

**Zeitschrift:** Archives des sciences physiques et naturelles  
**Band:** 17 (1935)

**Artikel:** Considérations sur le caractère polytropique de l'équilibre thermodynamique stellaire  
**Autor:** Tiercy, Georges  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-741562>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 04.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

CONSIDÉRATIONS SUR LE CARACTÈRE POLYTROPIQUE  
DE  
L'ÉQUILIBRE THERMODYNAMIQUE STELLAIRE

PAR  
**Georges TIERCY**

---

1. — GÉNÉRALITÉS.

L'histoire des problèmes touchant à l'équilibre des masses stellaires n'est pas très ancienne; elle ne remonte guère qu'à 1870, année qui vit la publication du mémoire célèbre de J. Homer Lane sur la température théorique du Soleil<sup>1</sup>; le premier, Lane cherchait à déterminer la répartition des densités et des températures en fonction des distances au centre du Soleil.

A la fin du XIX<sup>e</sup> siècle et au début du XX<sup>e</sup>, plusieurs auteurs s'occupèrent à leur tour de ce problème théorique essentiel; l'un d'eux, R. Emden, a fourni en 1907, sous la forme d'une équation différentielle du second ordre, une contribution sur laquelle s'appuyent encore les théories les plus récentes. Cependant, tous les travaux d'astrophysique théorique publiés jusqu'en 1913 sur cette question de l'équilibre thermodynamique stellaire faisaient abstraction d'un élément fondamental du problème, la pression de radiation, et de ce fait aboutissaient à des solutions insuffisantes. C'est à M. C. Bialobrzeski<sup>2</sup> que

<sup>1</sup> *Amer. Journal of Sc. and Arts*, 1870.

<sup>2</sup> *Bull. Acad. des Sc. de Cracovie*, A, 1913, p. 264. Sur l'équilibre thermodynamique d'une sphère gazeuse libre.

revient le mérite d'avoir introduit la considération de la pression de radiation dans les équations du problème; et l'on sait bien, aujourd'hui, quel est le rôle essentiel de celle-ci. C'est de la date de la publication de ce mémoire qu'il faut faire partir, nous semble-t-il, la période actuelle de l'histoire des problèmes relatifs à l'équilibre thermodynamique des étoiles.

Il est vrai, comme nous l'avons déjà fait remarquer<sup>1</sup>, que M. Bialobrzski a basé sa théorie sur une hypothèse complémentaire purement algébrique, consistant à admettre que l'équilibre thermodynamique de l'étoile avait un caractère polytropique du type d'Emden, et que l'on pouvait poser notamment, comme dans la théorie d'Emden<sup>2</sup>:

$$\left\{ \begin{array}{l} T = \Theta \cdot \rho^{\mathcal{K}-1} , \\ P = C \cdot \rho^{\mathcal{K}} , \end{array} \right. \quad (1)$$

avec  $C = \text{const.}$  et  $\Theta = \text{const.}$ ; la répartition de la densité  $\rho$ , de la pression totale  $P$  et de la température absolue  $T$  dans la masse stellaire conduisait alors à une équation différentielle du type d'Emden, à condition de choisir encore la valeur  $n = 3$  pour la classe polytropique.

On verra plus loin que l'hypothèse de Bialobrzski  $\Theta = \text{const.}$ , hypothèse essentielle dans la théorie de cet auteur, entraîne nécessairement à faire  $n = 3$ , conclusion qui semble avoir échappé à M. Bialobrzski et que nous avons signalée dans l'une des notes citées plus avant. La chose importe d'ailleurs peu, en ce qui concerne la suite des recherches du professeur polonais, puisqu'il a, par raison d'opportunité, choisi justement la valeur  $n = 3$ .

Dès 1916, M. A.-S. Eddington précisait le caractère physique de l'équilibre radiatif stellaire; il arriva qu'avec la théorie d'Eddington, à base plus physique, on retomba sur les conditions de Bialobrzski. La théorie d'Eddington est plus complète et plus riche en possibilités que celle de son collègue de Varsovie;

<sup>1</sup> G. TIERCY, *C. R. des séances de la Soc. de Phys. de Genève*, 1935, II (*Archives* 1935 supplément); les mêmes remarques dans *Publ. Obs. Genève*, fasc. 30.

<sup>2</sup> R. EMDEN, Gaskugeln, 1907.

mais il n'empêche que plusieurs des conclusions fondamentales de l'astronome anglais résultaient déjà des recherches du professeur polonais. Il en est ainsi, par exemple, de la fameuse équation du quatrième degré qui fournit la valeur du coefficient  $\Theta$  (ou celle du facteur  $\beta$  dont il est question ci-après) en fonction de la masse de l'étoile.

## 2. — CAS COSMOGONIQUE $\beta = \text{CONST.}$

Comme on sait, le coefficient  $\beta$  permet d'exprimer la pression matérielle  $p$  et la pression de radiation  $p'$  en fonction de la pression totale  $P$  par les égalités:

$$\left\{ \begin{array}{l} p = \beta P, \\ p' = (1 - \beta)P; \end{array} \right. \quad (2)$$

pour des raisons physiques, ce facteur  $\beta$  est une constante dans la théorie d'Eddington, ce qui entraîne la valeur  $n = 3$  pour la classe polytropicque. Comme Bialobrzski choisissait la valeur  $n = 3$  pour commencer, son facteur  $\beta$  était aussi une constante. Je voudrais tout d'abord préciser que l'hypothèse  $\Theta = \text{const.}$  de Bialobrzski entraîne nécessairement que la classe polytropicque à considérer est  $n = 3$ . Partons des relations générales bien connues:

