

# L'aplatissement terrestre : calculé en seconde approximation

Autor(en): **Ruffet, Jean**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Archives des sciences physiques et naturelles**

Band (Jahr): **25 (1943)**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-742305>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# L'APLATISSEMENT TERRESTRE CALCULÉ EN SECONDE APPROXIMATION

PAR

**Jean RUFFET**

## INTRODUCTION.

Nous nous proposons de résumer dans les pages qui suivent les résultats relatifs à la figure de la terre obtenus dans notre thèse « L'aplatissement terrestre calculé en seconde approximation ».

Nous avons d'abord repris dans une première partie la belle méthode du procédé uniforme proposée par M. Wavre et exposée au chapitre IV de son livre « Figures planétaires et géodésie » en employant un développement initialement différent. Nous avons développé en série suivant les puissances de la vitesse angulaire  $\omega$  non plus le rayon vecteur  $R$  mais l'inverse du carré du rayon polaire  $r$ . Les figures d'équilibre étant voisines des ellipsoïdes, il était naturel de prendre une coordonnée radiale qui eût un développement fini et non illimité pour les ellipsoïdes.

Dans une seconde partie, nous avons appliqué le procédé uniforme en développant suivant les puissances de la vitesse angulaire non seulement l'ellipticité et la pesanteur, mais également la masse totale<sup>1</sup>. L'étude de la constante  $\mu_1$ , qui

<sup>1</sup> En 1937, M<sup>lle</sup> M.-J. Pérau, de Bruxelles, a appliqué le procédé uniforme jusqu'à la troisième approximation en développant la masse en série dans un travail manuscrit dont M. Wavre a eu connaissance et qui, croyons-nous, n'a pas été publié.



s'introduit dans cette recherche, a permis de resserrer l'intervalle de variation de l'inverse d'aplatissement. Rappelons que les données fondamentales sont: le rayon polaire, la pesanteur au pôle, et la constante  $p$  de la précession générale; leurs valeurs numériques que nous adoptons sont celles rappelées par M. Wavre dans son ouvrage « Figures planétaires et géodésie ».

#### LE DÉVELOPPEMENT DE $r$ .

Rappelons que dans le problème des figures planétaires, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait équilibre relatif s'écrit sous la forme du tableau fondamental donné par les formules (102) et (103) de la page 78 de « Figures planétaires et géodésie ». Nous avons posé  $r = R^{-2}$  et  $q = 2p$  et avons développé l'inverse du carré du rayon polaire en écrivant  $r = \frac{1}{t^2}(1 + \eta)$  où  $t$  représente le rayon de la sphère de même pôle que la surface de niveau,  $\eta$  étant une fonction de  $t$ , du complément de la latitude géocentrique  $\theta$  et de la longitude  $\psi$ . Après avoir substitué le développement formel de  $\eta$  et de  $\Phi$  en série de puissances de  $\omega^2$  dans le système fondamental, on obtient une expression formelle que l'on ordonne suivant les puissances de  $\omega^2$  et relativement à toute valeur de  $p$ .

Symboliquement, écrivons

$$\sum_n \omega^{2n} F_p^{(n)} = 0 .$$

L'approximation d'ordre  $n$  consiste à poser  $F_p^{(n)} = 0$ .

L'identification des termes en  $\omega^2$  conduit à la déformation

$$\eta^{(1)} = A(t) \sin^2 \theta$$

qui ne diffère de  $e^{(1)}$  que par une quantité constante. Le coefficient  $A$  est lié à  $a$  par l'égalité  $A = -2a$ . On retrouve les résultats classiques, seuls les ellipsoïdes de révolution répondent à cette déformation.

