UNE MÉTHODE NOUVELLE
DE LA
QUANTIFICATION DES CHAMPS

PAR

E. C. G. STUECKELBERG

(Avec 6 fig.)

(suite)

PARTIE II

La quantification du champ non chargé.

§ 7. — La quantification symétrique (statistique Bose-Einstein).

La théorie des quanta associe à toute grandeur physique a un opérateur hermitéique (que nous désignerons par le même symbole a).

Deux grandeurs a et b peuvent être mesurées avec une précision limitée par les incertitudes Δa et Δb. Celles-ci sont reliées entre elles par le *principe de Heisenberg*:

$$\Delta a \,.\, \Delta b \geqslant \frac{1}{4} \left| \overline{j[a,\ b]^{(-)}} \right| \tag{7.1}$$

Dans le deuxième membre $[a, b]^{(-)}$ est l'opérateur antihermitéique défini par la (deuxième) équation:

$$[a,\ b]^{(\pm)} = ab \pm ba \tag{7.2}$$

j est un opérateur antihermitéique, qui commute avec tous les autres opérateurs de la théorie. $j[a,\ b]^{(-)}$ est ainsi un opérateur hermitéique. $\bar{a}$ est l'espérance mathématique de l'opérateur a.

La quantification de notre théorie introduit un opérateur hermitéique $D^{(-)}$

$$\left[u(x)_A\,,\ u(y)_B\right]^{(-)} = j\,D^{(-)}(x\,,\ y)_{AB} \qquad (7.3)$$ [1]

qui doit avoir les propriétés suivantes:

1° Satisfaire à l'équation d'onde par rapport à $(x\mathrm{A})$ et $(y\mathrm{B})$;

2° Etre *antisymétrique* en $(x\mathrm{A})$ et $(y\mathrm{B})$ (équations (3.13) et (3.14) pour $D^{(n-)}$);

3° Disparaître pour des grandes distances spatiales $(R^2 \gg \varkappa^{-2})$.

Tandis que les conditions 1° et 2° sont des conséquences mathématiques de la définition (7.3), la condition 3° contient un argument physique: Elle postule qu'on peut mesurer simultanément $u(x)_A$ et $u(y)_B$ avec une précision arbitrairement grande, si les deux événements sont situés spatialement et à des grandes distances. Cette condition est nécessaire parce qu'une mesure faite à l'événement x ne peut influencer que des événements y qui sont en rapport causal avec x (y situé *temporellement* par rapport à x, soit $R^2 < 0$) et des événements y qui sont « *spatialement très près* » de x, soit $R^2 \sim \varkappa^{-2}$.

La condition (7.3) aboutit à la statistique de Bose-Einstein (BE) pour les quanta associés au champ. Toutes les fonctions $D^{(n-)}$ du § 3 ont les propriétés voulues.

§ 8. — La quantification antisymétrique (statistique de Fermi-Dirac).

Les grandeurs J^α et $T^{\alpha\beta}$ peuvent être considérées comme formées par l'opération

$$\begin{aligned} J^\alpha(x) &= e\,\gamma^{\alpha\,AB}\,U(x\,,\ x)_{AB}\ ; \\ T^{\alpha\beta}(x) &= h \lim_{x=y} \partial^\alpha(y)\ \beta^{\beta\,AB}\,U(x\,,\ y)_{AB} \end{aligned} \qquad (8.1)$$ [2]

[1] Cette relation doit être complétée, si $u_A^+ \neq u_A$, par

$$[u_A^+\,,\ u_B]^{(-)} = D'_{AB} \quad \text{et} \quad [u_A^+\,,\ u_B^+]^{(-)} = D''_{AB}\ .$$

[2] J^α est écrit pour des rep. biv. et $T^{\alpha\beta}$ pour des rep. univ., mais (8.1) s'applique aussi dans les autres cas avec γ et β interchangés. (8.1) n'est valable que pour la théorie sans interaction (§ 6).

avec $\partial_\alpha(y) = \partial/\partial y^\alpha$, opérant sur une fonction à deux indices (*double fonction*)

$$\mathrm{U}(x, y)_{\mathrm{AB}} \qquad \left(= u^+(x)_\mathrm{A}\, u(y)_\mathrm{B}\right) . \tag{8.2}$$

Pour que les lois de conservation soient satisfaites, il suffit de demander que la double fonction U_{AB} soit solution de l'équation d'ondes pour (xA) et (yB) (comme l'était $\mathrm{D}^{(n)}_{\mathrm{AB}}$). Le deuxième membre de (8.2) est une fonction particulière de ce type.

