

Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 20 (1938)

Artikel: Sur la distribution des températures à l'intérieur des étoiles
Autor: Tiercy, Georges
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-742936>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 04.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SUR LA DISTRIBUTION DES TEMPÉRATURES A L'INTÉRIEUR DES ÉTOILES

PAR

Georges TIERCY

1. — *Généralités ; histoire.* — On connaît l'enchaînement des faits. Les chercheurs se sont tout d'abord attachés à notre Soleil; et le premier problème qu'ils ont tenté de résoudre a consisté à évaluer la température probable de la surface solaire; cette recherche n'a pu être faite avec quelque précision qu'après 1837, date à laquelle J. Herschel et Pouillet entreprirent de mesurer ce que Pouillet a appelé la « constante solaire ».

Ce premier problème en déclancha un second: celui de l'entretien de la chaleur solaire; et c'est à propos de ce second problème qu'on fut amené à envisager la distribution des températures et des pressions à l'intérieur du Soleil. Plus tard, on parla non plus seulement du Soleil, mais de tous les soleils.

Il ne sera pas inutile de rappeler ici ce qu'on appelle la « température effective » du Soleil; c'est celle qu'aurait un corps noir, c'est-à-dire une surface qui absorberait également et totalement toutes les radiations, et qui, placé à la distance du Soleil, nous enverrait exactement la quantité de chaleur correspondant à la constante solaire ($1^{\text{cal}},93$ par cm^2 et par min.). Cette température effective est la seule qui soit à la portée de nos moyens d'investigation, puisque nous ne pouvons connaître la chaleur solaire que de loin.

Encore fallut-il attendre 1880 pour obtenir des valeurs raisonnables de cette température effective. Les lois utilisées avant cette date reposaient, en effet, uniquement sur des résultats expérimentaux limités à des températures de laboratoire; or, toute expérience est impossible à la température de la surface solaire, et il fallait procéder par extrapolation de formules purement empiriques. Les résultats étaient affreusement discordants. C'est la loi de Stefan-Boltzmann, découverte en 1879, qui permit d'obtenir des valeurs concordantes; elle s'exprime par l'égalité bien connue:

$$E = \sigma T^4, \quad (\sigma = 5,75 \cdot 10^{-5} \text{ ergs/cm}^2, \text{ sec.}) ;$$

en adoptant pour E la valeur: $(6,25) \cdot 10^{10}$ ergs par sec. et par cm^2 de surface solaire (valeur tirée de la constante $1^{\text{cal}},93$), on trouve une température absolue $T = 5.800^\circ$ environ.

La loi de Wien, démontrée en 1901, et résultant, comme celle de Stefan, d'un raisonnement rigoureux, donne une autre détermination de T ; elle s'exprime comme suit:

$$T = \frac{C^{\text{te}}}{\lambda_m} = \frac{0,289}{\lambda_m}, \quad (\lambda_m \text{ en cm}) ,$$

où λ_m est la longueur d'onde correspondant au maximum énergétique de l'émission du corps noir. Comme, pour le Soleil, $\lambda_m = (4,70) \cdot 10^{-5} \text{ cm}$, on trouve $T = 6.150^\circ$ absolus.

Plus tard, la loi de Planck¹, appliquée au spectre solaire:

$$E_\lambda = \frac{C \lambda^{-5}}{10^{\frac{k}{\lambda T}} - 1}, \quad \left\{ \begin{array}{l} C = (3,71) \cdot 10^{-5} \\ k = 0,623 \\ \lambda \text{ en cm} \end{array} \right\},$$

donna pour T des valeurs allant de 5.800° à 6.200° . On peut donc dire que les divers résultats s'accordent bien, donnant une valeur proche de 6000° . Mais il faut rappeler ici que les corps noirs, à température égale, rayonnent plus de chaleur que les autres; il résulte de cette remarque que la température dite effective ne saurait indiquer qu'un minimum strictement nécessaire pour

¹ M. PLANCK, *Vorlesungen über Wärmestrahlung*. Leipzig, 1923.

produire le rayonnement observé. D'ailleurs le Soleil n'est pas dans les conditions que l'on trouve dans les laboratoires de physique, où les corps noirs sont des enceintes creuses ne rayonnant que par un trou minuscule, alors que le rayonnement solaire concerne la surface entière du Soleil et part dans toutes les directions. Il serait donc imprudent de penser que la température de fait de la photosphère est très voisine de la température effective. En tenant compte de tous les renseignements possibles, il semble que la valeur la plus vraisemblable pour la température véritable de la surface solaire soit voisine de 7.000° ou 8.000° . Il va sans dire que cela ne gêne en rien l'emploi de la température effective dans les calculs.

Comme on l'a rappelé plus haut, ce premier problème souleva celui de *l'entretien de la chaleur solaire*.

Nous ne rappellerons ici que pour mémoire les théories fameuses de Mayer, de Helmholtz et de Lord Kelvin, dont aucune n'est capable de répondre à toutes les exigences du problème, notamment celle d'arriver à une indication sur la durée du Soleil.

D'autres idées ont été mises en jeu après 1880; notamment celle qui proposait que, aux températures du Soleil, les atomes des éléments chimiques fussent dissociés en corps plus simples, inconnus jusqu'alors; c'est là le principe posé par Sir Norman Lockyer en 1887, et basé sur la seule considération des spectres, sans égard à l'entretien de la chaleur solaire; on sait que ces vues se sont trouvées confirmées en 1920, à la suite des travaux de M. N. Saha sur l'ionisation. Mais nous sortons ici de notre sujet.

Revenons à notre problème, celui de l'entretien de la chaleur solaire et de l'équilibre thermodynamique du Soleil.

