

# Recherches sur diverses échelles d'index de couleur absolus des étoiles

Autor(en): **Rossier, Paul**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Archives des sciences physiques et naturelles**

Band (Jahr): **21 (1939)**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-742210>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Recherches sur diverses échelles d'index de couleur absolus des étoiles

PAR

**Paul ROSSIER**

---

## AVANT PROPOS.

Le présent travail constitue une suite et un complément à divers mémoires antérieurs: à l'époque où nous les préparions, Blecksley, de l'Université de Johannesburg, reprenait et complétait les recherches d'Eddington en ces matières et calculait de nouvelles tables pour la réduction bolométrique des magnitudes visuelles.

Le procédé de calcul de Blecksley consiste en une intégration numérique assez touffue et pénible. Le nôtre, au contraire, basé sur l'hypothèse dite des « courbes de sensibilité », est plus rapide et d'un emploi plus commode, mais sa précision risque d'être moindre que celle de l'intégration numérique.

En 1938, lors d'un voyage en Europe, Blecksley créa l'occasion d'une rencontre où nous discutâmes les avantages réciproques des deux procédés de calcul. Il fut convenu que la méthode des courbes de sensibilité serait appliquée aux données du calcul de Blecksley, afin de permettre une comparaison précise des deux procédés. Telle est l'origine de la présente étude. On y constatera que la précision des résultats est telle que l'avantage de la méthode des courbes de sensibilité est entier.

L'étude systématique de l'échelle Blecksley nous a conduit à préciser d'anciens calculs relatifs à d'autres tables.

## I. INTRODUCTION.

1. — Nous appelons index absolu d'une étoile, relatif à un récepteur donné, la différence entre la magnitude bolométrique de cette étoile et celle relative au récepteur considéré. Dans le même sens, on utilise aussi les termes d'index de chaleur, index calorifique ou correction bolométrique.

La détermination expérimentale d'une magnitude bolométrique est presque impossible dans l'état actuel de la technique photométrique: les récepteurs thermiques affectés à cet usage sont trop peu sensibles. Par contre, le calcul de l'index absolu est possible dès que l'on dispose de renseignements suffisants sur le récepteur (atmosphère, optique, œil...). Connaissant la magnitude visuelle, on en peut déduire la magnitude bolométrique, grandeur essentielle dans les études stellaires.

Plusieurs auteurs se sont occupés de ce problème et ont employé des méthodes variées pour le résoudre. En général, ils ont admis les valeurs trouvées par les psycho-physiciens pour la sensibilité spectrale de l'œil, et, par divers artifices, intégrations numériques, hypothèses simplificatrices sur cette sensibilité, remarques accidentelles judicieuses, extrapolations plus ou moins hasardeuses, il a été possible de calculer des échelles d'index absolus.

En ces matières, nombreuses sont les difficultés. Comment choisir les valeurs de la sensibilité à introduire dans les calculs ? Quelles sont les limites d'intégration à imposer ? Les étoiles peuvent-elles être considérées comme des radiateurs intégraux ? Dans le cas affirmatif, doit-on appliquer l'équation spectrale de Planck ou celle de Wien constitue-t-elle une approximation suffisante ou plutôt jusqu'à quelle température l'emploi de celle-ci est-il justifié ?

La méthode consistant à traiter ces problèmes par des méthodes d'intégration graphique ou numérique conduit à de longs calculs, dont il est difficile de déduire des lois simples et générales. Au contraire, en partant d'une hypothèse précise sur les propriétés des récepteurs, on obtient des résultats qui

n'embrassent peut-être pas toute la complexité des faits réels, mais on rend possible une discussion précise.

Il semble que le premier essai d'introduire cette dernière méthode dans les recherches astrophysiques est dû à Russel, dans sa théorie de l'index de couleur<sup>1</sup>. L'hypothèse de Russel consiste à admettre que la sensibilité d'un récepteur, de l'œil, par exemple, est nulle, sauf pour une longueur d'onde unique. Utile comme première hypothèse de travail, cette supposition de la sensibilité concentrée, conduit, dès qu'on la pousse un peu, à des résultats absurdes. Par exemple, toutes les étoiles auraient même couleur, celle correspondant à la longueur d'onde du maximum de sensibilité. C'est dire que l'hypothèse de la sensibilité concentrée est trop étroite et qu'elle doit être assouplie.

On peut essayer, comme Armellini<sup>2</sup>, de faire intervenir la longueur d'onde effective. Cette grandeur varie peu avec le type spectral de l'étoile, donc avec la température. Armellini admet la constance de la longueur d'onde effective. On peut montrer que, dans le fond, cette hypothèse est identique à celle de la sensibilité concentrée de Russel<sup>3</sup>.

Un autre artifice est le suivant. On détermine expérimentalement une relation donnant la brillance visuelle de l'unité d'aire d'un corps noir en fonction de la température. Nous avons étudié ailleurs trois applications de cette méthode dues à Hertzsprung, à Fabry et à Wensel, Roeser, Barbrow et Caldwell<sup>4</sup>. Les résultats intéressant l'astrophysique sont toujours obtenus par une extrapolation portant sur la température. Jusqu'où celle-ci peut-elle être poussée ? Parfois la forme même de la fonction brillance visuelle fournit une limite supérieure d'emploi d'une expression empirique donnée. Est-ce à dire

<sup>1</sup> RUSSEL, DUGAN, STEWART, *Astronomy*, II, p. 733.

<sup>2</sup> ARMELLINI, *Trattato di astronomia siderale*, I, p. 175.

<sup>3</sup> P. ROSSIER, Etude sur quelques formules relatives au rayonnement et leurs applications astronomiques. *Archives* (5), 19, 1937, p. 77, cité dans la suite « Formules ».

Sur l'identité des théories de l'index de couleur de MM. Russel et Armellini. *C. R. de la Soc. de physique et d'histoire naturelle*, Genève, 55, I, p. 49, 1938; *Archives* (5) 20. suppl. 49 (1938).

<sup>4</sup> P. ROSSIER, Formules..., *loc. cit.*

qu'on soit fondé de pousser l'extrapolation jusque là ? Seule l'expérience permettrait de l'affirmer, et elle s'avère impossible car nous ne savons pas réaliser dans nos laboratoires des températures aussi élevées que celles appartenant au domaine astronomique.

D'autre part, la plupart des recherches photométriques de laboratoire sont effectuées sur des plages, car on obtient ainsi plus de précision. Les recherches astronomiques portent souvent sur des points lumineux. Il ne semble pas qu'une critique d'ensemble des deux procédés ait été faite et qu'on ait prouvé que les résultats obtenus par une méthode sont applicables à des travaux effectués au moyen de l'autre.

Rappelons l'existence du phénomène de Macé de Lépinay et Nicati: la longueur d'onde du maximum de sensibilité de l'œil n'est pas la même dans la fovea, où il n'y a que des cônes, et pour le reste de la rétine, occupé essentiellement par des bâtonnets. Les résultats des mesures photométriques varient avec les dimensions des plages utilisées. Bender a trouvé que le maximum de sensibilité passe de 550  $m\mu$  dans la tache jaune, à 520  $m\mu$  au bord d'un champ de 20° centré sur la fovea<sup>1</sup>.

Avant d'aborder l'étude des procédés basés sur l'application de certaines hypothèses relatives à la sensibilité spectrale de l'œil, remarquons que, pour donner satisfaction, une fonction donnant cette sensibilité doit contenir au moins deux paramètres. Excluons le cas des récepteurs bolométriques. La sensibilité est nulle, ou très petite pour les longueurs d'onde extrêmes. La courbe de sensibilité doit présenter un maximum au moins. Bornons-nous au cas où ce maximum est unique, comme cela est le cas pour l'œil normal. La longueur d'onde correspondant à ce maximum est une des caractéristiques du récepteur. C'est celle considérée par Russel. Mais elle ne suffit

<sup>1</sup> H. BENDER, Untersuchungen am Lummer-Pringsheimschen Spektralflickerphotometer, Inauguraldissertation 1913, cité par J. WILSING, Messungen der Farben, der Helligkeit und der Durchmesser der Sterne mit Anwendung der Plankschen Gleichung. *Publikationen des Astrophysikalischen Observatorium zu Potsdam*, 76, vol. 24, 3 (1920), p. 16.

pas pour définir suffisamment bien l'appareil considéré. Si l'on esquisse diverses courbes de sensibilité déterminées expérimentalement, on constate que certaines d'entre elles ont un maximum très aigu; d'autres, au contraire, sont beaucoup plus plates. Dans les calculs, il faudra faire intervenir une deuxième constante: l'acuité du maximum de sensibilité. Nulle dans le cas du récepteur bolométrique, cette acuité est infinie dans l'hypothèse de la sensibilité concentrée.

Reste maintenant à trouver une forme analytique appropriée à la fonction sensibilité. Il faut qu'elle permette d'exprimer numériquement l'acuité. Il est désirable, pour les applications numériques, que son introduction dans certaines intégrales ne conduise pas à des difficultés analytiques trop considérables. Ives a proposé l'expression suivante<sup>1</sup>:

$$\sigma(\lambda) = \left( \frac{\lambda_s}{\lambda} e^{1 - \frac{\lambda_s}{\lambda}} \right)^a .$$

La signification des constantes est très simple;  $\lambda_s$  est la longueur d'onde du maximum de sensibilité et  $a$  est l'acuité de ce maximum.

Dans deux mémoires antérieurs, nous avons traité le problème de l'index absolu dans l'hypothèse de la validité de la fonction  $\sigma(\lambda)$  pour représenter la sensibilité spectrale de l'œil, tout d'abord en admettant l'équation spectrale de Wien, puis en calculant la correction à apporter pour tenir compte de la formule de Planck<sup>2</sup>.

2. — *Théorie de première approximation.* — Rappelons quelques résultats discutés en détail dans un mémoire antérieur<sup>3</sup>.

<sup>1</sup> IVES, Studies in the Photometry of Light on Different Colours. *Philosophical Magazine*, VI, 24, 1912.

<sup>2</sup> P. ROSSIER, Sensibilité spectrale des récepteurs d'énergie rayonnante, applications astronomiques et industrielles. *Archives* (5), vol. 17, 1934-35; *Publications de l'Observatoire de Genève*, fasc. 27-29.

Sensibilité spectrale des récepteurs d'énergie rayonnante, II. *Archives* (5), 18, 1936; *Publications de l'Observatoire de Genève*, fasc. 32-33.

Les renvois à ces deux mémoires seront notés respectivement (I, ...); (II, ...).

<sup>3</sup> (I, §§ 18-23).

Admettons que le rayonnement d'une étoile soit donné par l'équation spectrale de Wien:

$$E(\lambda, T) = C\lambda^{-5} e^{-\frac{b}{\lambda T}},$$

où  $b = 1,432 \text{ cm} \times \text{degré}$ ,  $\lambda$  est la longueur d'onde et  $T$  la température. On trouve pour l'index absolu <sup>1</sup>.

$$I = 10 \log T + 2,5(a + 4) \log \left( a\lambda_s + \frac{b}{T} \right) - \varepsilon.$$

$\varepsilon$  est une constante d'étalonnage.