L'algèbre des grandeurs non commutatives a, b, c et d contient l'identité suivante:

$$\begin{aligned}[ab\,,\, cd]^{(-)} = &+ a[b\,,\, c]^{(\mp)} d \pm [a\,,\, c]^{(\mp)} bd \\ &+ ca[b\,,\, d]^{(\mp)} \pm c[a\,,\, d]^{(\mp)} b\ .\end{aligned} \tag{8.3}$$

Si l'on identifie $u^+(x)_\mathrm{A}$ avec a, $u(x)_\mathrm{B}$ avec b, $u^+(y)_\mathrm{C}$ avec c et $u(y)_\mathrm{D}$ avec d, (8.3) montre que le commutateur a la forme (nous supprimons les indices pour ces discussions de l'ordre de grandeur)

$$\left[\mathrm{U}(x, x)\,,\, \mathrm{U}(y, y)\right]^{(-)} \sim j\,\mathrm{U}(x, y)\, \mathrm{D}^{(\cdot)}(x, y) \tag{8.4}$$

(avec $\mathrm{D}^{(\cdot)} = \mathrm{D}^{(-)}$), si l'on utilise la formule (7.3). Mais l'équation

$$\left[u(x)_\mathrm{A}\,,\, u(y)_\mathrm{B}\right]^{(+)} = \mathrm{D}^{(+)}(x, y)_{\mathrm{AB}} \tag{8.5}$$ [1]

amène au même résultat (8.4) (avec $\mathrm{D}^{(\cdot)} = \mathrm{D}^{(+)}$). Or une théorie qui est basée sur (8.5) avec un $\mathrm{D}^{(+)}$ qui satisfait aux conditions 1°, 2° [2] et 3° du § 7, donne les mêmes résultats pour les incertitudes des densités d'énergie et de charge, soit:

$$\left.\begin{aligned}\Delta\mathrm{T}(x)\,.\,\Delta\mathrm{T}(y) &\gtrsim \left|\overline{\mathrm{T}}\, h\, \partial\, \mathrm{D}(x, y)\right| \\ \Delta\mathrm{J}(x)\,.\,\Delta\mathrm{J}(y) &\gtrsim \left|\overline{\mathrm{J}}\, e\, \mathrm{D}(x, y)\right| .\end{aligned}\right\} \tag{8.6}$$

Les densités d'énergie ou de la charge ne peuvent être mesurées qu'à une précision $\Delta\mathrm{T}$ près, qui est proportionnelle à une « den-

[1] Voir note de l'équation (7.3) avec $[,]^+$ à la place de $[,]^-$.
[2] A lire « *symétrique* » en condition 2°.

sité moyenne » $\overline{T}$. Si $T(x) \sim T(y) \sim \overline{T}$, la relation prend la forme

$$\left(\frac{\Delta T}{\overline{T}}\right)^2 \geqslant \frac{|h \partial D(x, y)|}{|\overline{T}|} \; ; \quad \left(\frac{\Delta J}{\overline{J}}\right)^2 \geqslant \frac{|e D(x, y)|}{|\overline{J}|} \, . \tag{8.7}$$

L'erreur en pour cent diminue ou si la distance spatiale R^2 augmente ou si, pour un R^2 donné, $|\overline{T}|$ (ou $|\overline{J}|$) augmente. Les incertitudes disparaissent pour des grandes distances spatiales $R^2 \gg \varkappa^{-2}$ et pour des densités d'énergie (ou de charge) très fortes. L'erreur (ou la fluctuation) devient alors négligeable. Autrement dit, pour une « grande densité de quanta », la fluctuation de ces densités devient minime.