$$\left\{ \begin{array}{l} P = \frac{p}{\beta} = \frac{R}{\beta\mu} \cdot \rho T, \\ P = \frac{p'}{1 - \beta} = \frac{aT^4}{3(1 - \beta)}, \end{array} \right.$$

où  $R = (8,26) \cdot 10^7$  et  $a = (7,66) \cdot 10^{-15}$ ; on en tire l'expression suivante, qui donne  $T$  en fonction de  $\rho$  et  $\beta$ , et qui est valable quelle que soit l'hypothèse admise sur  $\beta$ :

$$T = \left[ \frac{3R(1 - \beta)}{a\beta\mu} \right]^{\frac{1}{3}} \cdot \rho^{\frac{1}{3}}; \quad (3)$$

la comparaison de (3) avec  $T = \Theta \cdot \rho^{\mathcal{K}-1}$  conduit à poser:

$$\Theta = \left[ \frac{3R(1-\beta)}{a\beta\mu} \right]^{\frac{1}{3}}; \quad (4)$$

et l'on voit que si l'on suppose  $\Theta = \text{const.}$ , on a du même coup  $\beta = \text{const.}$ , et vice-versa; simultanément, on doit poser:

$$\mathcal{K} - 1 = \frac{1}{3}, \quad \mathcal{K} = \frac{4}{3};$$

et si l'on rappelle que la classe polytropique  $n$  est liée à  $\mathcal{K}$  par la relation:

$$n = \frac{1}{\mathcal{K} - 1},$$

on en déduit la valeur  $n = 3$ .

Il nous reste à nous assurer que c'est bien là la seule solution possible correspondant à  $\Theta = \text{const.}$ ; pour cela, demandons-nous si, dans (3), on ne pourrait pas envisager entre  $\rho$  et  $\beta$  une relation comme celle-ci:

$$\left( \frac{1-\beta}{\beta} \right)^{\frac{1}{3}} = \rho^z, \quad (5)$$

qui représente, en somme, une loi de variation de  $\beta$  en fonction du rayon.

On peut alors écrire comme suit la valeur de  $T$ :

$$T = \left[ \frac{3R}{a\mu} \right]^{\frac{1}{3}} \cdot \rho^{z+\frac{1}{3}} = \Theta_z \cdot \rho^{z+\frac{1}{3}},$$

avec  $\Theta_z = \text{const.}$ ; dans ces conditions, la pression totale  $P$  prend la forme que voici:

$$P = \frac{R}{\mu} \rho T + \frac{a}{3} T^4 = \frac{R}{\mu} \Theta_z \cdot \rho^{z+\frac{4}{3}} + \frac{a}{3} \Theta_z^4 \cdot \rho^{4z+\frac{4}{3}};$$

or, on sait que les cas d'équilibres polytropiques sont caractérisés par l'égalité très simple:

$$P = C \cdot \rho^{\mathcal{K}},$$

où  $C$  est une constante, ainsi que  $\mathcal{K}$ ; il faudrait donc nécessairement avoir:

$$\frac{z + \frac{4}{3}}{\rho} = \frac{4z + \frac{4}{3}}{\rho},$$

quelle que soit la densité  $\rho$ . C'est dire qu'il n'est pas possible de prendre pour  $z$  une autre valeur que  $z = 0$ .

L'importance de cette conclusion saute aux yeux; celle-ci peut en effet se traduire par l'énoncé suivant: si l'on veut conserver à la pression totale  $P$  la forme polytropique  $C\rho^{\mathcal{K}}$ , avec l'hypothèse  $\Theta = \text{const.}$  de Bialobrzski, on doit nécessairement prendre la combinaison représentée par les égalités (3) et (4), c'est-à-dire faire  $\mathcal{K} = \frac{4}{3}$  et  $n = 3$ .

Il s'ensuit que, si l'on admet que  $\Theta$  soit une constante, il n'y a pas lieu d'écrire une équation différentielle générale pour  $n$  quelconque, pour choisir ensuite la valeur  $n = 3$  sous prétexte qu'alors l'équation différentielle se simplifie et se réduit à trois termes de total nul; la classe  $n = 3$  est la seule qui puisse correspondre à l'hypothèse de Bialobrzski  $\Theta = \text{const.}$ , et l'équation différentielle du problème prend en conséquence la forme d'Emden.

On peut aussi raisonner comme il suit, en utilisant la variable  $u$  d'Emden, définie par l'égalité

$$\rho = u^n, \quad \text{avec} \quad n = \frac{1}{\mathcal{K} - 1};$$

on a:

$$P = p + p' = \frac{R}{\mu} \rho T + \frac{a}{3} T^4,$$

$$P = \frac{R}{\mu} \Theta \cdot \rho^{\mathcal{K}} + \frac{a}{3} \Theta^4 \cdot \rho^4 (\mathcal{K}-1),$$

$$P = \frac{R}{\mu} \Theta \cdot u^{n+1} + \frac{a}{3} \Theta^4 \cdot u^4;$$

et l'on voit qu'avec  $\Theta = \text{const.}$ , il faut prendre  $n = 3$  si l'on veut que la pression  $P$  soit de la forme

$$P = C \cdot u^{n+1},$$

c'est-à-dire

$$P = C \cdot \rho^{\mathcal{K}}.$$

L'hypothèse  $\Theta = \text{const.}$  est ainsi inséparable de la classe polytropicque  $n = 3$ .

Cette conclusion essentielle nous amène à revoir le calcul qui conduit à l'équation différentielle du second ordre entre  $\rho$  et le rayon  $r$ ; ce sera fait au n° 4. Mais auparavant, nous nous arrêterons un instant à l'hypothèse de Milne<sup>1</sup> pour  $\beta$  variable et équilibre polytropicque.