On démontre facilement les propriétés suivantes: <sup>2</sup>

L'index absolu varie de  $+\infty$  à  $+\infty$  lorsque la température  $T$  passe de 0 à  $+\infty$ . Il possède un minimum unique, correspondant à la température

$$T_m = \frac{b}{4\lambda_s}.$$

Cette température est les cinq quarts de celle d'un radiateur intégral qui aurait son maximum d'émission pour la longueur d'onde du maximum de sensibilité du récepteur.

L'index absolu présente une inflexion unique, pour la température

$$T_i = T_m \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4}{a}} \right).$$

Cette température est sensiblement égale au double de celle du minimum.

Démontrons une formule nouvelle qui nous sera utile par la suite. Calculons la dérivée  $\frac{dI}{dT_i}$  pour la valeur de la température correspondant à l'inflexion. On a

$$\frac{dI}{dT} = 1,08574 \frac{a(4\lambda_s T - b)}{(a\lambda_s T + b)T},$$

$$T_i = \frac{b}{4\lambda_s} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4}{a}} \right).$$

<sup>1</sup> (I, § 18).

<sup>2</sup> (I, §§ 18-23).

Remplaçons, il vient

$$\frac{dI}{dT_i} = \frac{4 \cdot 1,08574}{\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{a}}\right)^2 T_m} < \frac{1,08574}{T_m}.$$

Pour que la théorie précédente soit applicable en toute rigueur à la région de l'inflexion, il faut que l'inégalité ci-dessus soit satisfaite. Si l'on peut déterminer la pente de la courbe à l'inflexion, il est facile de calculer l'acuité  $a$ . Pour cela, posons

$$\sqrt{1 + \frac{4}{a}} = 1 + x \quad \text{ou} \quad a = \frac{4}{x(x+2)};$$

$$x = \frac{2,08397}{\sqrt{T_m \frac{dI}{dT_i}}} - 2.$$

Ce procédé de détermination de l'acuité est peu précis, mais il est parfois commode pour trouver une valeur de première approximation.

3. — *Correction Wien-Planck.* — L'équation spectrale de Wien donne des résultats satisfaisants tant que le produit  $\lambda T$  est suffisamment petit. Elle est insuffisante pour les étoiles chaudes, pour lesquelles il est préférable d'avoir recours à la formule de Planck. L'intégration n'est alors plus possible au moyen des fonctions élémentaires. La magnitude est donnée par une série, qui, limitée à son premier terme, n'est autre que l'expression donnée par l'équation spectrale de Wien.

La théorie précédente peut donc être considérée comme une première approximation à laquelle il faut apporter une correction. Celle-ci est donnée par la série précédente, prise à partir de son second terme.

Le calcul donne les expressions suivantes, avec des notations évidentes: <sup>1</sup>

$$I_p = I_w - \Delta m,$$

$$\Delta m = 2,5 \log \left( 1 + \sum_{i=2}^{\infty} u_i \right), \quad u_i = \frac{\nu_i}{\nu_1},$$

$$\nu_i = \left( 1 + i \frac{b}{a \lambda_s T} \right)^{-a-4}.$$

<sup>1</sup> (II, § 2).



La série converge relativement rapidement, pas suffisamment cependant pour qu'il ne soit pas nécessaire de prendre plusieurs termes dans le cas des étoiles chaudes. La correction  $\Delta m$  est généralement petite. Elle ne joue de rôle important que pour les étoiles très chaudes, pour lesquelles elle peut atteindre quelques dixièmes de magnitude. La correction Wien-Planck ne modifie pas sensiblement l'allure de la courbe représentant la variation de l'index absolu en fonction de la température, du moins dans la région physiquement utile.

La variation de la correction Wien-Planck en fonction de la température est représentée par une courbe ayant l'allure d'un signe  $f$ : elle croît et présente une inflexion qui fait passer la concavité du côté des  $\Delta m$  positifs pour les températures basses, à celui des  $\Delta m$  négatifs, pour les étoiles chaudes. L'inflexion a lieu pour des températures de l'ordre de 2,5 fois celle du minimum de l'index absolu.

La correction Wien-Planck croît avec l'acuité, du moins pour les valeurs qui intéressent la photométrie pratique. Admettons que l'acuité est infinie, la sensibilité étant concentrée sur la longueur d'onde  $\lambda_s$ : la correction peut être alors mise sous la forme élémentaire

$$\Delta m = - 2,5 \log \left( 1 - e^{-\frac{b}{\lambda_s T}} \right).$$

Cette expression donne une valeur approximative par excès, pratiquement suffisante dans la majorité des cas. Donnons quelques chiffres. Pour l'œil on peut poser  $\lambda_s = 5,5 \times 10^{-5}$  cm. Quant à l'acuité elle est de l'ordre de la centaine. Faisons le calcul avec  $a = 50$  et  $a = 100$ . On trouve les valeurs du tableau I.

TABLEAU I.  
*Correction Wien-Planck en fonction de la température T  
et de l'acuité a.*

T	a = 50	a = 100	a = ∞
5000	0,01	0,01	0,01
10000	0,08	0,08	0,08
15000	0,20	0,20	0,21
20000	0,33	0,34	0,35
25000	0,44	0,46	0,48

Au-dessous de 20000°, la valeur approximative obtenue en posant l'infinité de l'acuité est correcte au centième de magnitude près. A 25000° la différence porte sur les centièmes. Au delà, elle croît, mais l'incertitude qui pèse sur les températures est alors telle qu'il est inutile d'insister. Nous admettrons donc les valeurs de la correction données par l'hypothèse de l'acuité infinie.

4. — *Etude d'une échelle d'indices absolus.* — Nous nous proposons de confronter la théorie précédente avec des échelles d'index établies par d'autres méthodes. Le problème se réduit au suivant: est-il possible de trouver deux constantes  $\lambda_s$  et  $a$ , de valeurs acceptables et qui, introduites dans les formules précédentes, représentent correctement la table donnée ?

Si l'on admet la théorie de première approximation, basée sur l'équation spectrale de Wien, la discussion peut être conduite comme suit. On détermine la température  $T_m$  du minimum de l'index I. On en tire  $\lambda_s$  par l'équation

$$\lambda_s = \frac{b}{4T_m}$$

Reste à calculer l'acuité. Comme dans nos calculs antérieurs, on peut pour cela partir d'une paire de valeurs choisies de l'index; on est ainsi conduit à une équation transcendante. La formule relative à la pente de l'inflexion démontrée plus haut <sup>1</sup> permet souvent d'abrégier le calcul. En effet, pour qu'une table suffisamment complète d'index puisse être comparée à la théorie, il faut qu'elle présente une inflexion; expérimentalement, il arrive que la pente en soit relativement bien déterminée.

Si l'on ne se contente pas de l'approximation de Wien, mais qu'on veuille appliquer la théorie complète, le calcul direct semble inextricable; mais il est facile de ramener le problème au précédent, beaucoup plus facile. Pour cela, on détermine la valeur de la température correspondant au minimum de l'index, puis on applique la formule rappelée ci-dessus. On sait qu'elle est correcte à moins de 2 %. On en conclut donc une

<sup>1</sup> § 2.

valeur de la longueur d'onde du maximum de sensibilité suffisamment approchée pour calculer la correction Wien-Planck. Pratiquement, comme on trouve des valeurs de la longueur d'onde de ce maximum voisines de  $\lambda_v = 5,5 \times 10^{-5}$  cm, on peut toujours utiliser une table établie à partir de cette valeur, au moins en première approximation.

On ramène ensuite l'échelle observée à l'équation de Wien au moyen de la formule

$$I_w = I_p + \Delta m .$$

On est donc ramené à l'étude d'une échelle dans la théorie de première approximation. On en déduit des valeurs des deux constantes  $\lambda_s$  et  $a$  et, s'il le faut, on recommence le calcul pour obtenir une approximation meilleure.

Il est donc commode de disposer d'une table un peu détaillée de la correction Wien-Planck. Le tableau II en donne une, établie dans l'hypothèse de l'acuité infinie et avec  $\lambda_v = 5,5 \times 10^{-5}$  cm.

TABLEAU II.

*Correction Wien-Planck relative à l'œil.*

T	$\Delta m$ mag	$\frac{d(\Delta m)}{dT}$ 0,01 $\frac{\text{mag}}{1000^\circ}$	T	$\Delta m$ mag	$\frac{d(\Delta m)}{dT}$ 0,01 $\frac{\text{mag}}{1000^\circ}$
4000	0,00		14000	0,18	
		0,4			2,7
5000	0,01		16000	0,24	
		0,8			2,7
6000	0,01		18000	0,29	
		1,2			2,7
7000	0,03		20000	0,34	
		1,5			2,6
8000	0,04		25000	0,47	
		1,9			2,4
9000	0,06		30000	0,59	
		2,2			2,2
10000	0,08		35000	0,70	
		2,4			2,0
12000	0,13		40000	0,80	
		2,6			
14000	0,18				

Le calcul de cette table est très simple et peut être conduit comme suit. On détermine la constante  $\frac{b}{\lambda_v} = 4T_m$ . On forme ensuite un tableau comportant les colonnes suivantes: température  $T$ ,  $\frac{b}{\lambda_v} \times \frac{1}{T}$ ,  $\log e^{-\frac{b}{\lambda_v T}} = -\frac{b}{\lambda_v T} \times 0,434294$ ,  $\log \left(1 - e^{-\frac{b}{\lambda_v T}}\right)$  et  $\Delta m$ . La plupart des tables de log comportent une table de transformation des logarithmes naturels en logarithmes décimaux, qui n'est autre qu'une table des multiples de la constante 0,434294. Quant au terme  $1 - e^{-\frac{b}{\lambda_v T}}$ , on le lit directement dans une table de logarithmes de soustraction, en fonction du  $\log e^{-\frac{b}{\lambda_v T}}$ . Donnons un exemple:

$$\lambda_v = 5,5 \times 10^{-5} \text{ cm} ; \quad \frac{b}{\lambda_v} = 1,432 : (5,5 \times 10^{-5}) = 26036 .$$

Soit  $T = 10000^\circ$ ,

$$\frac{b}{\lambda_v} \times \frac{1}{T} = 2,6036 ,$$

$$0,434294 \times \frac{b}{\lambda_v} \times \frac{1}{T} = 1,1307 ,$$

$$\log \left(1 - e^{-\frac{b}{\lambda_v T}}\right) = \bar{1},9666 = -0,0334 ,$$

$$\Delta m = 0,082 .$$

## II. PREMIÈRE TABLE D'EDDINGTON.

5. — Dans ses premières recherches, Eddington a utilisé la table suivante de l'index absolu, calculée par lui (tableau III).

TABLEAU III.  
*Index absolu d'Eddington.*

Température	I	I <sub>w</sub>
2540	2,59	2,59
3000	1,71	1,71
3600	0,95	0,95
4500	0,35	0,35
6000	0,00	0,01
7500	0,02	0,05
9000	0,12	0,18
10500	0,31	0,40
12000	0,53	0,66

Nous avons déjà discuté cette table dans une étude antérieure <sup>1</sup>, en admettant que la valeur 0,00 de l'index, correspondant à 6000°, est le minimum de l'index I. On constate alors l'incompatibilité de la théorie et des valeurs du tableau. Nous allons voir que le minimum est assez éloigné de la température de 6000°.