Ces raisonnements s'appliquent ainsi aux *deux lois* (7.3) et (8.5). Mais, en utilisant la loi (7.3), on a introduit le champ u_A comme une grandeur physique, qui peut être mesurée avec une précision limitée par (7.1) et (7.3). La loi d'anticommutation par contre, n'admet jamais une connaissance de $u(x)_A$, même à deux endroits différents. *Le champ anticommutatif est inobservable.*

§ 9. — Les seize théories a priori possibles.

En théorie classique, nous avions quatre types de théories distinctes, qui étaient à priori possibles. D'abord u_A pouvait appartenir à une *rep. biv* ou à une *rep. univ*. Ensuite, nous avions le choix entre $u_A^+ = u_A$ ou $u_A^+ \neq u_A$.

Pour des raisons de causalité, nous avons dû exclure les théories qui faisaient correspondre à l'énergie totale une grandeur H_u négative ou identiquement nulle. Il ne restait de ces quatre théories que celle avec $u_A^+ = \varepsilon u_A$ pour la rep. biv. et celle avec $u_A^+ = u_A$ pour la rep. univ. $\big($(5.16) et (5.20)$\big)$.

A ces $2 \times 2 = 4$ possibilités classiques, la théorie des quanta ajoute l'alternative entre *la statistique FD et la statistique BE*. Ensuite, l'existence de deux types de fonctions $D^{(2n)}$ ou $D^{(2n+1)}$ permet de choisir dans chacun de ces $2 \times 4 = 8$ types entre l'application de $D^{(0)}$ et $D^{(1)}$ [1]. Pour pouvoir choisir entre ces

[1] Ou $D^{(2n)}$ et $D^{(2n+1)}$ si $D^{(2n)} \neq D^{(0)}$.

$2^4 = 16$ types différents, nous avons besoin de deux critères physiques:

Le *premier critère* est celui, déjà existant en théorie classique soit $H_u > 0$.

Le *deuxième critère* demande que les différences entre les valeurs propres de l'*énergie totale par onde* de fréquence k_r^4 cm^{-1} soient les multiples entiers de hk_r^4:

$$H_r = hk_r^4(N_r + \text{const}_r) \; ; \qquad N_r = \text{entier} \; . \qquad (9.1)$$

Pour soumettre à ces critères les seize théories, nous constatons que les quantifications FD (8.5) et BE (7.3) ont pour conséquence les deux relations opératorielles cf. (3.9) et (3.13):

$$\delta\big(\varkappa(\mu) - \varkappa\big)\big[a(\mu)\,,\; a(\mu')\big]^{(\pm)} = \binom{1}{j} \rho^{(n\pm)-1}(\mu/\mu') \; . \qquad (9.2)\ [1]$$

Par intégration sur l'indice continu μ (cf. (5.3)) et à la suite de l'introduction de l'indice p, cette formule devient avec les définitions de a_r en (5.5):

$$[a_{mp}\,,\; a_{m'p'}]^{(\pm)} = \binom{1}{j} \rho^{(n\pm)-1}_{(mp),\,(m'p')} \qquad (9.3)\ [2]$$

$\rho^{(n\pm)}$ peut toujours être mis sous la forme (cf. § 5):

$$\rho^{(n\pm)}_{(mp),\,(m'p')} = \rho^{(n)}_m\, \delta_{mm'} \begin{pmatrix} \delta_{pp'} \\ i_{pp'} \end{pmatrix} . \qquad (9.4)\ [2]$$

Dans le cas FD, (9.3) contient une contradiction algébrique si un seul $\rho_m^{(n)} < 0$. La seule possibilité est alors $u_A = 0$ et $D = 0$. Dans ce cas toutes les grandeurs disparaissent. D'autre part, les valeurs propres de la grandeur

$$\frac{1}{4}\, j\,(a_{mp}\, a_{mq} - a_{mq}\, a_{mp}) = \frac{1}{\left|\rho_m^{(n)}\right|} M_m \qquad (9.6)$$

[1] $\rho^{(n\pm)}$ est une *matrice quelconque* qui définit la fonction générale (3.20).