2. — *De Homer Lane à T.-J. See.* — Le premier grand progrès dans la question a été réalisé par J. Homer Lane en 1870. Lane innove en admettant que le Soleil est constitué par un mélange de gaz parfaits, et en mettant par conséquent en jeu la loi de Mariotte et de Gay-Lussac; en outre, considérant pour la masse solaire un équilibre du type adiabatique, il introduit la loi de Poisson. Admettant ensuite la théorie de Helmholtz-

Kelvin sur l'entretien de la chaleur solaire par le fait d'une concentration progressive de la masse, il cherche à déterminer la répartition des densités et des températures en fonction des distances au centre du Soleil ou d'une étoile. Cette fois, le problème est bien posé; c'est bien là la question qu'il faut élucider.

En fait, Lane considère déjà un équilibre qu'on peut appeler « équilibre adiabatique généralisé », comme on l'a fait plus tard; c'est-à-dire que, dans l'équation de Poisson:

$$p = K \cdot \rho^{\gamma_1} ;$$

Lane admet que l'exposant γ_1 n'est pas forcément le rapport, $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ des chaleurs spécifiques à pression et à volume constants. Envisageant déjà le cas d'une contraction uniforme, Lane trouve la valeur $\gamma_1 = \frac{4}{3}$ qui correspond à ce cas fondamental qui sera repris plus tard dans les solutions de caractère polytrophique et dans le problème de l'équilibre radiatif, jouant ainsi un rôle d'une importance considérable.

Il n'est pas inutile de rappeler que la question qui s'est posée à l'esprit de Lane était celle-ci: une masse chaude rayonnante tendant à se contracter, et la contraction tendant à produire un échauffement, comment va se comporter la masse? Va-t-elle s'échauffer ou se refroidir en perdant de la chaleur? On sait que Lane est arrivé à son fameux paradoxe, qu'on peut énoncer comme suit: « le coefficient de dilatation est négatif »; autrement dit, quand la sphère se contracte, la température s'élève.

Le problème traité par Lane a été repris en 1887 par Sir W. Thomson, à un point de vue un peu plus général, qui a conduit l'auteur à des conclusions nouvelles intéressantes, notamment pour la physique cosmique; il trouva en particulier que la densité centrale était 22,5 fois plus forte que la densité moyenne, ce qui donnait pour le Soleil une densité centrale égale à 31,5, tandis que Lane avait obtenu 28,2.

Plus récemment encore, en 1905, l'astronome américain T.-J.-J. See a repris le problème de Lane, admettant en général

les mêmes bases, suivant la même voie et vérifiant les résultats, en évitant les erreurs commises par Lane dans ses approximations. Comme Lane, M. See regarde le Soleil comme un mélange de corps simples dissociés, réduits à l'état monoatomique par l'effet de la haute température; de sorte que $\gamma = 5/3$. M. See calcule la température centrale à l'aide de la formule

$$T = T' \left(\frac{\rho}{\rho'} \right)^{\frac{2}{3}},$$

en se plaçant dans deux hypothèses: températures superficielles de 6.000° et 12.000° , entre lesquelles est certainement comprise la température véritable de la photosphère. En outre, il considère que la densité de la matière solaire est comprise entre $1/10$ et $1/100$ de celle de l'atmosphère terrestre; ce n'est là qu'une base de calcul, l'atmosphère solaire n'ayant pas de limite réelle. La densité centrale ayant été trouvée égale à $\rho_0 = 28,417$ dans des développements préalables, M. See obtient la distribution suivante:

Dist. au centre en fraction de r_0	T ($T' = 6000^\circ$ et $\rho' = \frac{1}{10}$)	T ($T' = 12000^\circ$ et $\rho' = \frac{1}{100}$)
1,00	6.000° C	12.000° C
0,95	379.200	3.520.300
0,90	797.900	7.407.200
0,70	2.878.700	26.723.100
0,50	5.446.100	50.557.000
0,30	7.932.900	73.642.900
0,10	9.500.200	88.191.600
0,00	9.714.200	90.178.400

On voit qu'il trouve une température centrale comprise entre 10 et 100 millions de degrés C. La pression centrale correspondante a une valeur de l'ordre de 10 milliards d'atmosphères. Quant à l'état de la matière solaire, M. See se déclare en faveur de la dissociation générale. Il admet, nous l'avons dit, avec Lord Kelvin, la concentration progressive de Helmholtz; il l'admet au moins jusqu'à ce que le rayon ait diminué de moitié; de sorte qu'en fin de compte, sa théorie attribue au Soleil une durée

à venir d'au moins 30 millions d'années environ, comparable à la durée passée. Cette durée, nous le savons, est encore beaucoup trop courte, tant aux yeux des astronomes qu'à ceux des géologues.

Remarquons que M. See, après Homer Lane, étudie la question de la vitesse que peuvent avoir les particules constituant le Soleil, gazeux, comme on a dit, dans sa totalité; et il constate que la désagrégation de la masse ne peut être évitée que grâce à la viscosité, qui s'oppose à une évaporation menaçante. De même, M. See procède à l'étude de la rigidité des corps célestes; et il trouve que la valeur de la rigidité moyenne de la matière solaire est plus de 6000 fois supérieure à celle de l'acier-nickel. Il trouve encore que la ténacité, ou force de rupture suivant un plan diamétral serait, pour la masse solaire, voisine de deux milliards d'atmosphères.

On le voit, M. See, après Homer Lane, arrive à des chiffres énormes. Il importe de rappeler ici une conclusion capitale de See: c'est que, dans une masse soumise, comme celle du Soleil, à des pressions internes considérables, et possédant une rigidité 6000 fois plus grande que celle de l'acier le plus rigide, il n'est plus possible de concevoir des courants de convection en profondeur; des courants ne peuvent exister que dans les couches superficielles, où la pression est faible et ne s'y oppose pas. Mais, comme il faut bien expliquer l'entretien du rayonnement solaire, M. See fait intervenir le mécanisme des ondulations lumineuses; et il pense que la vitesse de propagation de l'énergie rayonnante au sein de la masse profonde du Soleil doit être à peu près la même que celle de la lumière.