<sup>1</sup> G. TIERCY, *L'équilibre radiatif dans les étoiles*. Gauthier-Villars, Paris, 1935, p. 219.

### 3. — DE L'HYPOTHÈSE DE MILNE POUR $\beta$ VARIABLE.

Nous avons examiné, plus avant, le cas de  $\Theta = \text{const.}$  avec la forme polytropicque  $P = C \cdot \rho^{\mathcal{K}}$  pour la pression totale; ce cas correspond à  $n = 3$ ;  $\Theta$  est alors lié à  $\beta$  par l'égalité (4).

Demandons-nous ce qu'il advient de la température  $T$  lorsqu'on envisage une variation de  $\beta$  en fonction du rayon, en conservant à  $P$  la forme polytropicque ? Il est bien évident qu'on ne peut pas prendre pour  $\beta$  une fonction quelconque; il faut choisir convenablement celle-ci, de façon à garder la forme  $P = C \cdot \rho^{\mathcal{K}}$ ; l'hypothèse de Milne consiste à poser:

$$\frac{1 - \beta}{\beta^{4-s}} \cdot \frac{1}{T^s} = \text{const.} = K, \tag{6}$$

ou:

$$\frac{1 - \beta}{\beta} = K \cdot T^s \cdot \beta^{3-s}; \tag{6'}$$

comme on a par (3):

$$T^3 = \frac{3R}{a\mu} \cdot \frac{1 - \beta}{\beta} \cdot \rho,$$

il vient à cause de (6'):

$$T^{3-s} = \frac{3RK}{a\mu} \cdot \beta^{3-s} \cdot \rho,$$

ou:

$$T = \left[ \frac{3RK}{a\mu} \right]^{\frac{1}{3-s}} \cdot \beta \cdot \rho^{\frac{1}{3-s}}. \tag{7}$$

Si maintenant on porte dans (7) la valeur de  $T$  tirée de l'égalité

$$P = \frac{R}{\beta\mu} \cdot \rho \cdot T ,$$

c'est-à-dire:

$$T = \frac{\beta\mu}{R} \cdot \frac{P}{\rho} ,$$

on obtient l'expression suivante donnant la pression totale  $P$ :

$$P = \frac{R}{\mu} \cdot \left[ \frac{3RK}{a\mu} \right]^{\frac{1}{3-s}} \cdot \rho^{\frac{4-s}{3-s}} ,$$

c'est-à-dire:

$$P = C \cdot \rho^{\frac{4-s}{3-s}} , \quad (8)$$

en posant:

$$C = \frac{R}{\mu} \left[ \frac{3RK}{a\mu} \right]^{\frac{1}{3-s}} = \text{const.} ;$$

l'expression (8) est bien de la forme polytropique, avec

$$\mathcal{K} = \frac{4-s}{3-s} \quad \text{ou} \quad n = 3-s ;$$

portant cette valeur de  $\mathcal{K}$  dans (7), on trouve que la température est donnée par:

$$T = (\text{const}) \cdot \beta \cdot \rho^{\mathcal{K}-1} ;$$

et comme  $\beta$  est maintenant variable, la distribution de la température  $T$  n'est plus réglée par la solution d'Emden ou de Bialobrzkeski,  $T = \Theta \cdot \rho^{\mathcal{K}-1}$  avec  $\Theta = \text{const.}$ ; de sorte qu'en ce qui concerne  $T$ , le cas n'est plus exactement comparable à celui de la classe polytropique  $n = 3$ .

Il en sera de même avec la formule de variation de  $\beta$  que nous verrons au n° 5.



4. — L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE SECOND ORDRE  
DU PROBLÈME.

Nous avons déjà eu l'occasion de parler de l'équation différentielle générale de second ordre qui caractérise l'équilibre thermodynamique des sphères gazeuses <sup>1</sup>. Rappelons que cette équation est issue de celle de l'équilibre mécanique:

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dP}{dr} = - \frac{4\pi G}{r^2} \int_0^r \rho r^2 dr ;$$

et l'on sait qu'on a d'autre part:

$$P = \frac{R}{\mu} \rho T + \frac{a}{3} T^4 .$$

Ecrivons encore:

$$T = \Theta \cdot \rho^{\mathcal{K}-1} ,$$

comme dans la théorie d'Emden (où  $p' = 0$ ) ou dans celle de Bialobrzski ( $\mathcal{K} = \frac{4}{3}$ ), dans lesquelles on fait  $\Theta = \text{const.}$ ; mais maintenant, nous considérons  $\Theta$  comme variable avec  $r$ . Cela nous conduira à une équation différentielle tout à fait générale; après quoi nous verrons bien ce que devient cette équation si l'on exige que  $P$  conserve la forme polytropicque  $C\rho^{\mathcal{K}}$ .

Avec la forme adoptée pour  $T$ , on a pour  $P$ :

$$P = \frac{R}{\mu} \Theta \cdot \rho^{\mathcal{K}} + \frac{a}{3} \Theta^4 \cdot \rho^4 (\mathcal{K}-1) ; \quad (9)$$

ou bien, si l'on utilise la variable d'Emden

$$\begin{aligned} \rho &= u^n \quad \text{avec} \quad n = \frac{1}{\mathcal{K} - 1} ; \\ P &= \frac{R}{\mu} \Theta \cdot u^{n+1} + \frac{a}{3} \Theta^4 \cdot u^4 . \end{aligned} \quad (10)$$

<sup>1</sup> G. TIERCY, *C. R. Soc. de Phys.*, 1935, II; le même dans *Publ. Obs. Genève*, fasc. 30.