[2] L'indice m, distinct de r, implique un système $S(mp/x)_A$ arbitraire qui existe aussi si une force $\chi_B{}^A$ est présente.

sont données par:

$$\text{val. prop. } \mathrm{M}_m = -\frac{1}{2}, \ +\frac{1}{2} \qquad (9.7)$$

si $\rho_m^{(n)} > 0$ pour tout m. Dans le cas BE, la condition $\rho_m^{(n)} > 0$ n'est pas nécessaire. On introduit M_m par la définition:

$$\frac{1}{2}\left(a_{mp}^2 + a_{mq}^2\right) = \frac{1}{\left|\rho_m^{(n)}\right|}\mathrm{M}_m \ . \qquad (9.8)$$

Les valeurs propres sont:

$$\text{val. prop. } \mathrm{M}_m = \frac{1}{2}, \ \frac{1}{2}+1, \ \frac{1}{2}+2, \ \ldots \ . \qquad (9.9)$$

Si les « forces » sont identiquement nulles, toutes les seize théories (cf. (5.8) et (5.19)) donnent des valeurs propres à différence entières, ou une seule valeur propre, si on pose $\mathrm{D}^{(\ )} = \mathrm{D}^{(n)}$ et $u_{\mathrm{A}}^{+} = \varepsilon^n u_{\mathrm{A}}$.

En effet, l'opération $u_{\mathrm{A}}^{+} = \varepsilon u_{\mathrm{A}}$ ne fait que substituer $\pm a_{mp}$ pour a_{mq}, parce que $\rho_r^{(1)}/\rho_r^{(0)} = \pm 1$.

Par contre, si la « force » $\chi(x)_{\mathrm{B}}{}^{\mathrm{A}}$ dépend du temps, la matrice ε (3.15) n'est pas diagonale ni dans le système $m, n, \ldots$ où $\rho^{(1)}$ est diagonal, ni dans le système $\mu, \nu \ldots$ où $\rho^{(0)}$ est diagonal. Donc a_{mp}^{+} (ou $a_{\mu p}^{+}$) du § 6 est une combinaison linéaire entre a_{mp} (ou $a_{\mu p}$) et a_{np} (ou $a_{\nu n}$) qui appartient à une autre solution du système (cf. figures 1 à 4) [1]. Ceci montre que dans ce cas général, où $\chi(x)_{\mathrm{B}}{}^{\mathrm{A}}$ dépend du temps, le premier terme de l'expression (6.15) ou (6.16) (multiplié par j, si l'on a FD) [2] a la forme (9.1) seulement si l'on définit:

$$u_{\mathrm{A}}^{+} = u_{\mathrm{A}} \ . \qquad (9.10)$$

[1] Le même est vrai pour tout autre a_{mp}^{+} qui, commutant ou anticommutant avec $a_{m'p'}$, fournit une matrice $\rho^{(n)} = f(\varepsilon)\,\rho^{(0)}$. Une telle matrice produit les fonctions D_{AB} générales discutées au § 3.

[2] Et un facteur $\frac{1}{4}$ pour FD ou $\frac{1}{2}$ pour BE.

En plus, il faut démontrer que [1]

$$\left|\rho_{\mu}^{(n)}\right| = \left|\rho_{m}^{(n)}\right| = \left|\rho_{r}^{(0)}\right| . \tag{9.11}$$

On vérifiera ((9.17) et suiv., (16.5) et suiv.) que seuls $\rho^{(0)}$ et $\rho^{(1)}$ satisfont à cette condition. La condition (9.10) exclut les théories $u_{\mathrm{A}}^{+} \neq u_{\mathrm{A}}$ qui étaient possibles en théorie classique. Ceci réduit nos seize théories à huit types seulement.