On voit qu'il faut relever, dans les idées de See, une évolution par rapport à celles de Lane; alors que Lane envisageait un équilibre convectif, généralisé il est vrai par l'admission d'un exposant γ_1 différent de γ dans la loi de Poisson, See abandonne les courants convectifs et fait progresser la radiation, des couches profondes vers la surface, par le mécanisme des ondes lumineuses. Ne peut-on pas apercevoir, dans cette idée, l'amorce de la théorie actuelle de l'équilibre radiatif, dont nous parlerons plus loin ?

Quoi qu'il en soit, il faut constater qu'en 1905, après les

travaux de Lane et de See principalement, on possédait pour le Soleil (et par conséquent pour les étoiles) un modèle de distribution des températures. Sans doute ce modèle était-il encore bien imparfait, puisque la pression de radiation n'y jouait encore aucun rôle. C'était cependant un premier pas, donnant un ordre de grandeur pour les températures des couches profondes.

3. — *Equilibres polytropiques.* — A peu près à la même époque parurent les recherches de P. Rudzki sur la contraction uniforme (1902), où l'auteur analyse ce processus mis à contribution dans les travaux antérieurs, notamment ceux de Lane. C'est aussi en 1902 que parurent les premières recherches de R. EMDEN sur l'équilibre interne du Soleil, travaux qui se rattachent à ceux de Helmholtz et de Lord Kelvin. Mais la contribution la plus importante due à R. Emden parut en 1907; elle a pour titre « Gaskugeln »; elle codifie en quelque sorte les idées qui étaient dans l'air depuis quelques années, et qui prenaient en considération un équilibre plus général que l'équilibre adiabatique, l'équilibre *polytropique*. Les transformations polytropiques sont des modifications thermodynamiques à chaleur spécifique constante, définies par l'égalité:

$$dQ = \xi \cdot dT ;$$

elles comprennent, comme cas particuliers, les transformations antérieurement envisagées, notamment la transformation de Lane:

$$p = K \cdot \rho^{\gamma_1} .$$

C'est en quelque sorte une extension du point de vue de Lane et de See. Il va sans dire que cette extension est encore incapable de donner une solution satisfaisante au problème posé par l'existence d'une sphère gazeuse en équilibre, puisqu'elle ignore, comme les théories antérieures, la pression de radiation. Cependant, les recherches d'Emden constituent une étape importante sur le chemin qui mène à la solution; les travaux les plus récents, ceux de Bialobrzewski, d'Eddington, de Jeans,

de Milne, d'autres encore, utilisent constamment les conditions d'équilibre polytropique; or, toute la fin d'un problème d'équilibre polytropique dépend de la résolution d'une certaine équation différentielle du second ordre, qui a été résolue numériquement pour la première fois par Emden, et qui porte le nom de cet auteur. Cependant, tous les travaux d'astrophysique théorique publiés jusqu'en 1913 présentaient, malgré leurs mérites indéniables, une même lacune regrettable; aucun d'eux ne tenait compte de la pression de radiation dans l'établissement des conditions d'équilibre thermodynamique des masses stellaires; or, la pression de radiation joue ici un rôle essentiel.

4. — *Introduction de la pression de radiation. Équilibre radiatif stellaire.* — Ce fut le grand mérite de M. C. Bialobrzewski d'introduire cette pression de radiation dans les équations de l'équilibre stellaire; dans son célèbre Mémoire de 1913, il a résolu le problème en tenant compte de ce nouvel élément et en admettant qu'on avait affaire à un équilibre polytropique. Il fut conduit à une équation différentielle du deuxième ordre, passablement compliquée dans sa forme la plus générale, c'est-à-dire celle correspondant à un équilibre polytropique de classe n quelconque, mais qui se ramenait à une équation du type d'Emden dès qu'on supposait $n = 3$; Bialobrzewski n'hésita pas à faire $n = 3$, ce qui ramenait d'ailleurs le problème à celui d'une contraction uniforme. Et il put ainsi offrir une distribution complète des températures, des pressions et des densités. Cette solution, acquise en 1913, est identique à celle que donna Sir Eddington trois ans plus tard, en partant d'autres hypothèses, et en précisant, ce que Bialobrzewski n'avait pas fait, la nature de l'équilibre radiatif; Eddington a fait faire à la solution un nouveau bond en avant. Sa théorie récolta une série de succès; et, en 1924, il pouvait annoncer que la concordance des résultats avec les données astronomiques s'avérait remarquable aussi bien pour les étoiles naines que pour les géantes, alors que la théorie avait été construite pour ces dernières. Mais il faut remarquer que la distribution des températures, c'est-à-dire le problème qui nous intéresse ici, était déjà donnée dès 1913.

Qu'il me suffise de rappeler le jeu de formules qui établissent la solution; elles sont rassemblées dans le tableau 1 suivant:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dr} &= -g\rho, & P &= p + p', \\ p &= \frac{R}{\mu}\rho T, & p' &= \frac{1}{3}aT^4, \\ p &= \beta P, & p' &= (1 - \beta)P, & \frac{p'}{p} &= \frac{1 - \beta}{\beta} = \text{const.}; \\ T^3 &= \frac{3R(1 - \beta)}{a\beta\mu}\rho; & T &= \Theta \cdot \rho^{\frac{1}{3}}; \\ \Theta &= \left[\frac{3R(1 - \beta)}{a\beta\mu} \right]^{\frac{1}{3}} = \text{const.}; \\ P &= C \cdot \rho^{\frac{4}{3}}, & C &= \frac{R\Theta}{\beta\mu} = \left[\frac{3R^4(1 - \beta)}{a\beta^4\mu^4} \right]^{\frac{1}{3}}; \\ M &= \text{masse totale}; & r_0 &= \text{rayon total}; \\ \mathcal{U}M^2\mu^4\beta^4 + \beta - 1 &= 0, & (\mathcal{U} = 7,83 \cdot 10^{-70}), & \\ & & & (\text{équation d'Eddington}); \\ \frac{a}{3} \cdot \Theta^4 + \frac{R}{\mu}\Theta - \frac{\pi G}{\omega^2} &= 0 & (\text{équation de Bialobrzski}); \\ \omega^2 &= \frac{3\pi G\mu}{3R\Theta + a\mu\Theta^4}, & \text{d'où } \omega^2; \end{aligned}$$

