Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles
Band: 22 (1940)

Artikel: Sur l'intégrale de Cauchy étendue à une ligne ouverte
Autor: Wavre, Rolin
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-741691

Séance du 6 juin 1940.

Rolin Wavre. — *Sur l'intégrale de Cauchy étendue à une ligne ouverte.*

Dans cette petite note je voudrais exposer un ordre de recherche qui me paraît digne de la curiosité des mathématiciens. Il est d'ailleurs en relation avec des problèmes de la théorie du potentiel logarithmique. Dans le plan complexe donnons-nous deux variables x et z, puis une ligne C ouverte, enfin une fonction $f(z)$ holomorphe sur C, extrémités comprises. (La fonction $f(z)$ devra être multiforme, de sorte que C est supposée ouverte sur la surface de Riemann.)

Quelle doit être la fonction $f(z)$ pour que l'on ait dans un certain domaine D

$$\int_C \frac{f(z)}{z-x}\, dz \equiv 0 \; .$$

On démontre facilement que le domaine D a une frontière qui est sur C et que si l'on traverse C en un point M on aura de l'autre côté, $f_M(x)$ étant la détermination de f sur C au point M,

$$\int_C \frac{f(z)}{z-x}\, dz = \pm\; 2\pi i f_M(x) \; . \tag{1}$$

Pour éviter des longueurs je supposerai que C, qui doit se recouper, admette une seule boucle et que l'intégrale soit identiquement nulle dans la boucle. C part donc d'une extrémité a, va au point double, décrit la boucle, revient au point double et va en b. On démontre que a et b sont dans le domaine connexe du point à l'infini, par rapport à la boucle. La branche $f_a(z)$ donnée en a doit, à partir d'un point de la boucle, aller se ramifier autour de b et admettre $f_b(z)$ comme fonction période et réciproquement. On a donc

$$f_a(z) = -\, f_b(z) \log(z-b) + h_b(z)$$

$$f_b(z) = +\, f_a(z) \log(z-a) + h_a(z) \; .$$

Chaque branche admet l'autre comme fonction période, les fonctions h sont holomorphes autour de b ou de a respectivement.

La fonction f doit être solution d'une équation linéaire du second ordre à coefficients uniformes. En effet, si l'on écrit:

$$\begin{vmatrix} f & f_a & f_b \\ f' & f'_a & f'_b \\ f'' & f''_a & f''_b \end{vmatrix} \equiv 0 \qquad \text{soit} \quad \varphi f'' - \varphi' f' + \psi f = 0$$

la fonction φ se forme facilement à partir des expressions ci-dessus

$$\varphi = f'_a f_b - f_a f'_b = f'_a h_a - f_a h'_a - \frac{f_a^2}{z - a};$$

elle est bien uniforme en a et aussi en b, de même pour φ' et ψ.

Le problème posé est ainsi ramené à trouver des solutions multiformes d'une équation linéaire du second ordre ayant deux branches au moins et telles que l'une admette l'autre comme fonction période. L'équation déterminante doit alors avoir une racine double entière et le groupe des substitutions des solutions une structure qu'il serait facile de dégager.

Mais existe-t-il des solutions de cette forme ? S'il n'en existait pas on pourrait conclure à une sorte de réciproque, tout au moins partielle, du théorème de Cauchy concernant les contours fermés.

Qui voudrait poursuivre cette recherche devrait tenir compte que les lignes C se laissent facilement ramener, en vertu même de la relation (1) à d'autres lignes de forme canoniques, telles que des droites et un certain nombre de lacets.

Robert Soudan. — *Sur la déformabilité d'un corps à potentiel constant.*

Nous nous proposons ici de traiter le problème suivant: Peut-on déformer un corps homogène sans que son potentiel ne change en aucun point de l'espace extérieur ? En particulier, nous montrerons que l'on peut déterminer une déformation