La non-commutativité des opérateurs u_{A} et u_{B} demande qu'on remplace la grandeur $\mathrm{U}(x, y)_{\mathrm{AB}}$ en (8.1) par $\mathrm{U}_{\mathrm{AB}}^{(+)}$ ou $\mathrm{U}_{\mathrm{AB}}^{(-)}$

$$\mathrm{U}(x,\, y)_{\mathrm{AB}}^{(\pm)} = \binom{1}{j} \frac{1}{2} \left[u(x)_{\mathrm{A}},\, u(y)_{\mathrm{B}}\right]^{(\pm)} \tag{9.12}$$ [2]

qui sont les deux des opérateurs hermitéiques.

Pour des *rep. biv.*, l'énergie totale, formée de ces opérateurs a la forme (6.15) ou (6.16) (avec $a^{+} = a$) multiplié par $\frac{1}{4} j$, si l'on pose $\mathrm{U} = \mathrm{U}^{(-)}$. Si l'on posait $\mathrm{U} = \mathrm{U}^{(+)}$, la symétrie des $\gamma^{\alpha\mathrm{AB}}$ n'aurait pour conséquence qu'*une seule valeur propre* $\mathrm{H}_{r} = \text{const.}$

Analoguement, pour des *rep. univ.* (6.15) ou (6.16), avec la substitution (6.17), représente l'énergie totale, si l'on pose $\mathrm{U} = \mathrm{U}^{(+)}$. L'identification $\mathrm{U} = \mathrm{U}^{(-)}$ donne ici le résultat $\mathrm{H}_{r} = \text{const.}$ $\left(\text{Voir un facteur } \frac{1}{2}\right)$.

Si l'on choisit pour les rep. biv. la loi de BE, il résultera $\mathrm{U}_{\mathrm{AB}}^{(-)} = j \frac{1}{2} \mathrm{D}_{\mathrm{AB}}^{(n-)}$ et l'énergie totale par onde sera *un nombre* donné, c'est-à-dire, encore une fois, on n'aurait qu'*une seule valeur propre*. Il en est de même pour les rep. univ. avec la loi de FD $\left(\mathrm{U}_{\mathrm{AB}}^{(+)} = \frac{1}{2} \mathrm{D}_{\mathrm{AB}}^{(n+)}\right)$.

Donc, les seules possibilités qui fournissent une énergie par onde qui peut prendre *différentes valeurs propres* sont: ou rep. biv. avec quantification FD ou rep. univ. avec quantification BE. Il nous reste à choisir les fonctions $\mathrm{D}^{(n)}$. Ne peuvent intervenir à la suite de (9.11) que $\mathrm{D}^{(0+)}$ pour la rep. biv. et

[1] L'indice r se réfère à des *ondes planes*, tandis que m (ou μ) dénombrent un système de *solutions*, cf. fig. 1 à 4.

[2] Le facteur $\frac{1}{2}$ doit être remplacé par $\frac{1}{4}$ pour le cas FD.

$D^{(0-)}$ pour la rep. univ. parce que les deux fonctions $D^{(1+)}$ et $D^{(1-)}$ n'existent pas dans ces deux cas, cf. § 4. Les seules théories physiquement possibles parmi les seize possibilités sont:

Tableau I.

Les théories du champ non charge.

u_A^+	$\theta^{(g)} : g =$	statistique	fonction $D^{(n)}$
$= u_A$	$N + \frac{1}{2}$	FD	$D^{(0+)}$
$= u_A$	N	BE	$D^{(0-)}$

Pour pouvoir appliquer (9.4) et suivantes, il faut que $\rho^{(0)}$ soit diagonal. On doit choisir le système de fonctions μ, ν ... (figures 1 et 2). (9.11) est ainsi satisfait.

Si nous utilisons la relation entre représentation et spin, ce résultat peut être formulé de la manière suivante: *Les quanta associés à une rep. biv. (rep. univ.) ont un spin demi-entier* $N + 1/2$ *(respectivement entier* N) *et suivent la statistique FD (respectivement BE). La fonction invariante est la fonction* $D^{(0+)}$ *(respectivement* $D^{(0-)}$).