et avec les variables ξ et ψ d'Emden:

$$\begin{aligned} r &= \frac{\xi}{\omega \cdot u_c}, \\ \frac{\xi_0}{r_0} &= \omega \cdot u_c, & \text{d'où } u_c; \\ \frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi} \cdot \frac{d\psi}{d\xi} + \psi^3 &= 0, \\ (\text{équation d'Emden, classe polytropique } n = 3); \\ \rho &= u_c^3 \psi^3 = \rho_c \psi^3; & \rho_c &= u_c^3; \\ T &= u_c \cdot \Theta \cdot \psi = T_c \psi; & T_c &= u_c \Theta; \\ P &= \frac{\pi G}{\omega^2} u_c^4 \psi^4 = P_c \psi^4; & P_c &= \frac{\pi G}{\omega^2} \cdot u_c^4 = \frac{R\Theta}{\beta\mu} u_c^4. \end{aligned}$$

On a, par exemple, pour l'étoile Capella:

$$\begin{aligned}\beta &= 0,717 , \\ \Theta &= (1,824) \cdot 10^7 , \\ u_c &= 0,500 , \\ \rho_c &= 0,125 \text{ gr/cm}^3 , \\ T_c &= (0,914) \cdot 10^7 \text{ degrés} , \\ P_c &= (6,15) \cdot 10^{13} \text{ dynes/cm}^2 .\end{aligned}$$

Le problème stellaire de la distribution paraît donc résolu complètement. Un instant d'attention montre qu'il n'en est rien.

Le problème étudié est en effet celui d'une sphère gazeuse en équilibre polytropique (classe $n = 3$); la théorie montre que si une telle sphère doit être finie, la température doit être nulle à la surface, où l'on a $\rho_0 = 0$, $\psi_0 = 0$, $T_0 = 0$. Or, cela ne joue pas.

Rappelons la formule fondamentale d'Eddington donnant la puissance rayonnée:

$$L = \frac{4 \pi c G M \cdot (1 - \beta)}{k \eta} , \quad (2)$$

où k est le coefficient d'absorption de la matière, et où η a été défini par la relation:

$$\frac{L_r}{M_r} = \eta \frac{L}{M} ; \quad (3)$$

la solution polytropique donne à la périphérie $k\eta = \infty$, conclusion évidemment inacceptable. Rappelons aussi que la puissance rayonnée s'exprime comme suit en fonction de la température effective:

$$L = 4 \pi r_0^2 \cdot \sigma T_e^4 , \quad (4)$$

et que, d'autre part, la température effective est liée à celle de surface par l'égalité:

$$T_0 = 0,813 T_e . \quad (5)$$

Or T_e , qui correspond au flux observé, peut être estimée expérimentalement, par exemple par la voie spectrographique; T_e ne saurait être nulle, puisque l'étoile rayonne; il en est de même de T_0 . Nous pouvons donc dire qu'en tout cas, la solution polytropique ne peut pas être utilisée jusqu'au voisinage immédiat de la périphérie de l'étoile ¹.

Ainsi, si l'on accepte comme acquises les valeurs trouvées pour L , M , β , r_0 , T_e , ρ_c , T_c , P_c , il convient de rechercher maintenant jusqu'à quel point la distribution polytropique est valable.

On considère en général deux régions dans l'étoile: 1° la région centrale, de beaucoup la plus importante en étendue et en masse, avec des températures allant de plusieurs millions de degrés au centre, à 1 million de degrés à une certaine distance du centre; dans cette région, que l'on peut appeler « le noyau polytropique », on peut utiliser les propriétés simplifiées de la matière à ces énormes températures; 2° la région périphérique, entourant le noyau dont nous venons de parler, et où les températures vont de 1 million de degrés à T_0 ; à ces températures relativement basses, on sait beaucoup moins ce qui se passe dans la matière.

La table calculée par Emden pour le cas de l'équilibre polytropique de classe $n = 3$ montre qu'une température de l'ordre de $1.000.000^\circ$ est atteinte pour la valeur $\xi = 5$ de la variable radiale; et l'on constate qu'une sphère de rayon $\xi = 5$ contient les 99,13% de la masse totale de l'étoile; il suffit, pour s'en rendre compte, de considérer le tableau suivant, extrait de la table d'Emden:

ξ ($\sim r$)	$-\xi^2 \frac{d\psi}{d\xi}$ ($\sim Mr$)	ξ ($\sim r$)	$-\xi^2 \frac{d\psi}{d\xi}$ ($\sim Mr$)
0,0	0,0000	4,0	1,9197
0,5	0,0387	5,0	2,0007
1,0	0,2522	6,0	2,0156
2,0	1,0450	6,9	2,0182
3,0	1,6553	(limite)	

¹ En pratique, c'est la photosphère qui est considérée comme la surface de l'étoile, la chromosphère étant envisagée à part.

on en tire immédiatement:

$$\frac{M_{\xi=5}}{M} = \frac{2,0007}{2,0182} = 0,9913 .$$

Ainsi une sphère de rayon $r = 0,725 r_0$ contient presque toute la masse de l'étoile; c'est le noyau polytropique. La masse de la partie périphérique est inférieure à 1 pour 100 de la masse totale M . Dans cette région périphérique, il faut renoncer à appliquer la distribution polytropique; il faut trouver une autre loi, qui permette de distribuer les températures entre la sphère $\xi = 5$ et la surface de l'étoile, en respectant, cela va sans dire, la continuité de la pression et de la température pour $\xi = 5$. En désignant les valeurs de raccord par les lettres primées, on doit avoir:

$$\left\{ \begin{array}{l} T' = (0,11110) T_c , \\ \rho' = (0,00137) \rho_c , \\ P' = (0,0001523) P_c , \\ M' = (0,9913) M . \end{array} \right.$$

5. — *Région périphérique. Les équations du problème.* — On arrive à une solution, au moins approximative, en se basant sur la théorie de l'équilibre radiatif, celle-là même sur laquelle Eddington s'est appuyé dès 1916. Le principe n'en était d'ailleurs pas nouveau à cette époque, puisqu'on le rencontre déjà en 1906 dans un travail de K. Schwarzschild sur l'équilibre de l'atmosphère solaire.

