4\pi \mathcal{M}_0} \right)^2 = \psi^4 \cdot P_{c,i}. \quad (28)$$

<sup>1</sup> G. TIERCY, *L'équilibre radiatif dans les étoiles*, loc. cit.

Remarquons que, dans la couche renversante (limitée par la valeur  $\xi_0$ ), le produit ( $N^2 \tau_i \Phi$ ) est nul ou presque nul, puisque la fonction  $\left(\xi \frac{d\psi}{d\xi} + \psi + 0,278\right)$  s'annule pour  $\xi_0 = 6,888$ <sup>1</sup>.

On peut donc poser que, pour la couche renversante, c'est-à-dire la couche observée, il ne reste que les termes en  $P_i$  dans l'expression (25):

$$P_e = P_i [1 - 4r_1 + 10r_1^2 - 20r_1^3] . \quad (29)$$

Nous avons écrit  $P_e$  pour désigner la pression dans la couche renversante, comme on écrit souvent  $T_e$  pour indiquer la température effective, qui règne en moyenne dans cette même couche.

Pour les extrema de  $P_e$ , on aurait donc:

$$\frac{dP_e}{dt} = P_i \frac{dr_1}{dt} (-4 + 20r_1 - 60r_1^2) ,$$

valeur qui ne s'annule que si  $\frac{dr_1}{dt} = 0$ . Ainsi les extrema de  $P_e$  se produiraient, dans l'hypothèse de  $r_1$  indépendant du temps, en même temps que ceux de  $r_1$ . Et l'on a rappelé au début que cela ne correspond pas à l'observation.

Mais ici, nous devons avoir un scrupule; l'expression (29) a été obtenue en donnant à  $\xi$  la valeur  $\xi_0$ ; or, les tables d'Emden ne sont directement applicables, pour un modèle d'étoile, que jusqu'à  $\xi = 5$ , et non pas jusqu'à la limite  $\xi_0$ .

On ne pourrait donc utiliser l'expression (25) que jusqu'à la valeur  $\xi = 5$ , qui correspond à un rayon  $r' = \frac{3}{4}r_0$ ; de  $r'$  à  $r_0$ , couche qui ne contient pas même 1% de la masse de l'étoile, on pourrait admettre que la pulsation se transmet sans autre perturbation<sup>2</sup>. Dans ces conditions, il nous faut chercher quelles sont les dates des extrema de  $P$  pour  $\xi = 5$ .

<sup>1</sup> Avec les variables d'Emden, c'est pour  $\xi = 6,888$  que la température  $T$  prend la valeur de surface  $T_0$ ; on peut donc considérer  $\xi_0 = 6,888$  comme donnant la limite effective de la photosphère stellaire, au lieu de la valeur 6,90 d'Emden, pour laquelle  $T$  deviendrait nulle.

<sup>2</sup> Voir à ce sujet: A. S. EDDINGTON, *The Internal Constitution of the Stars*; G. TIERCY, *L'équilibre radiatif dans les étoiles*, loc. cit.



7. — *Extrema de P.* — Reprenons donc l'expression (25), et posons pour abrégé :

$$f = N^2 \cdot \Phi \cdot \tau_i ;$$

$$P = P_i + r_1(f - 4P_i) - r_1^2(2f - 10P_i) + r_1^3(3f - 20P_i) . \quad (30)$$

Il s'agit de voir si l'on peut avoir  $\frac{dP}{dt} = 0$  autrement qu'en annulant  $\frac{dr_1}{dt}$ . Cela conduit à l'équation :

$$3(3f - 20P_i)r_1^2 - 2(2f - 10P_i)r_1 + (f - 4P_i) = 0 ,$$

qui ne peut avoir de racines réelles que si :

$$-5f^2 + 56fP_i - 140P_i^2 \geq 0 ,$$

c'est-à-dire pour :

$$3,767P_i \leq f \leq 7,433P_i .$$

Or, les valeurs positives de  $f$  ne se produisent pas tant que  $\xi \leq \xi_0$ , c'est-à-dire tant qu'on reste à l'intérieur de l'étoile.

Il en résulte que  $\frac{dP}{dt} = 0$  n'arrive que pour  $\frac{dr_1}{dt} = 0$ ; les extrema de  $P$  se produisent en même temps que ceux de pulsation.

Remarquons que, près de la frontière  $\xi_0$ , mais à l'intérieur, la quantité :

$$f = \frac{N^2 \xi_0}{\omega^3 r_{0,i}} \cdot \left( \xi \frac{d\psi}{d\xi} + \psi + 0,278 \right)$$

est négative et très petite en valeur absolue. D'autre part,  $P_i$  est de l'ordre de grandeur de quelques baryes seulement et n'est autre que  $P_e$ .