Elimination de la zéro-point énergie.

L'utilisation de $D^{(0)}$ nous a amené à l'expression (6.16). Les valeurs propres de l'énergie sont ($\sum_\mu$ implique la somme sur μ et ν)[1]:

$$H'_u = h \sum_\mu \rho_\mu^{(0)} k_\mu^4 M_\mu \,. \tag{9.14}$$

Le critère 2° est satisfait.

Mais suivant (9.14) et (9.7) (ou (9.9)) une onde ne peut jamais porter l'énergie nulle. On peut remédier à ce défaut en définissant

$$U(x, y)_{AB} = U(x, y)_{AB}^{(\mp)} - \frac{1}{4} D^{(1\mp)}(x, y)_{AB} \tag{9.15}$$

[1] $\rho_\mu^{(0)} = \rho_r^{(0)}$; $k_\mu^4 = k_r^4$, etc., voir note p. 270.

où le signe — (respectivement +) se réfert aux rep. biv. (respectivement univ.). En effet, la fonction $D^{(1-)}$ contribue à l'énergie totale pour $x^4 \ll 0$ (de la rep. biv.) en vertu de sa définition (3.13) et de (5.7)

$$\frac{1}{4} h \int (dx)^3 \gamma^{4AB} \lim_{x=y} \partial^4 (y)\, D^{(1-)}(x, y)_{AB}$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{\mu} \sum_{p} \sum_{p'} \sum_{p''} \rho_{\mu}^{(0)} i_{pp'} \rho_{\mu\mu}^{(1)-1} i_{p'p''} k_{\mu}^{4} . \qquad (9.16)$$

Avec $(i^2)_{pp''} = -\delta_{pp''}$ et $\Sigma \delta_{pp} = 2$ le terme ajouté enlève un $\pm \frac{1}{2}$ en M_{μ}, si on peut démontrer que l'élément $\left|\rho_{\mu\mu}^{(1)-1}\right|$ de la matrice inverse $\rho^{(1)-1}$ est égal à $\left|\rho_{\mu}^{(0)}\right|^{-1}$.

Pour cette démonstration nous évaluons la matrice $\rho^{(1)}$ pour les deux fonctions μ et ν des figures 1 et 2. On a d'abord

$$\rho^{(0)} = \begin{pmatrix} \rho_{\mu\mu}^{(0)}, & \rho_{\mu\nu}^{(0)} \\ \rho_{\nu\mu}^{(0)}, & \rho_{\nu\nu}^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{r}^{(0)}, & 0 \\ 0, & \rho_{s}^{(0)} \end{pmatrix} . \qquad (9.17)$$

Les lignes et colonnes de (9.17), (9.18), (9.20) et (9.21) se réfèrent à μ et ν. (Les matrices $i_{pp'}$ et $\delta_{pp'}$ sont omises).

La matrice $\rho^{(1)}$ a la forme ($\pm$ = rep. $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{biv.}}{\text{univ.}}$):

$$\rho^{(1)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1+b^2)\rho_r^{(1)} + a^2 \rho_s^{(1)}, & ab\left(\rho_r^{(1)} \pm \rho_s^{(1)}\right) \\ ab\left(\rho_r^{(1)} \pm \rho_s^{(1)}\right), & (1+b^2)\rho_s^{(1)} + a^2 \rho_r^{(1)} \end{pmatrix} . \qquad (9.18)\,[1]$$

Cette relation est obtenue par une intégration spatio-temporelle. On a utilisé le résultat suivant: « L'intégration sur le demi-espace-temps d'une onde plane donne la moitié de l'intégrale sur l'univers entier, si les contributions à la limite $x^4 \cong 0$ sont compensées ».