On peut se demander comment Eddington a obtenu cette valeur. Peut-être s'est-il laissé influencer, dans l'élaboration de cette table, par l'idée que l'index minimum devait être réalisé pour la température du Soleil, ce qui est correct, et l'opinion que le maximum d'énergie apparente doit coïncider avec le maximum de rayonnement de cet astre, tel qu'il est donné par la loi du déplacement; cette dernière proposition est inexacte, puisque la température correspondant à l'index minimum est donnée par une loi analogue à celle du déplacement, mais où la constante  $b/5$  est remplacée par  $b/4$ .

Un examen plus précis des valeurs du tableau montre que le minimum de l'index d'Eddington n'a pas lieu pour la température de 6000°. Pour le voir, comparons les valeurs de la température T donnant les mêmes valeurs de l'index, de part et d'autre du minimum, en opérant éventuellement par interpolation linéaire. On obtient ainsi les valeurs du tableau IV.

<sup>1</sup> (I, § 46).

TABLEAU IV.

*Détermination de la température du minimum de l'index.*

I	T inf.	T sup.	T moy.
0,53	4230	12000	8115
0,35	4500	10770	7635
0,31	4670	10500	7585
0,12	5490	9000	7254
0,02	5990	7500	6745

Pour  $I = 0$ , on voit que la température moyenne tend vers  $6700$  ou  $6800^\circ$  au lieu de  $6000$ .

Graphiquement, on opérerait comme suit. Construisons la courbe diamétrale correspondant aux sécantes horizontales de la courbe de  $I$  en fonction de  $T$ . C'est pratiquement une droite qui coupe l'axe des températures vers  $6800^\circ$  et la courbe elle-même vers  $6700^\circ$ . A cette température du minimum de l'index, correspond une longueur d'onde du maximum de sensibilité de l'œil de  $5,35 \times 10^{-5}$  cm, valeur tout à fait acceptable.

La table donnée des valeurs de l'index n'atteint pas le double de la température du minimum. L'inflexion est donc inaccessible. De  $10500^\circ$  à  $12000^\circ$ , la dérivée est  $1,47 \times 10^{-4} \frac{\text{mag}}{\text{degré}}$ . Admettons qu'elle est sensiblement égale à celle relative à l'inflexion et appliquons la théorie exposée plus haut<sup>1</sup>. Cette dérivée est bien inférieure à la limite supérieure indiquée par la théorie:

$$1,47 \times 10^{-4} < \frac{1,08574}{T_m} = 1,62 \times 10^{-4} .$$

Tirons de là une valeur de l'acuité. On a

$$x = \frac{2,084}{\sqrt{6700 \cdot 1,47 \cdot 10^{-4}}} - 2 = 0,101 ;$$

$$a = \frac{4}{2,101 \cdot 0,101} = 19 .$$

<sup>1</sup> Ch. I, § 2.

Dans ce calcul, nous avons fait deux hypothèses qui toutes deux tendent à diminuer le résultat: 1° nous avons admis la validité de l'équation spectrale de Wien; 2° nous avons égalé la valeur moyenne de la dérivée entre 10500° et 12000° à celle relative à l'inflexion.

Pour nous rendre indépendant de la première critique et appliquer la théorie générale, ramenons l'échelle donnée à l'hypothèse de Wien en appliquant la correction Wien-Planck. Prenons pour cela les valeurs calculées plus haut (tableau II). Les nouvelles valeurs de l'index figurent sur le tableau III dans la colonne  $I_w$ . Répétons les opérations précédentes. On trouve ainsi pour le minimum la température de 6500° et une dérivée de  $1,74 \times 10^{-4} \frac{\text{mag}}{\text{degré}}$ , alors que la condition de l'inégalité donne  $1,67 \times 10^{-4} \frac{\text{mag}}{\text{degré}}$ . Il y a incompatibilité. Cette contradiction est probablement due à l'incertitude de la détermination de la température du minimum.

On peut se demander si l'application de la table donnant la correction Wien-Planck calculée plus haut et qui est basée sur la valeur  $5,5 \times 10^{-5}$  cm pour la longueur d'onde du maximum de sensibilité de l'œil, est justifiée ici. Le calcul montre que la différence entre les deux corrections est négligeable, comme on le voit ci-dessous.

TABLEAU V.

*Correction Wien-Planck en fonction de  $\lambda_v$ .*

T	$\lambda_v = 5,5$	$\lambda_v = 5,35$
	( $\times 10^{-5}$ cm)	
10000	0,08	0,08
15000	0,21	0,20

Contentons-nous donc de la théorie de première approximation, basée sur l'équation spectrale de Wien et cherchons les valeurs des constantes  $\lambda_v$  et  $a$  qui satisfont le mieux à l'échelle donnée. Puisque l'inflexion n'est pas atteinte, nous sommes

réduits à calculer l'acuité au moyen de l'équation transcendante<sup>1</sup>. Admettons les valeurs

$$I(3000) = 1,71 ; \quad I(6000) = 0 ; \quad T_m = 6700 .$$

On obtient l'équation

$$\frac{1,71}{2,5} - 4 \log \frac{3000}{6000} = (a + 4) \log \frac{a \cdot 5,35 \cdot 10^{-5} + \frac{1,432}{3000}}{a \cdot 5,35 \cdot 10^{-5} + \frac{1,432}{6000}} ,$$

ou

$$(a + 4) \log \frac{a \cdot 5,35 + 47,73}{a \cdot 5,35 + 23,87} = 1,888 ,$$

qui est satisfaite pour  $a = 100$ . Cette acuité est de l'ordre de grandeur de celles que nous avons obtenues en d'autres occasions.

La théorie de première approximation fournit alors la formule suivante pour le calcul de l'index

$$I = 10 \log T + 260 \log \left( 5,35 \cdot 10^{-3} + \frac{b}{T} \right) - \varepsilon .$$

Comparons les valeurs de la table initiale avec celles données par la formule (tableau VI, première approximation).

TABLEAU VI.

*Valeurs données et calculées de l'index.*

Température	Index				
	Donné	Première approximation		Seconde approximation	
			Résidu		Résidu
2540	2,59	2,65	— 0,06	2,66	— 0,07
3000	1,71	1,71	0,00	1,72	— 0,01
3600	0,95	0,95	0,00	0,96	— 0,01
4500	0,35	0,35	0,00	0,35	0,00
6000	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
7500	0,02	0,00	+ 0,02	— 0,02	+ 0,04
9000	0,12	0,14	— 0,02	0,09	+ 0,03
10500	0,31	0,34	— 0,03	0,26	+ 0,05
12000	0,53	0,57	— 0,04	0,45	+ 0,08

<sup>1</sup> (I, § 21).



Les résidus sont de l'ordre des centièmes de magnitude. Leur moyenne est 0,02. Ils présentent le caractère systématique d'être négatifs pour les températures extrêmes.

Essayons de tenir compte de la correction Wien-Planck. L'acuité étant égale à 100, les valeurs du tableau II sont utilisables. On obtient ainsi les valeurs de la seconde partie du tableau VI. On constate que les résidus sont beaucoup plus considérables que dans le cas précédent.

Le caractère systématique des résidus prouve que l'acuité choisie est trop élevée; en effet, si l'acuité diminue, le récepteur se rapproche du caractère bolométrique et tous les index tendent vers 0. On pourrait essayer de calculer une amélioration à apporter à l'acuité en posant des équations aux résidus. Ce procédé conduit pratiquement à des calculs notablement plus longs que celui consistant à faire quelques essais avec diverses valeurs de l'acuité. Par exemple, en choisissant la valeur  $a = 86$ , on obtient la formule

$$I = 10 \log T + 225 \log \left( 4,601 \cdot 10^{-3} + \frac{b}{T} \right) - \varepsilon ,$$

qui fournit les valeurs du tableau VII.

TABLEAU VII.

*Comparaison des index donnés et calculés.*

Température	Index		
	Donné	Calculé	Résidu
2540	2,59	2,62	— 0,03
3000	1,71	1,68	+ 0,03
3600	0,95	0,94	+ 0,01
4500	0,35	0,33	+ 0,02
6000	0,00	0,00	0,00
7500	0,02	0,00	+ 0,02
9000	0,12	0,13	— 0,01
10500	0,31	0,33	— 0,02
12000	0,53	0,56	— 0,03

La valeur moyenne des valeurs absolues des écarts est la même que précédemment, 0,02, mais le caractère systématique

en est fortement diminué. Comme aucun résidu ne dépasse 0,03 mag, il semble difficile de faire mieux.

Proposons-nous maintenant de refaire cette étude en appliquant la théorie complète. En ce faisant, nous n'avons pas pour but de déterminer notablement mieux les constantes de sensibilité, mais bien de montrer, sur un cas particulier, que l'application de la théorie générale conduit à des valeurs plus élevées de la longueur d'onde du maximum de sensibilité et de l'acuité. Pour la longueur d'onde du maximum de sensibilité, la théorie permet de montrer facilement que la différence est égale à 0,0186 fois cette longueur d'onde. La discussion est beaucoup plus compliquée pour l'acuité.

Pour appliquer la théorie complète, appliquons la correction Wien-Planck, ce qui est fait sur le tableau VIII, puis déterminons la température du minimum. Le procédé graphique exposé plus haut de la courbe diamétrale relative aux cordes horizontales conduit à la valeur  $T_m = 6500^\circ$ , ce qui correspond à  $\lambda_v = 5,50 \times 10^{-5}$  cm. La différence entre cette valeur et celle trouvée en appliquant la théorie de première approximation est  $0,15 \times 10^{-5}$  cm, alors que la théorie donne  $0,0186 \times \lambda_v = 0,10 \times 10^{-5}$  cm. Ces deux valeurs dépendent d'un minimum, toujours délicat à obtenir correctement. En conséquence, la vérification doit être considérée comme satisfaisante.

On pourrait essayer de déterminer l'acuité par le procédé de l'équation transcendante. Contentons-nous de vérifier la

TABLEAU VIII.

*Index donnés et calculés pour deux acuités.*

Température	Index donné	$I_{80}$	Résidu	$I_{150}$	Résidu
2540	2,59	2,43	+ 0,16	2,57	+ 0,02
3000	1,71	1,55	+ 0,16	1,61	+ 0,10
3600	0,95	0,85	+ 0,10	0,87	+ 0,08
4500	0,35	0,29	+ 0,06	0,30	+ 0,05
6000	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
7500	0,02	0,01	+ 0,01	0,01	+ 0,01
9000	0,12	0,13	— 0,01	0,14	— 0,02
10500	0,31	0,31	0,00	0,32	— 0,01
12000	0,53	0,52	+ 0,01	0,53	0,00

propriété annoncée, que la valeur de l'acuité doit être choisie plus grande dans la théorie complète que dans celle de première approximation. Pour cela, calculons l'index avec les deux valeurs  $a = 80$  et  $a = 150$ . Les résultats figurent sur le tableau dans les colonnes  $I_{80}$  et  $I_{150}$ . Rappelons qu'ici, la correction Wien-Planck est appliquée.