Lorsqu'il s'agissait d'examiner uniquement la solution valable dans l'intérieur de la masse stellaire, on pouvait se contenter de mettre en jeu l'équation fondamentale du flux:

$$F_r = - \frac{4 \pi}{3 k \rho} \cdot \frac{dB}{dr} ,$$

où la fonction B n'est autre chose que l'intensité du rayonnement noir; c'est une fonction de la distance au centre ou, si l'on veut, de la température. C'est cette équation qui a conduit à la solution d'Eddington. Mais lorsqu'il s'agit d'étudier

l'équilibre de la couche périphérique, on a besoin de la théorie générale de l'équilibre radiatif, qui exige le maniement de deux autres équations importantes.

C'est E.-A. Milne qui s'est, le premier, dès 1921, occupé de résoudre *exactement* les équations de l'équilibre radiatif près de la frontière du corps. Il existait déjà des solutions approchées, telle celle de K. Schwarzschild, ou celle de W.-T. Humphreys, ou celle de J.-H. Jeans; mais ces solutions présentaient le défaut de ne pas fournir une valeur correcte pour le flux net d'énergie à la frontière. C'est Milne qui s'est, le premier, avisé de chercher une formule fournissant ce flux net correct à la surface de l'étoile. Après lui, d'autres auteurs ont proposé des solutions approchées un peu différentes, mais tendant toutes à satisfaire à l'exigence du flux de surface.

Nous nous bornons à donner, ci-après, les équations auxquelles il s'agit d'obéir, les équations fondamentales de l'équilibre radiatif.

1° L'équation de transfert d'énergie, avec l'approximation des corps gris

$$\frac{d\mathcal{J}}{ds} = -k\rho(\mathcal{J} - B) , \quad (6)$$

où $\mathcal{J}$ est l'intensité du rayonnement considéré et ds l'épaisseur de la couche matérielle traversée.

2° L'égalité donnant la densité d'énergie

$$u = \frac{1}{c} \int \mathcal{J} \cdot d\omega , \quad (7)$$

où l'intégrale est étendue à l'angle solide entier.

3° L'équation de l'équilibre radiatif:

énergie émise — énergie absorbée = énergie libérée ,

$$4\pi k B - k \int \mathcal{J} \cdot d\omega = 4\pi\varepsilon , \quad (8)$$

en désignant par $4\pi\varepsilon$ le taux de l'énergie libérée par unité de

masse et par seconde. Cette équation peut s'écrire aussi comme suit :

$$B - \frac{c\mathcal{U}}{4\pi} = \frac{\varepsilon}{k} . \quad (9)$$

4° L'égalité générale donnant le flux net :

$$F = \int \mathcal{J} \cdot \cos \theta \cdot d\omega , \quad (10)$$

où θ est l'angle formé par la direction de l'intensité $\mathcal{J}$ avec la normale à un élément de surface. L'expression donnée plus haut pour F_r est une valeur approchée de (10).

5° L'expression de la pression de radiation :

$$p' = \frac{1}{3} \cdot \mathcal{U} = \frac{1}{3c} \int \mathcal{J} \cdot d\omega . \quad (11)$$

L'intensité est évidemment fonction de θ et de la température, ou si l'on veut du rayon. Pour effectuer le calcul, on change d'ailleurs de variable; et, à la place de r , on introduit ce qu'on appelle l'opacité τ , définie par l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} d\tau &= k\rho ds , \\ \tau &= \int_0^s k\rho ds . \end{aligned} \quad (12)$$

L'intensité est alors une fonction $\mathcal{J}(\tau, \theta)$ de τ et de θ , la fonction B devient $B(\tau)$, et l'équation de transfert d'énergie s'écrit :

$$\frac{d\mathcal{J}}{d\tau} \cdot \cos \theta = B - \mathcal{J} . \quad (14)$$

Il saute aux yeux que tout revient dès lors à déterminer la fonction $B(\tau)$; sa connaissance entraînera celle des autres quantités utiles; et l'on en déduira la distribution des températures T ; on a en effet :

$$B(\tau) = \frac{\sigma}{\pi} T^4 \quad (15)$$

6. — *Solution approchée.* — La solution complète de l'équation (14) de transfert s'écrit comme suit, la frontière de l'étoile étant caractérisée par la condition $\tau = 0$:

$$\mathcal{J}(\tau, \theta) = \int_0^\tau B(t) \cdot e^{(t-\tau)\sec\theta} \sec\theta \cdot dt + \mathcal{J}(0, \theta) \cdot e^{-\tau\sec\theta}, \quad (16)$$

où τ prend des valeurs négatives, puisqu'on pénètre sous la surface du corps. La quantité $\mathcal{J}(0, \theta)$ qui figure dans le terme intégré peut être connue par l'observation. Lorsqu'on étudie, en effet l'intensité de la radiation issue d'un point quelconque du disque solaire en direction de l'observateur, on constate que cette intensité varie avec la distance au centre du disque; le bord du disque paraît assombri; et la loi de cet assombrissement est la suivante ¹:

$$\frac{\mathcal{J}(0, \theta)}{\mathcal{J}(0, 0)} = \frac{14}{41} + \frac{27}{41} \cos\theta,$$

dont les coefficients résultent des mesures faites; $\mathcal{J}(0, 0)$ est l'intensité au centre du disque, et l'on a:

$$\mathcal{J}(0, 0) = \frac{41}{32} \mathcal{F},$$

où $\mathcal{F}$ désigne ce qu'on appelle l'intensité moyenne équivalente, définie par l'égalité $F = \pi\mathcal{F}$, où F est le flux total de surface $F = \sigma T_e^4$. On a alors:

$$\pi\mathcal{F} = F = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{J}(0, \theta) \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta \cdot d\theta,$$

c'est-à-dire, grâce à la loi d'assombrissement:

$$\mathcal{F} = \mathcal{J}(0, 0) \cdot \frac{32}{41};$$

on a donc finalement:

$$\mathcal{J}(0, \theta) = \frac{7}{16} \mathcal{F} + \frac{27}{32} \mathcal{F} \cdot \cos\theta, \quad (17)$$

¹ G. TIERCY, *L'équilibre radiatif dans les étoiles*. Paris, 1935, p. 408.

où $\mathcal{F}$ est connue; c'est là une valeur due à l'observation du disque solaire; elle reste évidemment valable pour représenter la variation de l'intensité en fonction de θ dans le cas qui nous occupe.