L'équation

$$\rho_r^{(0)} = \rho_{r'}^{(0)} = b^2 \rho_{r'}^{(0)} + a^2 \rho_{s'}^{(0)} \qquad (9.19)$$

qui est une conséquence de l'équation de continuité, et l'identité

$$\rho_r^{(0)} \rho_s^{(0)} = - \rho_r^{(1)} \rho_s^{(1)} ,$$

[1] Pour la définition de a et b, voir note p. 220 et les fig. 1 et 2.

qui est une conséquence de (5.11) et (5.13), donnent à $\rho^{(1)}$ la forme:

$$\rho^{(1)} = \begin{pmatrix} b^2\,\rho_r^{(1)}\,, & ab\,\rho_r^{(1)} \\ ab\,\rho_r^{(1)}\,, & b^2\,\rho_s^{(1)} \end{pmatrix}. \tag{9.20}$$

L'inverse de cette matrice est

$$\rho^{(1)-1} = \begin{pmatrix} \rho_r^{(1)-1}\,, & -\dfrac{a}{b}\,\rho_s^{(1)-1} \\ -\dfrac{a}{b}\,\rho_s^{(1)-1}\,, & \rho_s^{(1)-1} \end{pmatrix}. \tag{9.21}$$

Ainsi on a $\rho_{\mu\mu}^{(1)-1} = \rho_r^{(1)-1}$; $\rho_{\nu\nu}^{(1)-1} = \rho_s^{(1)-1}$. L'énergie ajoutée par $D^{(1-)}$ en (9.15) vaut

$$H_0 = h \sum_{\mu} \frac{\rho_r^{(0)}}{\rho_r^{(1)}}\, k_r^4\, \frac{1}{2} \tag{9.22}$$

Comme $\rho_r^{(1)}$ change de signe avec k_r^4, tandis que $\rho_r^{(0)}$ garde son signe, on a

$$H_u = H_u' + H_0 = h \sum_{\mu} k_r^4 \left(M_\mu + \frac{\rho_r^{(0)}}{\rho_r^{(1)}}\, \frac{1}{2} \right) = h \sum_{\mu} |\, k_r^4 \,|\, N_\mu \tag{9.23}$$ [1]

$$\text{val. prop. } N_\mu = \frac{1}{2} + \frac{k_r^4}{|\, k_r^4 \,|} M_\mu = 0,\ 1\ . \tag{9.23 a}$$

L'énergie est ainsi toujours positive ou nulle. La contribution à la valeur propre d'une onde plane prend les valeurs postulées dans le critère 2°.

Pour la rep. univ., les considérations sont les mêmes. On n'a qu'à remplacer γ^4 par β^4 et $D^{(1-)}$ par $D^{(1+)}$ dans le premier membre de (9.16). Le deuxième membre reste alors, au signe

[1] La somme sur μ est à effectuer sur tous les μ et ν des fig. 1 et 2. Alors $k_r^4 = k_r^4 > 0$ pour $\mu = \mu$ et $k_r^4 = k_s^4 < 0$ pour $\mu = \nu$.

près, le même, ce qui nous amène à (9.22) changé de signe. L'énergie a la forme

$$H_u = H'_u - H_0 = h \sum_{\mu} \frac{\rho_r^{(0)}}{|\rho_\mu^{(0)}|} k_r^4 \left(M_\mu - \frac{1}{2} \right) = h \sum_{\mu} |k_r^4| N_\mu . \tag{9.24}$$ [1]

$$\text{val. propr. } N_\mu = M_\mu - \frac{1}{2} = 0,\ 1,\ 2,\ \dots . \tag{9.24 a}$$

On vérifie que la charge totale e_u est nulle dans les deux cas (rep. biv. et rep. univ.).

Ceci nous amène à la

§ 9*a*. — Conclusion.

La quantification du champ non chargé est uniquement déterminée, si on demande que les valeurs propres de l'énergie par onde plane soient des multiples entiers et positifs ou nuls (N_μ) de $h|k_r^4|$. Les rep. biv. ont des quanta satisfaisant à la statistique de FD ($N_\mu = 0,1$). Ceux de la rep. univ. obéissent à la statistique de BE ($N_\mu = 0, 1, 2 \dots$).

La charge portée par une ou par plusieurs ondes est toujours nulle.

(à suivre)