L'examen des résidus montre immédiatement la supériorité de l'hypothèse de l'acuité élevée.

Le critère de l'inflexion nous a montré précédemment l'incompatibilité de l'échelle étudiée ici avec la théorie complète. Il n'y a donc pas lieu de s'étonner que les résidus présentent des valeurs notables.

Nous ne pousserons pas plus loin la discussion de l'échelle primitive d'Eddington.

Remarquons en terminant que dans une première étude<sup>1</sup> nous concluons à l'incompatibilité de cette échelle et de la théorie de première approximation. Cette conclusion inexacte est basée sur l'hypothèse erronée que l'index est minimum pour la température de  $6000^\circ$ ; on est conduit ainsi à la valeur  $\lambda_v = 5,97 \times 10^{-5}$  cm pour la longueur d'onde du maximum de sensibilité de l'œil; la couleur correspondante est voisine de celle de la raie double du sodium, du côté du rouge; or le maximum de sensibilité de l'œil est nettement du côté du vert par rapport à cette raie. Cette valeur est inadmissible. En introduisant dans l'équation transcendante donnant l'acuité, on trouve un premier membre qui est supérieur au second pour toutes les valeurs possibles de l'acuité. Cet exemple montre combien est délicat le choix des constantes de sensibilité à introduire dans une théorie et combien il est désirable que les observateurs essaient de les préciser le mieux possible.

### III. DISCUSSION SOMMAIRE DE DEUX AUTRES ÉCHELLES.

6. — La table d'indices absolus précédente présente l'inconvénient d'être limitée aux températures moyennes. Depuis

<sup>1</sup> (I, § 46).

qu'elle a été élaborée, elle a subi diverses extensions que nous examinerons sommairement.

Bottlinger<sup>1</sup> a simplement étendu la table par une extrapolation plus au moins hasardeuse. Nous avons déjà discuté en détail l'échelle Bottlinger dans l'hypothèse de la validité de la théorie de première approximation; les résidus, tout en présentant un caractère systématique et des valeurs notables aux extrémités de l'échelle, ne permettent pas de conclusion bien établie, car le procédé d'extrapolation est trop peu sûr<sup>2</sup>.

Le critère de l'inflexion montre encore une contradiction. On a en effet

$$T_{\min.} = 6510^{\circ} ; \quad \lambda_v = 5,5 \times 10^{-5} \text{ cm .}$$

La pente de l'inflexion est  $2,3 \times 10^{-4} \frac{\text{mag}}{\text{degré}}$ , alors que le maximum compatible avec la théorie est

$$1,08574 : 6510 = 1,67 \times 10^{-4} .$$

Le caractère linéaire de la courbe calculée est plus accentué que celui des valeurs de Bottlinger.

L'application de la correction Wien-Planck augmenterait le désaccord. Il est donc inutile de nous attarder à l'étude de ce cas.

7. — Eddington a établi une autre table basée sur un artifice ingénieux dû à Hertzsprung. Nous avons examiné cette table ailleurs<sup>3</sup> et constaté qu'elle coïncide remarquablement bien avec la théorie de première approximation, puisque sur 30 résidus, 2 seulement dépassent 0,02 mag. Dans ces conditions, il semble inutile de reprendre cette étude en tenant compte de la théorie complète. Cependant, la théorie de première approximation fournit une valeur relativement faible pour la longueur d'onde du maximum de sensibilité de l'œil,

<sup>1</sup> BOTTLINGER, *Lichtelektrische Farbenindizes von 459 Sternen. Veröffentlichungen der Universitätssternwarte zu Berlin-Babelsberg*, III, 4, p. 26 (1923).

<sup>2</sup> (I, 47).

<sup>3</sup> (I, § 47) et Formules, III, § 12.

$5,309 \times 10^{-5}$  cm. Refaisons donc la détermination de cette constante en tenant compte de la correction Wien-Planck. Le procédé le plus simple est d'augmenter la longueur d'onde donnée par la théorie élémentaire de 1,86%. On obtient ainsi la nouvelle valeur  $5,41 \times 10^{-5}$  cm. Mais, en ces matières, nous savons qu'il y a lieu d'être prudent et il faut éviter une accumulation possible d'erreurs, aussi allons-nous reprendre la détermination complète de cette constante.

Reproduisons donc la portion de la table entourant le minimum et calculons quelques valeurs de la température en fonction de l'index, comme nous l'avons fait plus haut. Le tableau IX donne l'index de la table originale ainsi que les valeurs après application de la correction Wien-Planck rendant possible l'application de la théorie de première application.

TABLEAU IX.

*Index de Hertzsprung-Eddington.*

Température	Index donné	$I_w$
4500	0,35	0,35
5000	0,18	0,19
5500	0,08	0,09
6000	0,02	0,03
6500	0,00	0,02
7000	0,005	0,035
7500	0,02	0,05
8000	0,06	0,10
8500	0,10	0,15
9000	0,16	0,22
9500	0,22	0,29

Dans le tableau X (p. 290), nous donnons l'essentiel de la détermination de la température du minimum de l'index.

Si l'on ne tient pas compte de deux dernières valeurs, la température moyenne est une fonction sensiblement linéaire de l'index et le minimum a lieu vers  $6600^\circ$ , ce qui correspond pour la longueur d'onde du maximum de sensibilité à  $\lambda_p = 5,43 \times 10^{-5}$  cm. Les deux dernières valeurs tendent à ramener le minimum vers  $6400^\circ$  et  $\lambda_p$  à  $5,6 \times 10^{-5}$  cm. Mais

TABLEAU X.

*Détermination de la température de l'index minimum.*

Index	T <sub>inf.</sub>	T <sub>sup.</sub>	T <sub>moy.</sub>
0,29	9500	4690	7095
0,22	9000	4910	6955
0,19	8790	5000	6895
0,15	8500	5200	6850
0,10	8000	5450	6725
0,09	7900	5500	6700
0,05	7500	5830	6665
0,035	7000	5950	6475
0,03	6800	6000	6400

il suffit de poser  $I(7000) = 0,00$  au lieu de  $0,005$  pour que le minimum tombe à  $6500^\circ$  soit  $\lambda_v = 5,5 \times 10^{-5}$  cm.

D'autre part, l'application immédiate de la formule de brillance visuelle de Hertzprung conduit à admettre que le minimum de l'index a lieu pour  $6810^\circ$ , ce qui conduit à  $\lambda_v = 5,26 \times 10^{-5}$  cm<sup>1</sup>. Même en tenant compte de la correction Wien-Planck de cette valeur, correction égale à 1,86%, on obtient encore une longueur d'onde très faible pour le maximum de sensibilité de l'œil, soit  $5,36 \times 10^{-5}$  cm.

Il faut remarquer que la formule numérique de Hertzprung est basée sur une valeur ancienne de la constante  $b$  de l'exposant de  $e$  dans les formules du rayonnement. Avec la valeur  $b = 1,432$  cm  $\times$  degré, le minimum a lieu pour  $6690^\circ$  ce qui correspond à  $5,35 \times 10^{-5}$  cm dans la théorie de première approximation et  $5,45 \times 10^{-5}$  cm si l'on tient compte de la correction Wien-Planck.

Tout bien pesé, il semble bien que c'est cette dernière valeur qui est la plus probable. Admettons-là, ce qui revient à poser  $T_m = 6570^\circ$ , et examinons le critère de l'inflexion. Pour la pente de l'inflexion, les valeurs données de l'index fournissent  $1,8 \times 10^{-4} \frac{\text{mag}}{\text{degré}}$ , alors que la condition du maximum de cette pente est  $1,08574 : 6570 = 1,65 \times 10^{-4}$ .

<sup>1</sup> Formules, III, § 16.

La pente de l'inflexion est trop élevée pour que la théorie complète soit satisfaisante dans son voisinage. Pour que la chose soit possible, il faudrait choisir la valeur de  $T_m$  de telle sorte que

$$T_m < \frac{1,08574}{0,18 \times 10^{-3}} = 6040^\circ .$$

On aurait  $\lambda_v > 5,9 \times 10^{-5}$  cm, ce qui est beaucoup trop considérable. L'échelle Hertzsprung-Eddington doit donc être considérée comme adaptée à l'équation spectrale de Wien et pas à celle de Planck. Rappelons à ce sujet qu'elle est établie au moyen d'un artifice d'extrapolation basé sur des valeurs de la température atteignant  $12000^\circ$ , ou tout au plus  $14600^\circ$ . Pour ces températures, la correction Wien-Planck est 0,13 ou 0,2 mag. Dans le reste de l'intervalle considéré, cette correction n'atteint pas 0,1 mag et peut être négligée. Mais pousser l'extrapolation jusqu'à  $20000^\circ$  est probablement exagéré. Il n'en reste pas moins qu'il est remarquable que l'accord soit aussi bon entre la formule de Hertzsprung et les conséquences tirées de l'équation spectrale de Wien.

#### IV. CONSTANTES DE SENSIBILITÉ DE L'ÉCHELLE DE BLEKSLEY.

8. — Bleksley a calculé une table d'index absolus par des intégrations numériques basées sur une table numérique expérimentale de la sensibilité spectrale de l'œil. Son mémoire <sup>1</sup> contient une discussion de la précision obtenue et toutes les données servant de base au calcul. Cela va nous permettre une discussion approfondie. Nous calculerons tout d'abord les constantes de sensibilité représentant aussi bien que possible la table donnée, nous recalculerons la table d'index et enfin, nous essaierons de déterminer indirectement les constantes de sensibilité en partant comme précédemment des valeurs de l'index trouvées par Bleksley.

<sup>1</sup> A. E. H. BLEKSLEY, Studies in stellar Statistics: I. On the reduction from visual to bolometric magnitudes. *South Africa Journal of Science*, XXXII, p. 118-124, 1935.

9. — Commençons par un examen des valeurs de la sensibilité.

Le tableau XI donne en fonction de la longueur d'onde: la sensibilité  $\sigma_c$  admise actuellement à la suite de discussions internationales, les valeurs  $\sigma_B$  admises par Bleksley, les erreurs absolues probables  $\varepsilon_a$  de ces dernières valeurs, telles que les donne Bleksley, les erreurs relatives correspondantes  $\varepsilon_r$ , la différence  $\sigma_c - \sigma_B$  et sa valeur relative  $\Delta$ , les différences premières et deuxième des valeurs de Bleksley et enfin le signe de la différence troisième.

TABLEAU XI.  
*Sensibilité spectrale de l'œil.*

$\lambda$ $10^{-5}$ cm	$\sigma_c$	$\sigma_B$	$\varepsilon_a$ ±	$\varepsilon_r$ % ±	$\sigma_c - \sigma_B$	$\Delta$ %	Différences		
							I	II	III
4,0	0,0004	0,00035	0,00003	8	+ 0,00005	+ 12			
4,1	0012	0012	0001	8	0	0	+ 0,00085		
4,2	0040	0040	0004	10	0	0	0028	+ 0,00195	+
4,3	0116	0116	001	9	0	0	0076	0048	—
4,4	023	023	005	22	0	0	0114	0038	+
4,5	038	042	003	7	— 0,004	— 10	019	+ 0,0076	—
4,6	060	060	005	8	0	0	018	— 0,001	+
4,7	091	094	007	7	— 0,003	— 3	034	+ 0,016	+
4,8	139	145	009	6	— 0,006	— 4	051	017	—
4,9	208	212	011	5	— 0,004	— 2	067	016	+
5,0	323	333	011	3	— 0,010	— 3	121	054	+
5,1	503	534	029	5	— 0,031	— 6	201	+ 0,080	—
5,2	710	712	031	4	— 0,002	— 0	178	— 0,023	+
5,3	862	868	017	2	— 0,006	— 1	156	022	—
							089	067	+



TABLEAU XI (suite).