L'étude de la seconde approximation donne des formules algébriques qui présentent une analogie avec celles obtenues

en développant le rayon vecteur. En particulier, l'expression de la déformation à l'extérieur de l'astre s'écrit

$$\eta = M(t) \sin^2 \theta - N(t) \sin^2 \theta \cos^2 \theta$$

avec

$$\begin{cases} M(t) = -2\lambda\omega^2(t^3 + ut^{-2}) + \lambda^2\omega^4(-3t^6 + 4u^2t^{-4} + Vt^{-4}) \\ N(t) = -\lambda^2\omega^4(3t^6 - 4ut + 7Vt^{-4}) \end{cases} .$$

Enfin, à l'approximation demandée, l'inverse d'aplatissement devient

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{2}{|\eta_1|} - \frac{1}{2} .$$

La première approximation suivant cette nouvelle méthode est déjà plus voisine de la seconde approximation, elle donne une meilleure idée des résultats numériques à cet ordre de précision. En partant des valeurs admises par Poincaré, on obtient pour l'inverse d'aplatissement

$$\frac{1}{\alpha} = 296,8 ,$$

valeur qui est inférieure de 1,5 à celle déterminée par M. Wavre à la page 121 de son livre. Par contre, les résultats numériques sont, en seconde approximation, avec un écart insignifiant, ceux obtenus par M. Wavre au chapitre VIII, Géodésie et précession, de « Figures planétaires et géodésie ».

Enfin la correction à partir de l'ellipsoïde de comparaison s'exprime en fonction de la constante  $u$  par la relation linéaire

$$\delta = -\frac{6350}{8} \frac{5}{(583,7 \pm 1)^2} \left( \frac{3}{2} - u \right)$$

avec

$$0 \leq u \leq \frac{3}{2} .$$

Dans le cas de la terre, on trouve en seconde approximation une valeur moyenne de 6,1 mètres.

## LE DÉVELOPPEMENT DE LA MASSE M.

Nous avons repris l'étude des approximations successives en développant également en série de puissances de la vitesse angulaire  $\omega$  la masse M qui intervient dans l'équation de Poincaré. On trouve des formules algébriquement semblables à celles obtenues par M. Wavre dans « Figures planétaires et géodésie » sans développement de la masse M.

Nous avons introduit dans l'expression de la déformation  $e$  la constante  $\mu_1$  de l'ordre de  $t^3$  liée à  $M_1$  par la relation  $iM_1 t_1^{-3} = \mu_1$ . Cherchons à en déterminer les valeurs limites.

Développons la masse par la formule  $\int \rho dV$  en exprimant l'élément de volume à  $\omega^4$  près, c'est-à-dire en première approximation; on obtient

$$\mu_1 = \frac{8\pi i}{3} \int_0^1 \rho d(a\tau^3)$$

avec

$$\tau = \frac{t}{t_1},$$

la surface libre correspondant à la valeur  $\tau = 1$ .

M. Wavre donne au § 65 du chapitre VI de son livre, les expressions en première approximation des moments d'inertie A et C dont la différence s'exprime comme ceci

$$C - A = \frac{8\pi}{15} \omega^2 \int_0^1 \rho d(a\tau^5).$$

Rappelons enfin que la constante  $u$  est liée à cette différence des moments d'inertie, ce qui permet d'écrire

$$u = \frac{8\pi i}{5} \int_0^1 \rho d(a\tau^5).$$

Ces expressions de  $\mu_1$  et de  $u$  sont des invariants intégraux pour toutes les répartitions des densités qui laissent inaltérés les éléments stokiens  $S_1$ ,  $\omega$ , M.

Formons la combinaison linéaire suivante et intégrons par parties nos seconds membres

$$\frac{3\mu_1 - 5u}{8\pi i} = - \int_0^1 a(\tau^3 - \tau^5) d\rho .$$

Or, nous avons, quelle que soit la valeur de  $\tau$ :  $a \geq 0$  et  $d\rho \leq 0$ , d'où l'inégalité

$$3\mu_1 - 5u \geq 0 ;$$

le signe = convient au cas de la masse homogène avec  $u = \frac{3}{2}$ . Ainsi la limite inférieure de  $\mu_1$  est fonction de la constante  $u$  dont la valeur pour la terre est légèrement inférieure à l'unité

$$\mu_1 \geq \frac{5}{3} u .$$

Cherchons maintenant à établir sa limite supérieure; pour cela, revenons au développement de la page 115 de « Figures planétaires et géodésie ».

$M_0$  représente la masse totale  $M_s$  des sphères et  $M_0 + \omega^2 M_1$  la valeur de la masse  $M$ .