Si l'on suppose que la fonction $B(t)$ est développable en série suivant les puissances croissantes de t , on obtient, en abandonnant la dérivée seconde $B''(\tau)$ dont la valeur est négligeable devant $B(\tau)$:

$$\left\{ \begin{aligned} \mathcal{J}(\tau, \theta) &= B(\tau) \cdot [1 - e^{-\tau \sec \theta}] + \cos \theta \cdot B'(\tau) \cdot [-1 + e^{-\tau \sec \theta} (\tau \sec \theta + 1)] \\ &+ \mathcal{J}(0, \theta) \cdot e^{-\tau \sec \theta} ; \end{aligned} \right. \quad (18)$$

cette égalité se réduit à $\mathcal{J}(0, \theta) = \mathcal{J}(0, \theta)$, même si $B'(\tau)$ contient un terme en $\text{Log}(-\tau)$; mais si $B''(\tau)$ est pratiquement nul, on a aussi:

$$B(\tau) = a_1 + a_2 \tau ;$$

il vient:

$$\mathcal{J}(\tau, \theta) = B(\tau) - \cos \theta \cdot B'(\tau) + e^{-\tau \sec \theta} [-a_1 + a_2 \cos \theta + \mathcal{J}(0, \theta)] ; \quad (19)$$

et l'on voit que si l'on écrit ¹:

$$B(\tau) = \frac{7}{16} \mathcal{F} - \frac{27}{32} \mathcal{F} \cdot \tau , \quad (20)$$

l'intensité se réduit à:

$$\mathcal{J}(\tau, \theta) = B(\tau) - \cos \theta \cdot B'(\tau) = a_1 + a_2 \tau - a_2 \cos \theta . \quad (21)$$

Si l'on admet que (20) est valable à la surface, on vérifie aisément qu'elle fournit le flux net correct de surface $F = \pi \mathcal{F}$.

Une expression linéaire telle que (20) a été souvent utilisée. Malheureusement, cette expression donne aussi:

$$B'(\tau) = -\frac{27}{32} \mathcal{F} = \text{const.} ;$$

et si cette valeur constante négative peut être admise pour l'intérieur de la masse, elle ne convient plus pour la dernière

¹ G. TIERCY, *loc. cit.*, p. 385.

pellicule de surface; on tire en effet de (15), (20) et de $F = \pi \mathcal{P} = \sigma T_e^4$:

$$T^4 = \frac{7}{16} T_e^4 \left(1 - \frac{27}{14} \tau \right), \quad (22)$$

$$\tau = \int_{r_0}^r k \rho dr ;$$

la distribution (22) des températures sera connue dès qu'on aura calculé les opacités τ ; pour cela, on sait que ¹:

$$k = \frac{k_1}{\mu} \cdot \frac{\rho}{T^{7/2}},$$

où

$$\frac{k_1}{\mu} = (11,82) \cdot 10^{26} ;$$

on montre alors qu'en fonction des variables ξ et ψ d'Emden, on a pour τ (mais ce ne peut être qu'une première approximation):

$$\tau = (1,3) \cdot 10^{12} \int_{\xi_0}^{\xi} \psi^{\frac{5}{2}} \cdot d\xi ; \quad (23)$$

on a ainsi les valeurs approchées de τ correspondant à chaque ξ , c'est-à-dire à chaque valeur du rayon; il n'y a plus qu'à porter ces valeurs dans (22) pour obtenir la distribution des températures. C'est là le calcul que nous avons fait précédemment pour établir le raccord entre la température $T' = 10^6$ correspond à $\xi = 5$ et la température T_0 de surface, calcul qui appelle d'ailleurs une correction ². Cette distribution (après mise au point) montre que la température baisse brusquement dans la dernière pellicule de surface, celle qui va de $\xi = 6,886$ à $\xi_0 = 6,888$, ou encore de $-\tau = 15$ à $\tau = 0$. Cela revient à dire que la dérivée de $B(\tau)$ doit prendre une valeur négative très grande pour $\tau = 0$. C'est là un point que Milne avait

¹ G. TIERCY, *loc. cit.*, p. 382.

² G. TIERCY, *loc. cit.*, p. 383-387.

déjà signalé, en proposant d'ajouter à $B(\tau)$ un terme en $\tau \text{ Log } \tau$, qui est nul pour $\tau = 0$, et dont la dérivée devient simultanément infinie négative.

7. — *Solution plus approchée.* — Il s'agit donc de voir si une expression comme:

$$B(\tau) = a_1 + a_2\tau + A\tau \text{ Log } \left(\frac{-\tau}{15}\right) \quad (24)$$

est convenable. Nous avons mis le dénominateur 15 au dernier terme afin que le Log devienne négatif dès que $-\tau < 15$.