$\lambda$ $10^{-5}$ cm	$\sigma_c$	$\sigma_B$	$\varepsilon_a$ $\pm$	$\varepsilon_r$ % $\pm$	$\sigma_c - \sigma_B$	$\Delta$ %	Différences		
							I	II	III
5,4	954	957	008	1	- 0,003	- 0		050	
							+ 0,039		+
5,5	995	996	001	0	- 0,001	- 0		041	
							- 0,002		+
5,6	995	994	002	0	+ 0,001	+ 0		039	
							041		+
5,7	952	953	006	1	- 0,001	- 0		038	
							079		+
5,8	870	874	011	1	- 0,004	- 0		022	
							101		-
5,9	757	773	013	2	- 0,016	- 2		- 0,032	
							133		+
6,0	631	640	020	3	- 0,009	- 1		+ 0,016	
							117		-
6,1	503	523	016	3	- 0,020	- 4		- 0,010	
							127		+
6,2	381	396	023	6	- 0,017	- 4		+ 0,014	
							113		-
6,3	265	283	011	4	- 0,018	- 7		- 0,007	
							106		-
6,4	175	177	007	4	- 0,002	- 1		- 0,037	
							069		+
6,5	107	108	003	3	- 0,001	- 1		- 0,023	
							046		+
6,6	061	062	003	5	- 0,001	- 2		- 0,019	
							027		+
6,7	032	035	004	11	- 0,003	- 9		- 0,0115	
							0155		+
6,8	017	0195	003	15	- 0,0025	- 13		- 0,0035	
							0120		-
6,9	0082	0075	0003	4	+ 0,0007	+ 10		- 0,0080	
							0040		+
7,0	0041	0035	0003	8	+ 0,0006	+ 15		- 0,0025	
							0015		+
7,1	0021	0020	0002	10	+ 0,0001	+ 5		- 0,0005	
							0010		-
7,2	00105	0010	0002	20	+ 0,00005	+ 5		- 0,00052	
							00048		+
7,3	00052	00052	0001	20	0	0		- 0,00021	
							00027		+
7,4	00025	00025	0001	40	0	0		- 0,00014	
							00013		+
7,5	00012	00012	00002	17	0	0		- 0,00007	
							00006		
7,6	0,00006	00006	00001	17	0	0			

Il est bien entendu que dans les matières qui nous occupent ici, il est vain de chercher une précision qui n'est pas dans la nature des choses. Nous trouvons une confirmation de cela par l'examen des différences  $\Delta$ . Sur 37 valeurs du tableau, on trouve 9 différences nulles, groupées aux deux extrémités du domaine de sensibilité, 6 valeurs positives dont 4 groupées dans le rouge. La grande majorité, soit 22 valeurs, sont négatives. Les deux échelles de sensibilité considérées ici présentent donc des différences systématiques notables. En outre, dans 8 cas, la différence entre les deux échelles dépasse la limite d'erreur admise par Bleksley. Ces erreurs probables ne constituent donc qu'un ordre de grandeur et une échelle de sensibilité pourra être acceptable, même s'il y a des divergences supérieures à la limite indiquée par Bleksley.

On ne peut pas prétendre représenter en toute rigueur la sensibilité par une fonction analytique simple de la longueur d'onde: les différences successives montrent un caractère par trop fantaisiste. Par exemple les signes des différences troisièmes sont presque répartis au hasard. Sur 34 différences troisièmes, on trouve les nombres de groupes de signes consécutifs identiques indiqués dans la seconde colonne du tableau XII, alors que le hasard donnerait ceux de la dernière colonne.

TABLEAU XII.

*Différences troisièmes.*

Nombre de différences constituant le groupe	Nombre de groupes	
	Observés	Calculés
1	14	17
2	4	4
3	1	1
4	1	—
5	1	—
> 3	—	1

La seule région où une représentation analytique simple est possible est celle du voisinage du maximum de la sensibilité, où 5 différences troisièmes consécutives sont de signe constant.

Nous représenterons cependant, au moins approximativement, la sensibilité par une fonction de la forme

$$\sigma(\lambda) = \left( \frac{\lambda_v}{\lambda} e^{1 - \frac{\lambda_v}{\lambda}} \right)^a .$$

Une fois déterminées les deux constantes  $\lambda_v$  et  $a$ , le problème qui nous intéresse ici est de savoir s'il est possible de baser la théorie de l'index absolu sur l'hypothèse de la validité de ces constantes, tout en ayant une précision suffisante, comparable à celle des intégrations numériques. Nous verrons que la réponse est affirmative.

10. — Pour déterminer la longueur d'onde du maximum de sensibilité, utilisons le procédé de la courbe diamétrale des cordes horizontales. On trouve par le calcul les valeurs suivantes:

TABLEAU XIII.

*Longueur d'onde correspondant à une sensibilité donnée.*

Sensibilité	$\lambda$ inf.	$\lambda$ sup.	$\lambda$ moy.
0,773	5,239	5,9	5,570
0,868	5,3	5,806	5,553
0,874	5,3067	5,8	5,553
0,953	5,3955	5,7	5,5477
0,957	5,4	5,6902	5,5451
0,994	5,4949	5,6	5,5473

L'unité de longueur d'onde est le  $10^{-5}$  cm.

La moyenne des trois dernières valeurs est  $5,5467 \times 10^{-5}$  cm. Pour vérifier si elle correspond au maximum de sensibilité, remplaçons la région voisine du maximum de la courbe de sensibilité par un arc de parabole. Expriment les longueurs d'onde en  $m\mu$  il vient

$$\sigma = 1 - \frac{\alpha}{1000} (555 + x - \lambda)^2 .$$

Les quatre valeurs qui encadrent le maximum fournissent les équations suivantes, où l'on néglige  $x^2$ , qui est de l'ordre de grandeur de l'unité.

$$\begin{aligned} 43 &= 225 \alpha + 30 \alpha x \\ 4 &= 25 \alpha + 10 \alpha x \\ 6 &= 25 \alpha - 10 \alpha x \\ 47 &= 225 \alpha - 30 \alpha x \end{aligned}$$

On élimine  $\alpha x$  en additionnant les quatre équations du système. Il vient

$$\alpha = 0,2 .$$

L'introduction de cette valeur dans les équations du système, après quelques changements de signe, de façon à ce que le coefficient de  $x$  soit positif, conduit par addition à la valeur

$$x = -0,375 .$$

La longueur d'onde du maximum de sensibilité est ainsi  $\lambda_v = 555 - 0,375 \text{ m}\mu = 5,546 \times 10^{-5} \text{ cm}$ , valeur pratiquement égale à celle  $5,5467 \times 10^{-5} \text{ cm}$ , trouvée plus haut. Pour les calculs ultérieurs, nous avons adopté  $5,5464 \times 10^{-5} \text{ cm}$ .

11. — Calculons l'acuité; pour cela, prenons le logarithme de la fonction  $\sigma(\lambda)$

$$\log \sigma = a \left( \log \frac{\lambda_s}{\lambda} + \left[ 1 - \frac{\lambda_s}{\lambda} \right] \log e \right) .$$

Chaque valeur donnée de la sensibilité fournit une équation linéaire en  $a$ . Effectuons le calcul en donnant à la sensibilité les diverses valeurs normales et extrêmes admises par Bleksley. Le résultat figure sur le tableau XIV.

Remarquons immédiatement qu'il n'y a pas lieu d'attribuer d'importance aux valeurs correspondant au maximum de sensibilité ou à son voisinage. Les coefficients de l'équation en  $\log \sigma$  y sont trop mal déterminés.

Les acuités ainsi déterminées ont des valeurs voisines de 130 pour les longueurs d'onde comprises entre  $4 \times 10^{-5} \text{ cm}$  et  $4,5 \times 10^{-5} \text{ cm}$ . Elles croissent ensuite, pour atteindre 200 vers

TABLEAU XIV.

*Valeurs minimum, normale et maximum de l'acuité en fonction de la longueur d'onde.*

$\lambda$ 10 <sup>-5</sup> cm	Acuité			$\lambda$ 10 <sup>-5</sup> cm	Acuité		
	min.	normale	max.		min.	normale	max.
4,0	132	133	135	5,9	130	138	147
4,1	131	133	135	6,0	137	148	159
4,2	127	130	132	6,1	140	147	154
4,3	124	127	129	6,2	145	155	165
4,4	123	130	138	6,3	155	160	165
4,5	132	135	138	6,4	173	177	182
4,6	146	151	156	6,5	184	187	189
4,7	158	163	168	6,6	192	195	198
4,8	170	176	182	6,7	193	200	207
4,9	188	194	201	6,8	201	202	203
5,0	191	198	203	6,9	219	221	222
5,1	159	173	189	7,0	232	235	238
5,2	140	161	182	7,1	217	221	224
5,3	115	132	151	7,2	215	221	228
5,4	116	127	153	7,3	214	219	225
5,5	107	127	154	7,4	213	219	232
5,6	85	130	175	7,5	215	219	223
5,7	106	124	141	7,6	213	217	221
5,8	126	138	152				

$5,0 \times 10^{-5}$  cm, puis décroissent, pour passer par un minimum de l'ordre de 130 dans la région du maximum de sensibilité. Elles croissent enfin pour se stabiliser au voisinage de 220 pour les grandes longueurs d'onde du domaine de sensibilité de l'œil. En général, la différence entre les valeurs minimum et maximum relatives à chaque longueur d'onde varie entre quelques unités et un nombre de l'ordre de 40. Cette différence, petite aux extrémités du domaine de sensibilité, présente un maximum dans la région du maximum de sensibilité, là où les équations qui déterminent l'acuité possèdent le moins de sécurité.

En toute rigueur, une fonction de la forme

$$\sigma(\lambda) = \left( \frac{\lambda_s}{\lambda} e^{1 - \frac{\lambda_s}{\lambda}} \right)^a$$

est donc incapable de représenter les valeurs de la sensibilité de l'échelle internationale ou celles admises par Bleksley.

Cependant, le but que nous poursuivons ici n'est pas de chercher des valeurs rigoureuses, mais bien de constituer une théorie de l'index absolu, approximative, suffisamment maniable et plus correcte que celle basée sur l'hypothèse de la sensibilité concentrée. Or celle-ci fournit des résultats intéressants dans la théorie de l'index de couleur photo-visuel. Si cette hypothèse simpliste atteint ce but, celle des courbes de sensibilité doit donner des résultats encore meilleurs.