L'équation de l'équilibre mécanique devient :

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[ \frac{R}{\mu} \Theta \cdot (n + 1) + \frac{4a}{3} \cdot \Theta^4 \cdot u^{3-n} \right] \frac{du}{dr} + \frac{d\Theta}{dr} \left[ \frac{R}{\mu} \cdot u + \frac{4a}{3} \cdot \Theta^3 \cdot u^{4-n} \right] = \\ & = - \frac{4\pi G}{r^2} \int_0^r u^n r^2 dr . \end{aligned} \right. \quad (11)$$

En dérivant cette égalité (11) par rapport à  $r$ , et en tenant compte de l'équation (11) elle-même, on obtiendra l'équation différentielle de second ordre qui lie la fonction  $u$  à la variable  $r$ ; et comme  $\Theta$  est variable avec  $r$  dans le cas qui nous occupe, on voit bien que l'équation résultante sera compliquée.

Rappelons en passant que si l'on pose  $\Theta = \text{const.}$  comme l'a fait Bialobrzski, il faut prendre en même temps  $n = 3$ ; et l'équation différentielle est alors du type d'Emden.

Avec  $\Theta$  variable, l'équation finale contiendra de nombreux termes; nous l'avons écrite dans l'article rappelé plus avant<sup>1</sup>. Cette équation complète ne nous est ici d'aucune utilité, puisque nous recherchons uniquement des cas d'équilibre polytropique, pour lesquels  $P$  doit pouvoir prendre la forme réduite  $C \cdot \rho^{\mathcal{K}}$ ; pour être dans ces conditions particulières, il suffit que, dans (9), on ait :

$$\frac{R}{\mu} \Theta + \frac{a}{3} \Theta^4 \cdot \rho^3 \mathcal{K}^{-4} = C , \quad (12)$$

où  $C$  est une constante; cette égalité donne la loi de variation de  $\Theta$  en fonction de  $\rho$ , donc en fonction de  $r$ ; elle montre que, lorsqu'on va de la périphérie au centre de l'étoile,  $\Theta$  diminue puisque  $\rho$  augmente.

L'équation différentielle se réduit alors immédiatement à la suivante :

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{du}{dr} + \frac{4\pi G}{(n+1)C} \cdot u^n = 0 , \quad (13)$$

<sup>1</sup> *C. R. Soc. de Phys.*, 1935, II; le même dans *Publ. Obs. Genève*, fasc. 30.

quel que soit  $\mathcal{K}$ , c'est-à-dire quelle que soit la classe  $n$ . Nous reprendrons cette question au n° 5.

Pour l'instant, insistons sur le fait que, dans les conditions polytropiques, l'équation différentielle du second ordre n'est *jamais* d'un type compliqué; elle est *toujours* du type (13) d'Emden.

Cette remarque est importante; elle paraît avoir échappé à M. Bialobrzeski.

Relevons enfin qu'on peut écrire:

$$T = \frac{\beta\mu}{R} \cdot \frac{P}{\rho} = \frac{C\beta\mu}{R} \cdot \rho^{\mathcal{K}-1};$$

on peut donc poser:

$$\Theta = \frac{C\beta\mu}{R}, \quad (14)$$

relation qui montre bien que  $\Theta$  sera constant si  $\beta$  l'est, cas qui se présente pour  $n = 3$  comme on a vu.

##### 5. — CONSERVATION DU CARACTÈRE POLYTROPIQUE AVEC $\beta$ VARIABLE.

La question qui nous occupe ici est de savoir quelle variation il faut adopter pour  $\beta$  le long du rayon pour que l'équation différentielle de second ordre correspondante soit une équation d'Emden du type (13).

Nous pourrions évidemment nous contenter de la condition (12), qui donne la variation convenable de  $\Theta$  en fonction de  $\rho$ ; mais il semble préférable de trouver  $\beta$  en fonction  $\rho$  ou de  $T$ .

La condition à traduire est que l'expression de la pression totale:

$$P = \frac{R}{\mu} \Theta \cdot u^{n+1} + \frac{a}{3} \Theta^4 \cdot u^4 = \frac{R}{\mu} \rho T + \frac{a}{3} T^4 \quad (15)$$

conserve la forme polytropique  $P = C \cdot \rho^{\mathcal{K}}$

Rappelons l'égalité (3) qui donne  $T$  en fonction de  $\beta$  et de  $\rho$ :

$$T = \left[ \frac{3R(1-\beta)}{a\beta\mu} \right]^{\frac{1}{3}} \cdot \rho^{\frac{1}{3}},$$

égalité vraie quelle que soit l'hypothèse faite sur la variation de  $\beta$ ; on a d'ailleurs vu par (14) que  $\Theta$  est proportionnel à  $\beta$  dans les cas d'équilibres polytropiques.

Portant cette valeur générale de  $T$  dans (15), on obtient pour  $P$ :

$$P = \frac{R}{\mu} \left[ \frac{3R(1-\beta)}{a\beta\mu} \right]^{\frac{1}{3}} \cdot \rho^{\frac{4}{3}} + \frac{a}{3} \left[ \frac{3R(1-\beta)}{a\beta\mu} \right]^{\frac{4}{3}} \cdot \rho^{\frac{4}{3}} ; \quad (16)$$

cette expression montre bien que, pour  $\beta = \text{const.}$ , on aura la forme

$$P = \text{const.} \cdot \rho^{\frac{4}{3}} ,$$

cas de M. Bialobrzewski et de M. Eddington.