Remarquons d'abord que l'égalité (18) peut s'écrire comme suit:

$$\left\{ \begin{aligned} \mathcal{J}(\tau, \theta) &= B(\tau) - \cos \theta \cdot B'(\tau) \\ &+ e^{-\tau \sec \theta} [-B(\tau) + (\tau + \cos \theta) \cdot B'(\tau) + \mathcal{J}(0, \theta)] ; \end{aligned} \right. \quad (25)$$

or, quel que soit τ ou θ , l'intensité $\mathcal{J}(\tau, \theta)$ ne saurait jamais devenir infinie; l'expression (25) contient le facteur $e^{-\tau \sec \theta}$ gênant pour $\theta = \frac{\pi}{2}$; il convient de se débarrasser de cet inconvénient; nous simplifierons l'expression (25) qui, d'ailleurs, n'est qu'approchée, en remplaçant l'exponentielle par l'unité, ce qui fait disparaître plusieurs termes; il reste:

$$\mathcal{J}(\tau, \theta) = \tau \cdot B'(\tau) + \mathcal{J}(0, \theta), \quad (26)$$

où $\mathcal{J}(0, \theta)$ est donnée par (17). Telle est la forme approchée dont nous nous servons; le premier terme sera nul pour $\tau = 0$, même si $B'(\tau)$ contient un terme en $\text{Log } (-\tau)$.

Adoptons maintenant l'expression (24) de $B(\tau)$, et supposons $A = \text{const.}$, pour la partie périphérique du corps; on a:

$$B'(\tau) = a_2 + A \left[1 + \text{Log } \left(\frac{-\tau}{15} \right) \right]; \quad (27)$$

d'où pour l'intensité:

$$\mathcal{J}(\tau, \theta) = B(\tau) + A\tau - a_2 \cos \theta;$$

et si A est très petit à côté de a_2 :

$$\mathcal{J}(\tau, \theta) = a_1 + a_2\tau + A\tau \text{ Log } \left(\frac{-\tau}{15} \right) - a_2 \cos \theta. \quad (28)$$

On trouve le même résultat en portant directement l'expression (24) dans (16), et en faisant ensuite les simplifications que nous avons faites à partir de (25); mais le calcul est plus long.

Pour savoir si cette expression peut être retenue, il faut tenir compte du fait que, près de la surface, on a $\varepsilon = 0$; la matière stellaire ne libère plus aucune énergie; elle ne fait que transmettre celle-ci; de sorte que l'équation fondamentale (8) de l'équilibre radiatif s'écrit:

$$4\pi B = \int \mathcal{J}(\tau, \theta) \cdot d\omega ,$$

ou bien:

$$B(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^\pi \mathcal{J}(\tau, \theta) \cdot \sin \theta \cdot d\theta ; \quad (29)$$

cette égalité est visiblement satisfaite par l'expression approchée (28) de l'intensité.

L'expression (24) peut donc être admise; et c'est elle qui réglera la distribution des températures. Cette valeur de $B(\tau)$ répond bien aux conditions suivantes, qu'il était nécessaire de vérifier:

1^o Valeur de $B(\tau)$ pour $\tau = 0$. On obtient:

$$B(0) = a_1 = \frac{7}{16} \mathcal{F} .$$

2^o Valeur de $B'(\tau)$ pour $\tau = 0$. En donnant à A , pour la pellicule de surface, une valeur positive, d'ailleurs très petite devant a_1 et a_2 , on trouve:

$$B'(0) = -\infty .$$

3^o L'équation de l'équilibre radiatif strict (29) est vérifiée.

4^o Il est facile d'établir le raccord entre la pellicule de surface, pour laquelle nous poserons $-\tau \leq 30$, et dans laquelle l'expression (24) est prise avec $A =$ constante positive, et la partie plus profonde de la masse. Il suffit de prendre encore, dans celle-ci, l'égalité (24), en y considérant A comme une fonction de τ ; cela revient, en somme, à imaginer que l'étoile

est divisée en un grand nombre de couches minces sphériques concentriques, dans chacune desquelles le facteur A prend une valeur numérique déterminée.

On sait que la pellicule extérieure, dans laquelle se produit une chute brusque de température à l'approche de la surface, correspond aux valeurs de $(-\tau)$ comprises entre 0 et 15, domaine pour lequel la variable ξ d'Emden varie de 6,888 à 6,886. On considérera donc A comme fonction de τ en dedans de la sphère $\xi = 6,886$, c'est-à-dire pour $-\tau > 15$, ou plutôt, comme nous l'avons dit, pour $-\tau > 30$. On constate de suite que si l'on admet pour le nombre A la loi de variation suivante, où C est une constante:

$$A = \frac{C}{\tau \operatorname{Log} \left(\frac{-\tau}{15} \right)}, \quad (-\tau > 30), \quad (30)$$

l'expression (24) donnant $B(\tau)$ devient plus simplement:

$$B(\tau) = a_1 + a_2 \tau + C = (a_1 + C) + a_2 \tau, \quad (31)$$

expression linéaire que l'on utilisera en dessous de la pellicule de surface. Pour $-\tau = 30$, on a:

$$A_{30} = -\frac{C}{30 \operatorname{Log} 2}; \quad (32)$$

et c'est cette valeur constante qu'on gardera dans la formule (24) à travers la pellicule extrême. Comme cette valeur doit être positive, afin que $B'(0)$ soit infinie négative, on voit que la constante C est négative, d'ailleurs très petite en valeur absolue, aussi petite qu'on voudra.

Dans cette partie de l'étoile comprise entre $\xi = 5$ et $\xi = 6,886$, on a donc $B(\tau)$ donnée par (31); l'égalité (28) donne alors pour l'intensité:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\tau, \theta) &= a_2 \tau + \mathcal{J}(0, \theta) + C \\ \mathcal{J}(\tau, \theta) &= (a_1 + C) + a_2 \tau - a_2 \cos \theta, \end{aligned}$$

valeur qui, portée dans (29), donne pour $B(\tau)$:

$$B(\tau) = a_1 + a_2 \tau + C;$$

on retrouve donc (31), ce qui signifie que l'équation de l'équilibre radiatif strict reste vérifiée.