Les applications que nous avons en vue appartiennent au domaine astronomique. Elles concernent essentiellement des températures de l'ordre de celle du Soleil. Le maximum d'émission de cet astre a lieu pour des longueurs d'onde de l'ordre de celle du maximum de sensibilité de l'œil. C'est dire que le rôle de la portion du domaine de sensibilité voisine du maximum doit être prépondérant. Nous pouvons donc choisir l'acuité sans trop nous inquiéter de ce qui se passe pour les longueurs d'onde extrêmes, moindres de  $4,5 \times 10^{-5}$  cm et supérieures à  $6,7 \times 10^{-5}$  cm. Ces deux limites diffèrent d'environ 20 % de la longueur d'onde du maximum de sensibilité. D'ailleurs, les sensibilités correspondantes sont inférieures à 0,04.

Pour déterminer l'acuité la plus favorable, on pourrait se proposer d'appliquer la théorie des moindres carrés aux équations en  $\log \sigma$ . Ce serait une erreur grave et cela pour plusieurs motifs. Le poids des équations extrêmes, dont nous venons de reconnaître le peu d'importance physique, serait énorme, tandis que les valeurs intermédiaires, voisines des inflexions, qui sont les plus importantes pour la suite, verraient leur rôle réduit à néant. D'ailleurs, ce ne sont pas les équations en  $\log \sigma$  qui sont données, mais bien des équations transcendantes

$$\sigma = \left( \frac{\lambda_s}{\lambda} e^{1 - \frac{\lambda_s}{\lambda}} \right)^a,$$

où  $a$  est l'inconnue. Si on voulait l'appliquer, la méthode des moindres carrés devrait l'être à ces équations elles-mêmes. L'application correcte de la méthode serait la suivante. La

constante  $a$  doit être choisie de façon à rendre minimum la somme des carrés des résidus. Appelons  $\sigma$  les valeurs admises de la sensibilité. Il faut pour cela

$$\frac{d}{da} \sum \left[ \sigma - \left( \frac{\lambda_s}{\lambda} e^{1-\frac{\lambda_s}{\lambda}} \right)^a \right]^2 = 0 ,$$

soit

$$\sum \left[ \sigma - \left( \frac{\lambda_s}{\lambda} e^{1-\frac{\lambda_s}{\lambda}} \right)^a \right] \left( \frac{\lambda_s}{\lambda} e^{1-\frac{\lambda_s}{\lambda}} \right)^a \text{Log} \left( \frac{\lambda_s}{\lambda} e^{1-\frac{\lambda_s}{\lambda}} \right) = 0 . \quad (1)$$

Cette équation, transcendente en  $a$ , est fort malcommode à cause du binôme figurant dans le crochet.

Par ailleurs, on peut élever les doutes les plus sérieux sur la validité de l'application de la méthode des moindres carrés au problème qui nous occupe: elle suppose des valeurs réparties au hasard, alors que l'acuité manifeste une allure toute différente. Il semble donc illusoire de vouloir effectuer les longs calculs que représente l'équation (1). Mieux vaut faire successivement quelques hypothèses sur l'acuité  $a$  et calculer les résidus. Leur allure indique assez clairement dans quel sens il faut tenter un nouvel essai. Dans le cas particulier qui nous occupe, voici comment nous avons opéré.

La moyenne des acuités figurant sur le tableau XIV est voisine de 178. La coïncidence de cette valeur avec celle admise par Nutting<sup>1</sup> ( $a = 181$ ) est remarquable. En posant  $a = 178$ , les résidus (donnée-calcul) sont presque tous positifs pour les longueurs d'onde moindres que  $6,6 \times 10^{-5}$  cm et négatifs pour les longueurs d'onde supérieures. Les sommes des résidus positifs et négatifs sont respectivement  $+0,680$  et  $-0,075$ . La moyenne des 37 valeurs absolues de ces résidus est 0,02. En ne tenant compte que des 25 valeurs pour lesquelles la sensibilité vaut au moins 0,02, cette moyenne des résidus ascende à 0,03.

<sup>1</sup> NUTTING, On the visibility of radiation. *Philosophical Magazine*, VI, p. 29, 1915.

Faisons un deuxième essai avec  $a = 150$ . L'allure des résidus est notablement modifiée; ils sont négatifs, sauf pour les longueurs d'onde comprises entre 5,3 et  $6,1 \times 10^{-5}$  cm.

Les sommes précédentes deviennent  $+ 0,104$  et  $- 0,695$ . La valeur moyenne des résidus est pratiquement la même que précédemment, mais les résidus négatifs ont pris le pas sur les positifs.

Refaisons le calcul avec  $a = 165$ . Les signes des résidus sont les suivants

$\lambda$ en $10^{-5}$ cm .	< 4,7	4,8-5,1	5,2-6,3	> 6,3
Résidus . . .	+	-	+	-

Leur somme est  $0,313 - 0,341$ ; la moyenne n'est pas modifiée de façon sensible. Un calcul d'interpolation montre que pour obtenir l'égalité des valeurs absolues des sommes des résidus positifs et négatifs, il faudrait modifier l'acuité de moins d'une unité. Cette correction est illusoire.

Dans la discussion précédente, nous avons fait jouer aux sommes de résidus un rôle essentiel. Dans ces sommes, les termes correspondant à de petites valeurs de la sensibilité ne jouent aucun rôle. Puisque les  $\sigma$  sont généralement donnés avec trois chiffres significatifs, seuls sont retenus les résidus atteignant 0,0005. Les équations correspondant aux extrémités du domaine de sensibilité ne jouent aucun rôle. Elles ne sont pas éliminées par une décision arbitraire du calculateur, mais bien par la nature de la précision accessible en la matière. Cela ne signifie pas que le procédé de calcul exposé ici soit exempt de toute critique. En particulier, on pourrait employer des sommes de carrés de résidus. Ce qui importe, c'est d'obtenir une valeur de l'acuité permettant de représenter analytiquement « aussi bien que possible » les valeurs données. Admettre le calcul précédent, c'est poser que « aussi bien que possible » signifie « de telle sorte que la somme des résidus positifs soit égale à celle des résidus négatifs, prise en valeur absolue ». Cette propriété est satisfaite dans une répartition au hasard des résidus.



Montrons que les calculs précédents sont rapides. On construit une table donnant les grandeurs suivantes en fonction de la longueur d'onde  $\lambda$ :

$$\frac{\lambda_s}{\lambda}, \quad 1 - \frac{\lambda_s}{\lambda}, \quad \log \frac{\lambda_s}{\lambda}, \quad \left(1 - \frac{\lambda_s}{\lambda}\right) \log e, \quad \log \left(\frac{\lambda_s}{\lambda} e^{1 - \frac{\lambda_s}{\lambda}}\right).$$

Quoique les  $\sigma$  ne soient connus qu'avec deux ou trois chiffres significatifs, cette table doit être établie à cinq décimales, car les nombres de la dernière colonne sont obtenus en faisant la différence de ceux des deux colonnes précédentes; dans cette dernière opération, on perd au moins une décimale, et parfois davantage; au voisinage du maximum de sensibilité, on perd jusqu'à quatre chiffres. Dans la dernière colonne du tableau, il faut indiquer les logarithmes avec caractéristique et mantisse négative.

Chaque essai d'une acuité est fait en établissant un tableau comportant les grandeurs suivantes, en fonction de la longueur d'onde  $\lambda$ :

$a \log \left(\frac{\lambda_s}{\lambda} e^{1 - \frac{\lambda_s}{\lambda}}\right)$ , avec caractéristique et mantisse négatives;  
 même grandeur, avec caractéristique négative et mantisse positive;

$\sigma$  calculé;

$\sigma$  donné;

résidus.

Une table à trois décimales ou une règle à calcul suffisent pour passer des  $\log \sigma$  aux  $\sigma$ . L'usage d'une machine est commode pour effectuer les multiplications par  $a$ .

Le tableau XV donne le résultat du calcul avec les constantes indiquées plus haut:

$$\lambda_v = 5,5464 \cdot 10^{-5} \text{ cm} \quad a = 165 .$$

La colonne  $\varepsilon$  indique les erreurs probables admises par Bleksley.

TABLEAU XV.

$\lambda$ 10 <sup>-5</sup> cm	$\sigma$ donné	$\varepsilon$ $\pm$	$\sigma$ calc.	Résidu
4,0	0,00035	0,00003	0,00005	+ 0,00030
4,1	0012	0001	0002	+ 0,0010
4,2	0040	0004	0009	+ 0,0031
4,3	0116	001	0029	+ 0,0087
4,4	023	005	008	+ 0,015
4,5	042	003	021	+ 0,021
4,6	060	005	046	+ 0,014
4,7	094	007	092	+ 0,002
4,8	145	009	164	— 0,019
4,9	212	011	267	— 0,055
5,0	333	011	399	— 0,066
5,1	534	029	551	— 0,017
5,2	712	031	705	+ 0,007
5,3	868	017	839	+ 0,029
5,4	957	008	944	+ 0,013
5,5	996	001	993	+ 0,003
5,6	994	002	993	+ 0,001
5,7	953	006	938	+ 0,015
5,8	874	011	853	+ 0,021
5,9	773	013	735	+ 0,038
6,0	640	020	608	+ 0,032
6,1	523	016	484	+ 0,039
6,2	396	023	372	+ 0,024
6,3	283	011	273	+ 0,010
6,4	177	007	199	— 0,022
6,5	108	003	140	— 0,032
6,6	062	003	095	— 0,033
6,7	035	004	063	— 0,028
6,8	0195	003	0405	— 0,0210
6,9	0075	0003	0256	— 0,0181
7,0	0035	0003	0159	— 0,0124
7,1	0020	0002	0096	— 0,0076
7,2	0010	0002	0057	— 0,0047
7,3	00052	0001	00337	— 0,00285
7,4	00025	0001	00195	— 0,00170
7,5	00012	00002	00110	— 0,00098
7,6	0,00006	0,00001	0,00062	— 0,00056

L'examen du tableau XV montre que la représentation analytique admise laisse des résidus qui, sauf en trois cas seulement, dépassent en valeur absolue les valeurs admises par Bleksley comme erreurs probables de la sensibilité. Ces

résidus présentent un caractère systématique. Il n'atteignent jamais 0,07, malgré le caractère quelque peu irrégulier de la sensibilité admise par Bleksley.

La fonction  $\sigma(\lambda) = \left(\frac{\lambda_s}{\lambda} e^{1-\frac{\lambda_s}{\lambda}}\right)^a$  ne peut pas être considérée comme donnant une représentation précise de la sensibilité. Cependant, elle en donne bien l'allure. D'autre part, les valeurs de Bleksley s'écartent de façon notable de celles admises comme échelle internationale. Nous pousserons donc plus loin la comparaison avec les calculs de Bleksley et nous allons déterminer les indices absolus en admettant les deux constantes de sensibilité trouvées plus haut.

*(à suivre)*

---

# Recherches sur diverses échelles d'index de couleur absolus des étoiles

PAR

**Paul ROSSIER***(suite et fin)*

## V. COMPARAISON DES INDEX CALCULÉS PAR LA MÉTHODE DE L'INTÉGRATION NUMÉRIQUE ET CELLE DES COURBES DE SENSIBILITÉ.

12. — Admettant les valeurs des deux constantes de sensibilité rappelées ci-dessus, l'index absolu, relatif à l'équation spectrale de Wien, est donné par la formule

$$I = 10 \log T + 422,5 \log \left( 915,156 \cdot 10^{-5} + \frac{b}{T} \right) - \varepsilon .$$

Le minimum de l'index donné par cette formule a lieu pour la température de 6455°.