Si maintenant nous voulons qu'avec  $\beta$  variable  $P$  conserve la forme  $C \cdot \rho^{\mathcal{K}}$ , l'expression (16) montre qu'on doit avoir:

$$\frac{R}{\mu} \left[ \frac{3R(1-\beta)}{a\beta\mu} \right]^{\frac{1}{3}} + \frac{a}{3} \left[ \frac{3R(1-\beta)}{a\beta\mu} \right]^{\frac{4}{3}} = C \cdot \rho^x , \quad (17)$$

où  $x$  est un nombre quelconque. Cette condition en  $\beta$  et  $\rho$  remplace la condition (12); au lieu d'exprimer la variation de  $\Theta$ , elle donne la loi de variation de  $\beta$ .

Si cette loi est satisfaite, la pression  $P$  est proportionnelle à  $\rho^{\frac{4}{3}+x}$ :

$$P = C \rho^{\frac{4}{3}+x} :$$

c'est-à-dire qu'on a:

$$\mathcal{K} = \frac{4}{3} + x ; \quad n = \frac{1}{\mathcal{K} - 1} = \frac{3}{1 + 3x} ; \quad (18)$$

comme on ne retient que les valeurs positives de  $n$ , seules intéressantes du point de vue physique, on est amené à ne considérer que les valeurs de  $x$  telles que

$$x > -\frac{1}{3} ;$$

pour  $x = 0$ , on a le cas  $n = 3$  ou  $\mathcal{K} = \frac{4}{3}$ ; pour  $x = -\frac{1}{3}$ , il vient  $n = \infty$ , ce qui est le cas de l'isothermie, comme on le verra plus loin.

La condition (17) s'écrit plus simplement, après quelques réductions faciles:

$$\left[ \frac{3R^4(1-\beta)}{a\beta^4\mu^4} \right]^{\frac{1}{3}} = C \cdot \rho^x,$$

ou bien:

$$\frac{3R^4(1-\beta)}{a\beta^4\mu^4} = C^3 \cdot \rho^{3x}. \tag{19}$$

Mais, à cause de (3), on a toujours, quelle que soit l'hypothèse sur  $\beta$  variable:

$$\rho = \frac{a\beta\mu}{3R(1-\beta)} \cdot T^3;$$

de sorte que (19) peut s'exprimer par:

$$\frac{R^3}{\beta^3\mu^3} \cdot \left[ \frac{3R(1-\beta)}{a\beta\mu} \right] = C^3 \cdot \left[ \frac{a\beta\mu}{3R(1-\beta)} \right]^{3x} \cdot T^{9x},$$

ou bien:

$$\frac{R^3}{\beta^3\mu^3} \cdot \left[ \frac{3R(1-\beta)}{a\beta\mu} \right]^{3x+1} \cdot \frac{1}{T^{9x}} = C^3; \tag{20}$$

on aperçoit bien ici que la valeur  $x = -\frac{1}{3}$  ( $n = \infty$ ) correspond au cas de l'équilibre isothermique.

On trouvera la valeur de la constante C en portant dans le premier membre de (20) les valeurs centrales  $\beta_c$  et  $T_c$ ; on obtient ainsi:

$$C^3 = \frac{\left(\frac{R}{\mu}\right)^{3x+4}}{\left(\frac{a}{3}\right)^{3x+1}} \cdot \frac{(1-\beta_c)^{3x+1}}{\beta_c^{3x+4}} \cdot \frac{1}{T_c^{9x}}; \tag{21}$$

et l'on peut exprimer la loi de variation de  $\beta$  dans le corps de l'étoile par l'égalité:

$$\frac{(1-\beta)^{3x+1}}{\beta^{3x+4}} \cdot \frac{1}{T^{9x}} = \frac{(1-\beta_c)^{3x+1}}{\beta_c^{3x+4}} \cdot \frac{1}{T_c^{9x}}; \tag{22}$$

il vient alors pour P :

$$P = C \cdot \rho^{\frac{4}{3}+x},$$

où C est déterminée par l'expression (21).

La valeur  $n$  de la classe polytropique correspondant à une valeur donnée  $x$  est :

$$n = \frac{3}{1+3x} = 3 - \frac{9x}{1+3x}; \quad (23)$$

si l'on veut que  $n$  reste supérieure à 2, il faut prendre  $x < \frac{1}{6}$ ; de sorte que les valeurs possibles de  $x$  sont dans ce cas :

$$-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{6}.$$

Maintenant, en posant  $x = \frac{s}{9-3s}$ , où  $s$  est une fraction positive arbitraire, on retrouve le cas de l'hypothèse de Milne examinée au n° 3 :

$$n = 3 - s;$$

par exemple, pour  $x = \frac{1}{15}$ , on a  $s = \frac{1}{2}$ .

En dehors des cas réglés par l'égalité (22), la condition (17) n'est pas satisfaite, et P n'a pas la forme réduite désirée.

## 6. — DE LA CONSTANTE C ET DE $\beta_c$ .

La constante C qui figure dans  $P = C\rho^{\mathcal{K}} = Cu^{n+1}$  entre dans la composition du coefficient constant du terme en  $u^n$  dans l'équation d'Emden correspondante :

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{du}{dr} + \omega^2 u^n = 0;$$

on a en effet <sup>1</sup> :

$$\omega^2 = \frac{4\pi G}{(n+1)C}, \quad (24)$$

<sup>1</sup> G. TIERCY, *L'équilibre radiatif dans les étoiles*. Paris, Gauthier-Villars, 1935, p. 223.

C ayant la valeur exprimée par la quantité (21). Dans l'application au problème stellaire usuel, cette égalité (24) servira justement à déterminer la valeur numérique de C, celle de la constante  $\omega^2$  pouvant être tirée des données initiales, le rayon  $r_0$  et la masse M de l'étoile <sup>1</sup>, comme il est rappelé ci-après.