Prenons par exemple le cas de l'étoile Y Sagittarii; la théorie de l'équilibre radiatif conduit aux résultats suivants<sup>1</sup> :

$$\left\{ \begin{array}{l} r_0 = (1,576) \cdot 10^{12} \text{ cm;} \\ M = 8,6 M_{\odot} = (1,71) \cdot 10^{34} \text{ gr;} \\ \rho_c = 0,05896; \\ T_c = (9,22) \cdot 10^6; \\ P_c = (3,8) \cdot 10^{13}; \\ u_c = 0,3892 = \rho_c^{\frac{1}{3}}; \\ \Theta = \frac{T_c}{u_c} = (2,37) \cdot 10^7. \end{array} \right.$$

<sup>1</sup> G. TIERCY, *L'équilibre radiatif dans les étoiles*, loc. cit. nos 62 et 98.

On trouve, d'autre part, que la pression  $P_e$  de la couche renversante oscille entre 13,3 et 2,8 baryes; on a donc la valeur moyenne:

$$P_e \sim 8 \text{ baryes .}$$

Si l'on rappelle que  $P_i = P_{e,i} \psi^4$ , et qu'on fasse  $P_i = P_e = 8$  dans cette égalité, on trouve:

$$(3,8) \cdot 10^{13} \cdot \psi^4 = 8 ;$$

$$\psi = 0,00068 ,$$

valeur qui correspond bien à l'ordre de grandeur de  $\psi$  tout près de la frontière de l'étoile; on sait que  $\psi = 0$  lorsque  $\xi = 6,9$ .

L'égalité (30) donne encore:

$$P_1 = \frac{P}{P_i} - 1 = r_1 \left( \frac{f}{P_i} - 4 \right) - r_1^2 \left( \frac{2f}{P_i} - 10 \right) + r_1^3 \left( \frac{3f}{P_i} - 20 \right) ;$$

$$P_1 = - r_1 \left( 4 - \frac{f}{P_i} \right) + r_1^2 \left( 10 - \frac{2f}{P_i} \right) - r_1^3 \left( 20 - \frac{3f}{P_i} \right) . \quad (31)$$

Il est intéressant de comparer cette expression à celle que donne la théorie de M. Eddington pour la pellicule frontière:

$$P_1 = - r_1 \left( 4 + \frac{N^2 r_0}{g_0} \right) ,$$

où  $\frac{N^2 r_0}{g_0} = 1,25$  environ, de sorte que  $P_1 = - 5,25 r_1$  environ.

Nous reviendrons sur ce point dans le numéro suivant.

8. — *Limite de la pulsation.* — Pour fixer les idées, prenons encore le cas de l'étoile Y Sagittarii. On a:

$$N = \frac{2\pi}{\theta} , \quad \theta = 498821 \text{ sec. (5}^{\text{jours}}, 77335) ;$$

$$N = (1,25961) \cdot 10^{-5} ; \quad \xi_0 = 6,888 ;$$

$$\frac{N^2 \xi_0}{\omega^3 r_{0,i}} = (4,8386) \cdot 10^{11} ;$$

$$f = (4,8386) \cdot 10^{11} \left[ \xi \frac{d\psi}{d\xi} + \psi + 0,278 \right] .$$

A la frontière  $\xi_0$ , on a  $f = 0$ , car le crochet est alors nul.

Considérons maintenant la valeur  $\xi' = 5$ , où l'on sait qu'on arrête l'application pure et simple de la solution polytropicque du problème; et supposons que la pulsation soit transmise de  $r'$  à  $r_0$  sans autre changement. On a:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \xi' = 5; & \psi = 0,11110; \\ \frac{d\psi}{d\xi} = -0,08003; & \psi^4 = 0,000152; \\ P_i = (5,78) \cdot 10^9; & f = - (10,16) \cdot 10^9; \end{array} \right.$$

les valeurs de  $\psi$  et de sa dérivée proviennent de la table d'Emden pour  $n = 3$ . On a alors:

$$-\frac{f}{P_i} = 1,76 ;$$

$$P_1 = -r_1(4 + 1,76) + r_1^2(10 + 3,52) - r_1^3(20 + 5,28) ;$$

$$P_1 = -5,76 r_1 + 13,52 r_1^2 - 25,28 r_1^3 ,$$

relation qui montre que, en gros:

$$P_1 = -5,6 r_1 .$$

Nous avons rappelé à la fin du numéro 7 que la théorie de M. Eddington conduit à:

$$P_1 = -5,25 r_1 \text{ environ ;}$$

il y a donc bon accord; l'observation montrant que  $P_1$  ne dépasse jamais  $\frac{1}{2}$ , on retrouve la conclusion que  $r_1$  est limité supérieurement à  $\frac{1}{10}$  ou  $\frac{1}{12}$ .

Tout cela est bel et bon, mais ne masque pas le déficit de cet essai, pour lequel nous avons supposé que  $z$  était indépendant du temps; le résultat est que les extrema, tant de  $P_e$  que de  $P_1(\xi' = 5)$ , se produiraient en même temps que ceux de pulsation; on ne trouve pas le décalage observé. Il est donc inutile de pousser plus loin ce problème et de chercher à calculer le facteur  $A$  de  $r_1$ ; nous en connaissons d'ailleurs la valeur en fonction de  $r_i$  par la théorie de M. Eddington.

Nous étudierons maintenant l'hypothèse d'une pulsation simplement homologue; le rapport  $z$  sera donc fonction du temps  $t$ .

(A suivre)