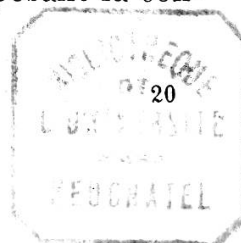
Le tableau XVI fournit les indications suivantes, en fonction de la température:

L'index de Bleksley,  $I_B$ ;

L'index  $I_1$ , résultant de l'application de l'équation spectrale de Wien;

la correction Wien-Planck,  $\Delta I$ ;

l'index  $I_2$ , donné par la théorie complète, en imposant la condition d'étalonnage  $I_{\min} = 0$ ;



$I_3$ , le même index, avec la condition identique à celle de Bleksley I (6800) = 0;

les résidus, pris dans le sens « Index de Bleksley —  $I_3$  ».

Les calculs ont été effectués de façon à obtenir trois décimales; les résultats sont arrondis au centième de magnitude.

TABLEAU XVI.

*Comparaison des index donnés et calculés.*

T	$I_B$	$I_1$	$\Delta I$	$I_2$	$I_3$	Résidu
2540	2,53	2,52	0,00	2,54	2,52	+ 0,01
3000	1,61	1,61	0,00	1,62	1,60	+ 0,01
3600	0,88	0,88	0,00	0,90	0,87	+ 0,01
4500	0,30	0,31	0,00	0,33	0,30	0,00
6000	0,00	0,01	0,01	0,01	0,00	0,00
6455	—	0,00	0,02	0,00	— 0,02	—
6800	0,00	—	—	0,01	0,00	0,00
7500	0,00	0,05	0,04	0,03	0,01	— 0,01
9000	0,14	0,21	0,06	0,17	0,14	0,00
10500	0,33	0,43	0,10	0,36	0,33	0,00
12000	0,53	0,68	0,13	0,56	0,54	— 0,01
15000	0,96	1,17	0,20	0,99	0,97	— 0,01
20000	1,60	1,95	0,35	1,62	1,60	0,00
25000	2,15	2,63	0,48	2,18	2,15	0,00

On constate sur le tableau que les résidus varient de + 0,01 à — 0,01 mag. Ils ont un caractère systématique: les trois premiers, correspondant aux basses températures, sont positifs, tandis que trois de ceux correspondant à des températures élevées sont négatifs. Les autres sont nuls. La petitesse des résidus montre que la méthode des courbes de sensibilité conduit à des résultats d'une précision amplement suffisante pour les besoins de l'astrophysique. Cette méthode peut remplacer celle des intégrations numériques tant que l'on ne désire pas une précision supérieure au centième de magnitude. L'instant semble encore bien éloigné où pareille précision sera dépassée par les mesures photométriques. Malgré ses défauts, la représentation analytique de la sensibilité de l'œil par la

fonction  $\sigma(\lambda) = \left( \frac{\lambda_s}{\lambda} e^{1 - \frac{\lambda_s}{\lambda}} \right)^a$  donne une précision suffisante pour les applications astronomiques.

13. — L'acuité dont nous avons fait usage dans le calcul de l'index est considérable. Est-il possible de la supposer infinie ? Rappelons que dans ce cas l'index absolu est donné par la formule<sup>1</sup>

$$I = 10 \log T + 1,08574 \frac{b}{\lambda_s T} - \varepsilon .$$

Dans le cas particulier, la formule devient

$$I = 10 \log T + 19676 \frac{b}{T} - \varepsilon .$$

Le tableau XVII donne le résultat du calcul, compte tenu de la correction Wien-Planck.

TABLEAU XVII.

*Index absolu dans le cas de la sensibilité concentrée.*

I	I donné	I calc.	Résidu
2540	2,53	2,64	— 0,11
3000	1,61	1,67	— 0,06
3600	0,88	0,91	— 0,03
4500	0,30	0,32	— 0,02
6000	0,00	0,00	0,00
6455	—	— 0,02	—
7500	0,00	0,01	— 0,01
9000	0,14	0,15	— 0,01
10500	0,33	0,34	— 0,01
12000	0,53	0,55	— 0,02
15000	0,96	0,99	— 0,03
20000	1,60	1,62	— 0,02
25000	2,15	2,28	— 0,13

Les résidus sont petits au voisinage du minimum de l'index, mais ils croissent de façon très notable pour les températures extrêmes: ils sont beaucoup plus considérables que ceux relatifs à l'hypothèse de l'acuité finie. Cela montre bien l'infériorité en ces matières de l'hypothèse de la sensibilité concentrée. Celle-ci peut être excellente pour des interpolations au voisinage du minimum de l'index; elle ne convient plus pour les astres très chauds ou très froids.

<sup>1</sup> (I, § 22).

VI. DÉTERMINATION DES CONSTANTES DE SENSIBILITÉ  
 A PARTIR DE L'ÉCHELLE D'INDEX,  
 APPLICATION DE L'ÉQUATION DE WIEN.

14. — A plusieurs reprises, nous avons eu à résoudre le problème inverse du précédent: une échelle d'index étant donnée, déterminer les constantes de sensibilité qui lui correspondent. Nous nous proposons d'effectuer ce même calcul en partant des index de Bleksley. Tout d'abord, nous admettrons la théorie de première approximation, basée sur l'équation spectrale de Wien.

Déterminons la température du minimum de l'index par le procédé de la courbe diamétrale correspondant aux directions horizontales. Cette diamétrale est sensiblement rectiligne. Graphiquement, on trouve le minimum pour  $6650^\circ$ , ce qui correspond à  $\lambda_v = 5,39 \times 10 \text{ cm}^{-5}$ .

Pour déterminer l'acuité, le critère de l'inflexion donne  $a = 14$ , valeur très faible.

La formule donnant l'index, basée sur ces deux valeurs, est

$$I = 10 \log T + 45 \log \left( 75,46 \cdot 10^{-5} + \frac{b}{T} \right) - \varepsilon .$$

Elle fournit les valeurs du tableau XVIII figurant dans la colonne  $I_{14}$ . Les résidus montrent que la formule est satisfaisante de  $4500$  à  $20000^\circ$ . Au delà, les résidus sont considérables, surtout pour les basses températures.

On peut se demander si une autre valeur de l'acuité donnerait des résidus plus favorables. En l'augmentant, nous écartons le récepteur du caractère bolométrique et nous augmentons l'index. Donc une valeur supérieure de l'acuité diminue les résidus positifs relatifs aux basses températures, au détriment des températures élevées. Pour nous rendre compte de l'ordre de grandeur de cet effet, refaisons le calcul avec  $a = 20$ . Il vient

$$I = 10 \log T + 60 \log \left( 107,8 \cdot 10^{-5} + \frac{b}{T} \right) - \varepsilon .$$

Les valeurs correspondantes figurent sur le tableau XVIII, dans la colonne  $I_{20}$ . Les résidus relatifs aux basses températures sont diminués de façon très notable, mais ceux correspondant aux étoiles chaudes sont à peu près doublés.

15. — Les équations spectrales de Wien et de Planck coïncident pour les basses températures. Proposons-nous de représenter la portion inférieure de l'échelle d'index par la théorie de première approximation, tout en sacrifiant les astres chauds. On détermine alors l'acuité par le procédé de l'équation transcendante. Admettant la valeur  $I(3000) = 1,61$ , on trouve une acuité voisine de  $a = 70$  à laquelle correspond la formule suivante pour l'index

$$I = 10 \log T + 185 \log \left( 377,3 \cdot 10^{-5} + \frac{b}{T} \right) - \epsilon .$$

Les valeurs correspondantes de l'index et les résidus figurent sur le tableau XVIII dans la colonne  $I_{70}$ . Pour les températures inférieures à  $11000^\circ$ , les résidus ne dépassent pas 0,02 mag, mais ils atteignent 0,3 mag pour les étoiles chaudes.

TABLEAU XVIII.

*Index calculé pour diverses acuités, théorie de première approximation.*

I	I donné	$I_{14}$	Résidus	$I_{20}$	Résidus	$I_{70}$	Résidus
2540	2,53	1,81	+ 0,72	2,03	+ 0,50	2,52	+ 0,01
3000	1,61	1,21	+ 0,40	1,34	+ 0,27	1,63	— 0,02
3600	0,88	0,70	+ 0,18	0,77	+ 0,11	0,90	— 0,02
4500	0,30	0,27	+ 0,03	0,29	+ 0,01	0,32	— 0,02
6000	0,00	0,01	— 0,01	0,01	— 0,01	0,00	0,00
7500	0,00	0,02	— 0,02	0,02	— 0,02	0,01	— 0,01
9000	0,14	0,14	0,00	0,15	— 0,01	0,15	— 0,01
10500	0,33	0,32	+ 0,01	0,33	0,00	0,35	— 0,02
12000	0,53	0,52	+ 0,01	0,55	— 0,02	0,58	— 0,05
15000	0,96	0,95	+ 0,01	0,99	— 0,03	1,06	— 0,10
20000	1,60	1,64	— 0,04	1,70	— 0,10	1,83	— 0,23
25000	2,15	2,27	— 0,12	2,35	— 0,20	2,48	— 0,33

Nous trouvons ici une acuité très inférieure à celle que nous a donnée l'étude directe de la sensibilité. Cela est dû essentielle-



ment aux deux faits suivants. La longueur d'onde du maximum de sensibilité est déterminée ici avec beaucoup moins de précision; le fait de négliger la correction Wien-Planck tend à diminuer notablement cette longueur d'onde. Or l'acuité varie énormément, dans le problème qui nous occupe ici, avec la valeur choisie pour  $\lambda_v$ .

Dans ces calculs, nous avons systématiquement ignoré nos résultats antérieurs, cela afin de pouvoir comparer les diverses méthodes que nous avons utilisées pour déterminer les constantes de sensibilité.

16. — Le calcul de l'index est très rapide. On établit une fois pour toutes une table donnant en fonction de la température  $T$ ,  $10 \log T$  et  $b/T$ . On forme ensuite  $a\lambda_v + \frac{b}{T}$  avec 5, 6 ou 7 chiffres, puis son log avec 5 ou 6 décimales, suivant la grandeur de l'acuité  $a$ . Restent une multiplication et deux additions. Le calcul complet du tableau XVIII, la table préliminaire non comprise, est fait en une demi-heure, avec l'aide d'une machine à multiplier et additionner.

#### VII. DÉTERMINATION DES CONSTANTES DE SENSIBILITÉ A PARTIR DE L'ÉCHELLE D'INDEX, EMPLOI DE L'ÉQUATION DE PLANCK.

17. — Ce problème peut être résolu de la façon suivante. Admettons les valeurs de la correction Wien-Planck du tableau II. Ramenons l'échelle donnée d'index à l'équation spectrale de Wien, puis appliquons les méthodes employées précédemment. Le tableau XIX donne l'essentiel de ce calcul.

Le procédé de la courbe diamétrale conjuguée aux directions horizontales donne la température du minimum. Graphiquement, on trouve  $T_m = 6550^\circ$ , d'où  $\lambda_v = 5,47 \times 10^{-5}$  cm.