On pose :

$$u = u_c \psi \quad \text{et} \quad r = \frac{\xi}{\omega \cdot u_c^{\frac{n-1}{2}}},$$

où  $u_c$  est la valeur centrale de la fonction  $u$ ; de telle sorte que l'équation différentielle devient :

$$\frac{d^2 \psi}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi} \frac{d\psi}{d\xi} + \psi^n = 0 ;$$

et l'on sait qu'Emden a calculé des tables numériques donnant la solution de cette équation pour plusieurs valeurs de la classe  $n$  ( $n = 0, 1, 2, 2\frac{1}{2}, 3, 4, 5$ ); ces tables indiquent, pour toute valeur du rayon, c'est-à-dire pour toute valeur de la variable  $\xi$ , les valeurs respectives correspondantes de  $\psi, \psi^n, \psi^{n+1}, \left(-\frac{d\psi}{d\xi}\right), \left(-\xi^2 \cdot \frac{d\psi}{d\xi}\right)$  et  $\left(-\frac{3}{\xi} \cdot \frac{d\psi}{d\xi}\right)$ ; ces valeurs sont respectivement proportionnelles à celles de  $T_r, \rho_r, P_r, g_r, M_r$  et  $\bar{\rho}_r$ .

Dans le problème usuel, où  $r_0$  et M sont connus, on obtient d'abord les valeurs des constantes  $u_c$  et  $\omega^2$  par les expressions <sup>2</sup>:

$$\begin{cases} u_c = \left(\frac{\xi_0}{r_0}\right)^{\frac{3}{n}} \cdot \left(\frac{4\pi \mathcal{M}_{0,x}}{M}\right)^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\rho_c}, \\ \omega^2 = \left(\frac{\xi_0}{r_0}\right)^{\frac{3-n}{n}} \cdot \left(\frac{4\pi \mathcal{M}_{0,x}}{M}\right)^{\frac{n-1}{n}}, \end{cases}$$

où  $\xi_0$  est la valeur de  $\xi$  à la surface ( $r = r_0$ ), et où  $\mathcal{M}_{0,x}$  désigne la valeur de surface :

$$\mathcal{M}_{0,x} = -\left(\xi^2 \frac{d\psi}{d\xi}\right)_{0,x};$$

<sup>1</sup> *Idem*, p. 225.

<sup>2</sup> G. TIERCY, *loc. cit.*

l'indice  $x$  indique qu'on se trouve dans le cas polytropique du n° précédent, où  $n = \frac{3}{1+3x}$ . Connaissant  $\omega^2$ , l'égalité (24) fournit  $C$ , valeur à porter dans le second membre de (20); on obtient ainsi la loi de variation de  $\beta$ :

$$\frac{R^3}{\beta^3 \mu^3} \left[ \frac{3R(1-\beta)}{a\beta\mu} \right]^{3x+1} \cdot \frac{1}{T^{9x}} = C^3, \quad (25)$$

où  $C$  est connu.

D'autre part, l'expression (14) donne:

$$T = \frac{C\beta\mu}{R} u = \frac{C\mu u_c}{R} \cdot \beta\psi; \quad (26)$$

en portant cette dernière valeur de  $T$  dans (25), on obtient une relation entre  $\beta$  et  $\psi$ , relation qui permet de déterminer la valeur de  $\beta$  correspondant à toute valeur de  $\psi$ , c'est-à-dire à une valeur quelconque du rayon  $r$ . On trouve:

$$\frac{R^3}{\beta^3 \mu^3} \left[ \frac{3R(1-\beta)}{a\beta\mu} \right]^{3x+1} \cdot \left( \frac{R}{C\mu u_c} \right)^{9x} \cdot \frac{1}{\beta^{9x} \cdot \psi^{9x}} = C^3,$$

que l'on transforme sans difficulté en:

$$\frac{(1-\beta)^{3x+1}}{\beta^{12x+4}} \cdot \frac{1}{\psi^{9x}} = u_c^{9x} \cdot C^{9x+3} \cdot \left( \frac{a}{3} \right)^{3x+1} \cdot \left( \frac{\mu}{R} \right)^{12x+4}; \quad (27)$$

le second membre de cette égalité est une constante connue, puisque  $u_c$  et  $C$  ont été déterminées précédemment en fonction des données immédiates ( $r_0$  et  $M$ ) du problème usuel, et en utilisant les tables d'Emden ou des tables analogues faciles à construire. Nous désignerons le second membre de (27) par la notation  $N^{3x+1}$ ; de sorte qu'il vient maintenant:

$$(1-\beta)^{3x+1} = N^{3x+1} \cdot \psi^{9x} \cdot \beta^{12x+4};$$

comme les conditions centrales sont données par la condition  $\psi_c = 1$ , on obtient  $\beta_c$  par l'équation:

$$(1-\beta_c)^{3x+1} = N^{3x+1} \cdot \beta_c^{12x+4},$$

c'est-à-dire:

$$1-\beta_c = N\beta_c^4. \quad (28)$$



Ainsi,  $\beta_c$  est toujours fourni par une équation du quatrième degré, pourvu qu'on adopte la loi générale (25) pour la variation de  $\beta$  le long du rayon. Il est facile de vérifier que pour  $x = 0$ , c'est-à-dire si  $n = 3$ , l'équation (28) redonne l'équation du cas cosmogonique de M. Bialobrzeski et de M. Eddington; en effet, la valeur du second membre de (27) est alors la suivante:

$$\mathcal{N} = N^{0+1} = u_c^0 \cdot C^3 \cdot \frac{a}{3} \left(\frac{\mu}{R}\right)^4 = \frac{aC^3}{3} \cdot \left(\frac{\mu}{R}\right)^4;$$