8. — *Distribution de la température.* — Pour fixer les idées, faisons $C = -1$; on a:

$$B(\tau) = \frac{7}{16} \mathcal{F} - \frac{27}{32} \mathcal{F} \cdot \tau - 1 ;$$

d'où la distribution des températures:

$$T^4 = \frac{7}{16} T_e^4 \left[1 - \frac{27}{14} \tau - \frac{16}{7} \cdot \frac{\pi}{\sigma T_e^4} \right], \quad (33)$$

puisque $\mathcal{F} = \frac{\sigma}{\pi} T_e^4$; cette expression (33), dans laquelle le dernier terme du crochet est très petit et pratiquement négligeable devant l'unité, est valable pour $-\tau > 30$, avec $\varepsilon = 0$. Dans la pellicule de surface, où il faut appliquer la formule (24), avec $A_{30} = \frac{1}{30 \text{ Log } 2}$, on trouve:

$$B(\tau) = \frac{7}{16} \mathcal{F} - \frac{27}{32} \mathcal{F} \cdot \tau + A_{30} \tau \text{ Log} \left(\frac{-\tau}{15} \right) ;$$

$$T^4 = \frac{7}{16} T_e^4 - \frac{27}{32} T_e^4 \cdot \tau + \frac{\pi A_{30}}{\sigma} \cdot \tau \text{ Log} \left(\frac{-\tau}{15} \right) ;$$

$$T^4 = \frac{7}{16} T_e^4 \left[1 - \frac{27}{14} \tau + \frac{16}{7} \cdot \frac{\pi}{\sigma T_e^4} \cdot A_{30} \tau \text{ Log} \left(\frac{-\tau}{15} \right) \right] . \quad (34)$$

On trouve ainsi, entre la limite $\xi' = 5$ du noyau polytropique et la surface de l'étoile, la distribution numérique que voici, pour une température centrale $T_c \sim 10^7$ et $T_e = 5200^\circ$:

ξ	T
5,00	$\sim 10^6$
5,50	760.000°
6,00	480.000°
6,50	225.000°
6,80	58.000°
6,876	15.000°
6,886	9.700°
6,888	$T_s = 4.230$

9. — *Remarques.* — Faisons encore quelques remarques sur les solutions admises ci-dessus pour $B(\tau)$ et $\mathcal{J}(\tau, \theta)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{J}(\tau, \theta) = \tau B'(\tau) + \mathcal{J}(0, \theta) \\ \qquad \qquad \qquad = a_1 + a_2 \tau + A \tau \operatorname{Log}(-\tau) - a_2 \cos \theta ; \\ B(\tau) = a_1 + a_2 \tau + A \tau \operatorname{Log}(-\tau) ; \end{array} \right. \quad (35)$$

dans la couche périphérique, on a $A = A_{30} = \frac{1}{30 \operatorname{Log} 2}$; pour $-\tau > 30$, il vient $A \tau \operatorname{Log}(-\tau) = C = -1$.

Dans l'un et l'autre cas, l'équation (29) de l'équilibre radiatif parfait est vérifiée.

Par contre, l'équation de transfert d'énergie ne l'est pas toujours; elle l'est dans l'intérieur, pour $-\tau > 30$, puisque $B(\tau)$ prend la forme linéaire (31):

$$B(\tau) = (a_1 + C) + a_2 \tau = (a_1 - 1) + a_2 \tau ;$$

tandis que $\mathcal{J}(\tau, \theta)$ s'écrit:

$$\mathcal{J}(\tau, \theta) = (a_1 + C) + a_2 \tau - a_2 \cos \theta = (a_1 - 1) + a_2 \tau - a_2 \cos \theta ;$$

il vient:

$$\frac{d\mathcal{J}}{d\tau} \cdot \cos \theta = a_2 \cos \theta = B - \mathcal{J} .$$

Par contre, l'équation de transfert n'est pas vérifiée pour $-\tau \leq 30$, car nous n'avons alors gardé pour $\mathcal{J}(\tau, \theta)$ qu'une forme simplifiée de la solution complète de l'équation. Pourtant l'équation de l'équilibre radiatif est satisfaite, et c'est là l'essentiel. Dans cette pellicule de surface, il semble que l'équation de transfert (14) ne puisse plus être appliquée. L'intensité $\mathcal{J}(\tau, \theta)$ ne saurait devenir infinie, pas davantage que $B(\tau)$; le second membre de (14) ne peut donc pas prendre une valeur infinie, alors que la dérivée de $\mathcal{J}$ par rapport à τ doit prendre, comme celle de B , une valeur négative très grande pour $\tau = 0$. Cette difficulté provient du fait que l'équation (14) a été établie pour l'intérieur de la masse, où les variations sont pour ainsi dire régulières; on y a posé que l'intensité varie de la quantité $d\mathcal{J}$ en traversant un élément de longueur ds :

$$d\mathcal{J} = -k\rho\mathcal{J} \cdot ds + j \cdot \rho ds , \quad \text{où } j = kB(\tau) .$$

Cette égalité n'est plus satisfaisante à la frontière. Mais ce détail ne présente en somme que peu d'importance; l'essentiel est de satisfaire à la condition de l'équilibre radiatif parfait et d'avoir obtenu une fonction $B(\tau)$ restant finie pour $\tau = 0$, tout en présentant une dérivée infinie négative au même moment.

En ce qui concerne la région — $\tau > 30$, les deux équations y sont toujours vérifiées par la fonction (24) ou (31); comme celle-ci est encore valable à la surface, on peut dire que la solution est satisfaisante.

RÉSUMÉ.

Les quatre premiers numéros de l'article donnent un aperçu des premières recherches relatives au problème de la distribution des températures; ils rappellent notamment les travaux de Homer Lane, de T.-J. See, de P. Rudzki, de R. Emden, pour arriver au fameux mémoire de C. Bialobrzski qui, en 1913, introduisait la pression de radiation dans les équations de l'équilibre stellaire. La solution donnée par Bialobrzski, puis en 1916 par Eddington, s'applique à ce qu'on appelle le « noyau polytropique » de l'étoile.

La région périphérique doit être traitée séparément; les derniers numéros lui sont consacrés. Ils rappellent les équations fondamentales de l'équilibre radiatif, et en donnent une solution approchée qui paraît satisfaisante, et qui conduit à une distribution des températures dans cette partie du corps entourant le noyau.