Pour vérifier que le minimum de l'index est pratiquement nul, remplaçons la portion de la courbe représentant l'index au voisinage du minimum par une parabole. Prenant quatre valeurs, correspondant aux températures de 4500, 6000, 7500

TABLEAU XIX.

T	I donné	$\Delta I$	$I_w$	$\frac{dI_w}{dT} \frac{\text{mag}}{1000^\circ}$
2540	2,53	0,00	2,53	—
3000	1,61	0,00	1,61	—
3600	0,88	0,00	0,88	—
4500	0,30	0,00	0,30	—
6000	0,00	0,01	0,01	—
				+ 0,020
7500	0,00	0,04	0,04	
				107
9000	0,14	0,06	0,20	
				153
10500	0,33	0,10	0,43	
				153
12000	0,53	0,13	0,66	
				167
15000	0,96	0,20	1,16	
				148
20000	1,60	0,35	1,95	
				+ 0,134
25000	2,15	0,47	2,62	

et 9000°, on trouve 0,005 pour le minimum de l'index  $I_w$ . Nous négligerons cette correction.

18. — Pour l'acuité, le critère de l'inflexion donne  $a = 57$ , en adoptant la valeur  $1,60 \times 10^{-4} \frac{\text{mag}}{\text{degré}}$  pour la pente de la courbe en ce point. Cette valeur de l'acuité est trop petite puisqu'elle est moindre que celle donnée par la théorie de première approximation, pour la région des températures basses, où les deux lois de Wien et de Planck sont pratiquement confondues.

D'ailleurs, la pente de la courbe à l'inflexion est mal déterminée. Si l'on fait le calcul avec une dérivée de 1,67 au lieu de 1,60, on trouve une acuité infinie.

Faisons un premier calcul avec  $a = 100$  et  $T_m = 6550^\circ$ . Il vient

$$I = 10 \log T + 260 \log \left( 547 \cdot 10^{-5} + \frac{b}{T} \right) - \Delta I - \varepsilon ,$$

formule qui fournit les valeurs  $I_{100}$  du tableau XX. On voit immédiatement que les résidus possèdent un caractère systématique, puisqu'ils sont de signe constant de chaque côté du minimum.

19. — Comme les résidus sont petits, on pourrait se proposer de déterminer les améliorations à apporter aux constantes de sensibilité par des équations aux résidus. Ce calcul ne présente aucune difficulté et les opérations numériques à effectuer n'ont rien de prohibitif, puisque l'équation différentielle donnant les résidus est

$$dI = \text{Log} \left( a\lambda_v + \frac{b}{T} \right) d(2,5[a + 4]) + \frac{2,5(a + 4)}{a\lambda_v + \frac{b}{T}} \cdot d(a\lambda_v) - d\varepsilon .$$

Dans le cas particulier, l'application de la méthode des moindres carrés au système d'équations correspondantes conduit à deux équations normales, presque identiques, à un coefficient numérique près. Pratiquement, on ne dispose donc que d'une seule équation pour déterminer les deux améliorations à apporter aux deux constantes de sensibilité.

20. — Reprenons la discussion raisonnée des résidus. Leur caractère montre que la courbe représentant l'index en fonction de la température doit être décalée vers les températures basses. Autrement dit, la valeur  $T_m = 6550^\circ$  est trop élevée et  $\lambda_v = 5,47 \times 10^{-5}$  cm est trop petit.

Reprenons donc le calcul avec  $\lambda_v = 5,50 \times 10^{-5}$  cm ou  $T_m = 6520^\circ$ . Après quelques essais, retenons la valeur  $a = 116$  de l'acuité, qui donne la formule

$$I = 10 \log T + 300 \log \left( 638 \cdot 10^{-5} + \frac{b}{T} \right) - \Delta I - \varepsilon .$$

Les valeurs correspondantes figurent sur le tableau XX dans la colonne  $I_{116}$ . On constate que l'échelle donnée est reproduite à 0,02 mag près.

TABLEAU XX.

*Index calculé pour diverses acuités, théorie complète.*

T	I donné	I <sub>100</sub>	Résidus	I <sub>116</sub>	Résidus
2540	2,53	2,53	0,00	2,55	— 0,02
3000	1,61	1,63	— 0,02	1,64	— 0,03
3600	0,88	0,90	— 0,02	0,91	— 0,03
4500	0,30	0,32	— 0,02	0,30	0,00
6000	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
7500	0,00	0,00	0,00	0,03	— 0,03
9000	0,14	0,12	+ 0,02	0,16	— 0,02
10500	0,33	0,31	+ 0,02	0,34	— 0,01
12000	0,53	0,50	+ 0,03	0,54	— 0,01
15000	0,96	0,91	+ 0,05	0,95	+ 0,01
20000	1,60	1,54	+ 0,06	1,59	+ 0,01
25000	2,15	2,09	+ 0,06	2,14	+ 0,01

Nous pourrions évidemment pousser plus loin le calcul, et avec succès, puisque nous savons que l'index calculé directement reproduit l'échelle de Bleksley avec des résidus ne dépassant pas 0,01 mag. Cela est inutile pour le but que nous poursuivons ici, qui est de comparer les méthodes directe et indirecte de détermination des constantes de sensibilité.

VIII. COMPARAISON DES RÉSULTATS.

21. — Rassemblons les constantes de sensibilité de l'œil déduites des travaux de Bleksley:

Méthode	$\lambda_v$ 10 <sup>-5</sup> cm	a
Courbe de sensibilité . .	5,5464	165
Index, loi de Wien . . .	5,39	70
Index, loi de Planck . .	5,50	116

La méthode directe est de beaucoup la plus précise pour la détermination des deux constantes. L'application de l'équation spectrale de Planck donne des résultats acceptables et qui ne

sont pas entachés d'une erreur systématique comme ceux déduits de l'équation spectrale de Wien.

Cette dernière équation conduit à des résultats erronés dans le sens suivant: la température du minimum de l'index est trop élevée (de 1,8% théoriquement) et la longueur d'onde du maximum de sensibilité trop petite. Pour cette constante, l'application de cette correction donne  $5,49 \times 10^{-5}$  cm, à partir de la valeur  $5,39 \times 10^{-5}$  cm.

Il y a pratiquement coïncidence entre cette dernière valeur et celle donnée par l'application de la théorie complète.

Insistons sur le fait que la théorie de première approximation donne des valeurs de l'acuité très inférieures à celles correspondant à la théorie complète.

#### IX. CONCLUSIONS.

22. — Etablissons la liste de diverses déterminations de la longueur d'onde du maximum de sensibilité de l'œil et de l'acuité.

La plupart des  $\lambda_v$  sont groupés autour de  $5,5 \times 10^{-5}$  cm. Quelques-uns sont inférieurs et voisins de  $5,3 \times 10^{-5}$  cm. Nous ignorons la méthode utilisée par Brill. Pour les autres valeurs, de l'ordre de  $5,3 \times 10^{-5}$  cm, elles résultent toujours de l'application de l'équation spectrale de Wien. Ce procédé a une influence systématique sur le résultat.

Considérons les deux valeurs résultant de l'étude d'échelles d'index de couleur photo-visuels. Peut-être l'échelle King-Wilsing fournit-elle un  $\lambda_v$  trop petit parce que la correction Wien-Planck a été négligée. Mais alors l'échelle Graff devrait donner, en tenant compte de cette correction, une valeur supérieure à  $5,50 \times 10^{-5}$  cm. Nous savons d'ailleurs<sup>1</sup> que la correction Wien-Planck est très petite dans le cas d'un index photo-visuel, car elle dépend de la différence des deux corrections relatives aux deux récepteurs considérés. La détermination des constantes de sensibilité au moyen de l'index de couleur

<sup>1</sup> (II, § 14).

TABLEAU XXI.

Constantes de sensibilité de l'œil.

Méthode	Equation spectrale	Echelle	$\lambda_v$ 10 <sup>-5</sup> cm	$a$	Reference	
Index photo-visuel . . . . .	Wien	Graff	5,50	51	1	
	Wien	King-Wilsing	5,31	51,8	1	
Longueur d'onde effective . . .	Wien	Maggini	5,55	161	2	
Index absolu . . .	Wien	Eddington	5,35	86	3	
	Planck	»	5,50	150	3	
	Wien	Bottlinger	5,50	49	4	
	Wien	Hertzprung	5,309	50,1	5	
	Planck	»	5,45	—	6	
	Wien	Bleksley	5,39	70	7	
	Planck	»	5,50	116	8	
	Méthode directe .	—	»	5,5464	165	9
		—	Nutting	5,50	181	10
—		Henning	5,52	140	11	
—		Bender	5,5 <sup>1</sup>	—	12	
—		»	5,2 <sup>2</sup>	—	12	
—	Brill	5,29	—	13		

<sup>1</sup> Fovea.

<sup>2</sup> A 20° de la fovea.

Références.

1. (I, §§ 37 et 50).
2. (I, §§ 44 et 50).
3. § 5.
4. (I, §§ 47 et 50).
5. (I, §§ 48 et 50).
6. § 7.
7. §§ 15 et 21.
8. §§ 19 et 21.
9. §§ 10, 11 et 21.
10. *Philosophical Magazine*, 29, 1915.
11. *Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik*, 1919, 1.
12. Untersuchungen am Lummer-Pringsheimschen Spektralflickerphotometer, cité par J. WILSING: Messungen der Farben, der Helligkeit und der Furchmesser der Sterne mit Anwendung der Plankschen Gleichung. *Publikationen des Astrophysikalischen Observatorium zu Potsdam*, 76, vol. 24, 3 (1920), p. 16.
13. *Astronomische Nachrichten*, 219, 5254 (1923).

est basée sur l'application simultanée de la théorie à l'œil et aux plaques photographiques. On sait la variété énorme de ces dernières.

Les premières valeurs que nous avons obtenues de l'acuité sont celles relatives à l'index de couleur photo-visuel; elles sont voisines de 50. Les premières études de l'index absolu, basées sur l'équation spectrale de Wien ont donné des résultats du même ordre de grandeur. Cette concordance des deux groupes de résultat nous avait conduit à cette conclusion que l'acuité de la sensibilité de l'œil est différente dans le cas des points lumineux d'intensité relativement faible qui apparaissent en astronomie, de celui des plages et des éclaircissements normaux des recherches de psycho-physiologie.

L'application de l'équation spectrale de Planck provoque une revision de cette conclusion: l'acuité correspondant aux circonstances astronomiques est probablement du même ordre de grandeur que celle provenant de l'étude directe de l'œil, soit environ 150. Cependant, comme la plupart des échelles d'index absolus sont basées sur les recherches des psycho-physiciens, ce serait un cercle vicieux de chercher à déterminer l'acuité au moyen de ces échelles. Seule l'étude, citée dans le tableau XXI, d'une échelle de longueurs d'onde effectives visuelles constitue une détermination réellement indépendante; l'acuité ainsi déterminée est 161, soit pratiquement la même que celle (165) résultant de la sensibilité admise par Bleksley. Cette coïncidence est remarquable.

*Observatoire de Genève.*

---