et l'égalité (24) donne la valeur de C:

$$C = \frac{4\pi G}{(n+1)\omega^2} = \frac{4\pi G}{4\omega^2} = \frac{\pi G}{\omega^2},$$

où  $\omega^2$  représente l'expression

$$\omega^2 = \left(\frac{\xi_0}{r_0}\right)^{\frac{3-n}{n}} \cdot \left(\frac{4\pi \mathcal{N}_{0,x}}{M}\right)^{\frac{n-1}{n}},$$

qui devient ici

$$\omega^2 = \left(\frac{4\pi \mathcal{N}_0}{M}\right)^{\frac{2}{3}};$$

nous désignons par  $\mathcal{N}_0$  la valeur que prend  $\mathcal{N}_{0,x}$  pour  $n = 3$ . Il vient donc:

$$C^3 = \frac{\pi^3 G^3}{\omega^6} = \frac{\pi G^3 M^2}{16 \mathcal{N}_0^2};$$

d'où:

$$\mathcal{N} = M^2 \cdot \mu^4 \cdot \frac{a\pi G^3}{48 R^4 \mathcal{N}_0^2};$$

c'est la constante de M. Eddington; elle vaut, comme on sait,  $(7,83) \cdot 10^{-70}$  unités CGS.

7. — CALCUL DE  $P_c$  ET  $T_c$ .

A cause de la relation (26), on a :

$$\frac{T}{T_c} = \frac{\beta}{\beta_c} \cdot \psi, \quad (29)$$

puisque  $\psi_c = 1$ ; de sorte que la loi générale (22) de conservation du caractère polytropique devient :

$$\begin{aligned} \frac{(1 - \beta)^{3x+1}}{\beta^{3x+4}} &= \frac{(1 - \beta_c)^{3x+1}}{\beta_c^{3x+4}} \cdot \left(\frac{T}{T_c}\right)^{9x}; \\ \frac{(1 - \beta)^{3x+1}}{\beta^{12x+4}} &= \frac{(1 - \beta_c)^{3x+1}}{\beta_c^{12x+4}} \cdot \psi^{9x}; \\ \frac{1 - \beta}{\beta^4} &= \frac{1 - \beta_c}{\beta_c^4} \cdot \psi^{\frac{9x}{3x+1}}, \end{aligned} \quad (30)$$

condition qui remplace (22) ou (27).

Comme on a par (23) :

$$n = 3 - \frac{9x}{3x+1},$$

on retrouve la notation de Milne en posant :

$$s = \frac{9x}{3x+1},$$

comme on a vu au n° 5; la condition de « polytropisme » s'écrit alors :

$$\frac{1 - \beta}{\beta^4} = \frac{1 - \beta_c}{\beta_c^4} \cdot \psi^s. \quad (31)$$

La valeur centrale  $\beta_c$  étant numériquement connue par (28), l'égalité (31) donne tous les  $\beta$ , c'est-à-dire la valeur du coefficient  $\beta$  pour un rayon  $r$  quelconque; on a donc la distribution des  $\beta$ .

La distribution des températures  $T$  est réglée par la relation (26):

$$T = \frac{C\mu \cdot u_c}{R} \cdot \beta \psi ,$$

puisque les constantes  $C$  et  $u_c$  ont été déterminées en fonction des données immédiates du problème usuel, comme on a vu au n° 6. On a donc pour la température centrale:

$$T_c = \frac{C\mu u_c}{R} \cdot \beta_c . \tag{32}$$

Quant à la pression centrale, elle vaut:

$$P_c = C u_c^{n+1} = C u_c^{4 - \frac{9x}{3x+1}} = C \cdot u_c^{\frac{3x+4}{3x+1}} , \tag{33}$$

tandis que la distribution des pressions totales est réglée par:

$$P = P_c \cdot \psi^{\frac{3x+4}{3x+1}} .$$

8. — EXPRESSIONS DE  $P_c$  ET  $T_c$  EN FONCTION DES DONNÉES INITIALES  $r_0$  ET  $M$ .

Pour la pression centrale, il suffit de remplacer, dans l'expression (33),  $C$  et  $u_c$  par leurs valeurs respectives; on a, comme on a vu au n° 6:

$$\left\{ \begin{array}{l} C = \frac{4\pi G}{(n+1)\omega^2} , \\ \omega^2 = \left(\frac{\xi_0}{r_0}\right)^{\frac{3-n}{n}} \cdot \left(\frac{4\pi \mathcal{N}_{0,x}}{M}\right)^{\frac{n-1}{n}} , \\ u_c = \left(\frac{\xi_0}{r_0}\right)^{\frac{3}{n}} \cdot \left(\frac{4\pi \mathcal{N}_{0,x}}{M}\right)^{-\frac{1}{n}} = \rho_c^n ; \end{array} \right.$$

et comme

$$n = \frac{3}{3x+1} , \quad n+1 = \frac{4+3x}{3x+1} ,$$

il vient:

$$\left\{ \begin{array}{l} C = \frac{4\pi G \cdot (3x + 1)}{(4 + 3x) \cdot \omega^2}, \\ \omega^2 = \left(\frac{\xi_0}{r_0}\right)^{3x} \cdot \left(\frac{4\pi \mathcal{N}_{0,x}}{M}\right)^{\frac{2-3x}{3}}, \\ u_c = \left(\frac{\xi_0}{r_0}\right)^{3x+1} \cdot \left(\frac{4\pi \mathcal{N}_{0,x}}{M}\right)^{-\frac{3x+1}{3}}; \end{array} \right.$$

d'où finalement:

$$C = \frac{4\pi G \cdot (3x + 1)}{(4 + 3x)} \cdot \left(\frac{\xi_0}{r_0}\right)^{-3x} \cdot \left(\frac{4\pi \mathcal{N}_{0,x}}{M}\right)^{\frac{3x-2}{3}},$$

$$u_c^{\frac{3x+4}{3x+1}} = \left(\frac{\xi_0}{r_0}\right)^{3x+4} \cdot \left(\frac{4\pi \mathcal{N}_{0,x}}{M}\right)^{-\frac{3x+4}{3}},$$

et:

$$P_c = \frac{G \cdot (3x + 1)}{4\pi(4 + 3x)} \cdot \left(\frac{\xi_0}{r_0}\right)^4 \cdot \left(\frac{M}{\mathcal{N}_{0,x}}\right)^2. \quad (34)$$

On a aussi:

$$T_c = \frac{\mu \beta_c}{R} \cdot C u_c,$$

$$T_c = \frac{\mu \beta_c}{R} \cdot \frac{G \cdot (3x + 1)}{4 + 3x} \cdot \left(\frac{\xi_0}{r_0}\right) \cdot \frac{M}{\mathcal{N}_{0,x}}. \quad (35)$$

On remarquera que les exposants de  $\left(\frac{\xi_0}{r_0}\right)$  et  $\left(\frac{M}{\mathcal{N}_{0,x}}\right)$  sont indépendants de  $x$  dans  $P_c$  et  $T_c$ ; la valeur de  $x$  (donc de la classe polytropique  $n$ ) n'intervient que dans les coefficients ainsi que dans la lecture du nombre  $\mathcal{N}_{0,x}$ .

Rappelons que  $x$  est quelconque entre les limites suivantes:

$$-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{6},$$

et que si l'on fait  $x = \frac{1}{15}$ , on trouve  $s = \frac{1}{2}$  et  $n = 2\frac{1}{2}$ ; les tables d'Emden comprennent le cas de la classe  $2\frac{1}{2}$ .

9. — LOI DE VARIATION DE  $\beta$  CORRESPONDANT À UNE VALEUR  
DONNÉE DE  $\mathcal{K}$  OU DE  $n$ .

Reprenons sous la forme (19) la condition qui conserve le caractère polytropique avec  $\beta$  variable:

$$\frac{3R^4(1-\beta)}{a\beta^4\mu^4} = C^3 \cdot \rho^{3x}, \quad (36)$$

en rappelant que:

$$\left\{ \begin{array}{l} P = C \cdot \rho^{\frac{4}{3}+x}, \\ \mathcal{K} = \frac{4}{3} + x, \quad n = \frac{1}{\mathcal{K}-1}, \\ x = \mathcal{K} - \frac{4}{3}, \quad x = \frac{3-n}{3n}. \end{array} \right.$$

Suivant qu'on suppose  $\mathcal{K}$  ou  $n$  donné, la condition (36) prend l'une ou l'autre des formes suivantes:

$$\frac{3R^4(1-\beta)}{a\beta^4\mu^4} = C^3 \cdot \rho^{3\mathcal{K}-4}, \quad (\mathcal{K} \text{ donné}), \quad (37)$$

$$\frac{3R^4(1-\beta)}{a\beta^4\mu^4} = C^3 \cdot \rho^{\frac{3-n}{n}}, \quad (n \text{ donné}). \quad (38)$$

Si l'on remplace  $\rho$  par sa valeur tirée de

$$T^3 = \frac{3R(1-\beta)}{a\beta\mu} \cdot \rho,$$

les formules (37) et (38) deviennent:

$$C^3 = \frac{R^3}{\beta^3\mu^3} \cdot \left[ \frac{3R(1-\beta)}{a\beta\mu} \right]^{3\mathcal{K}-3} \cdot \frac{1}{T^9\mathcal{K}-12}; \quad (37')$$

$$C^3 = \frac{R^3}{\beta^3\mu^3} \cdot \left[ \frac{3R(1-\beta)}{a\beta\mu} \right]^{\frac{3}{n}} \cdot \frac{1}{T^3\left(\frac{3-n}{n}\right)}. \quad (38')$$

La valeur de la constante  $C$  étant obtenue en considérant les conditions centrales ( $\beta_c$  et  $T_c$ ), la loi de variation de  $\beta$  sera :

$$\frac{(1 - \beta)^3 \mathcal{K}^{-3}}{\beta^3 \mathcal{K}} \cdot \frac{1}{T^3 (\mathcal{K}^{-4})} = \frac{(1 - \beta_c)^3 \mathcal{K}^{-3}}{\beta_c^3 \mathcal{K}} \cdot \frac{1}{T_c^3 (\mathcal{K}^{-4})} \quad (39)$$

dans le cas où c'est l'exposant  $\mathcal{K}$  qui est donné; si c'est la classe  $n$  qu'on connaît d'avance, la loi de  $\beta$  est :

$$\frac{(1 - \beta)^3}{\beta^{3+3n}} \cdot \frac{1}{T^{3(3-n)}} = \frac{(1 - \beta_c)^3}{\beta_c^{3+3n}} \cdot \frac{1}{T_c^{3(3-n)}} ; \quad (40)$$

dans les deux cas, le caractère polytropique de l'équilibre est conservé.

Comme on a toujours, dans  $T = \Theta \cdot \rho^{\mathcal{K}-1} = \Theta \cdot u$ :

$$\Theta = \frac{C\mu\beta}{R} ,$$

la variation de  $\Theta$  est connue avec celle de  $\beta$ . Quant aux constantes  $C$  et  $\beta_c$ , on en a vu le calcul au n° 6, à partir des données  $r_0$  et  $M$  du problème ordinaire.

---