A notre approximation, le quotient  $\frac{M_1}{M_0}$  est égal à la quantité  $P$  que nous majorons en prenant sa valeur sur la surface libre et que nous exprimons en fonction de nos constantes, ce qui permet d'écrire finalement

$$\mu_1 \leq 2 + \frac{1}{3} u .$$

En remplaçant, dans le cas de la terre,  $u$  par l'unité, nous avons une limite supérieure de  $\mu_1$ , fortement majorée et que nous chercherons à abaisser au moyen d'un procédé indiqué par M. Wavre

$$\frac{5}{3} u \leq \mu_1 \leq \frac{7}{3} ;$$

la masse homogène donne  $\mu_1 = \frac{5}{2}$ .

## LOI DE LIPSCHITZ.

Reprenons l'inégalité

$$\frac{3\mu_1 - 5u}{8\pi i} \leq - \int_0^1 a(\tau^3 - \tau^5) d\rho .$$

Majorons encore cette expression en prenant pour  $a$  sa valeur à la surface et choisissons comme loi de variation des densités la loi de Lipschitz qui s'écrit

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha\tau^n) ,$$

où  $\rho_0$  est la densité au centre et  $\alpha$  et  $n$  deux nombres positifs.

Remplaçons à nouveau  $u$  par 1 dans la déformation  $a_1$  et exprimons la masse  $M_0$  en fonction de la densité moyenne dont la valeur est

$$D_1 = \rho_0 \left( 1 - \frac{3}{3+n} \alpha \right) .$$

Ces substitutions effectuées, l'inégalité prend la forme après intégration

$$3\mu_1 - 5u < \frac{12n}{\frac{1}{\alpha} - \frac{3}{3+n}} \frac{1}{(n+3)(n+5)} .$$

Exprimons enfin le rapport  $\frac{1}{\alpha}$  en fonction des densités  $\rho_1$  et  $D_1$  et de  $n$

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{D_1 - \frac{3}{3+n} \rho_1}{D_1 - \rho_1} .$$

L'inégalité devient, en majorant encore une fois en mettant l'unité à la place de  $u$ ,

$$\mu_1 < \frac{5}{3} + 4 \left( 1 - \frac{\rho_1}{D_1} \right) \varphi(n)$$

en posant

$$\varphi(n) = \frac{n}{n^2 + 5n} ,$$

en particulier

$$\varphi(n \rightarrow 0) \rightarrow \frac{1}{5} .$$

Prenons des données numériques vraisemblables dans le cas de la terre: la densité moyenne  $D_1 = 5,5$  et la densité superficielle  $\rho_1 = 2,75$ , chiffre peut-être légèrement trop élevé mais qui permet d'exprimer le rapport des densités sous la forme  $\frac{1}{2}$ . On montre sans difficulté que la constante  $\mu_1$  est limitée supérieurement par la valeur 2 pour  $0 < n \leq +\infty$ . Finalement, si l'on tient compte que l'on a continuellement majoré l'inégalité,

$$\frac{5}{3} u < \mu_1 < 2 .$$

La limite supérieure  $\frac{7}{3}$  obtenue précédemment est plus rigoureuse puisqu'elle ne fait pas appel à une loi de densité mais par contre trop défavorable comme nous l'avons déjà remarqué.

#### HYPOTHÈSE D'UN NOYAU CENTRAL ET UNE CIRCONSTANCE EXTRÊME.

Proposons-nous de déterminer une limite supérieure de l'expression

$$- \int_0^1 a(\tau^3 - \tau^5) d\rho ,$$

en ne supposant qu'un seul saut de densité pour la valeur  $\tau$  rendant notre parenthèse maximum; ce qui revient à se placer dans le cas le plus défavorable. Nous aurions par conséquent un noyau central homogène de densité  $\rho_0$  entouré d'une écorce homogène de densité  $\rho_1$ .

Le maximum de la parenthèse a lieu pour la valeur  $\tau_+ = \sqrt{\frac{3}{5}}$ . D'après nos hypothèses,  $\tau_+$  est la valeur de  $\tau$  pour laquelle la densité subit le saut. Calculons notre densité moyenne introduite dans  $a_1$ ; ce qui donne après intégration

$$D_1 = (\rho_0 - \rho_1)\tau_+^3 + \rho_1 .$$



Notre inégalité devient alors

$$3\mu_1 - 5u < \frac{12}{5} \left(1 - \frac{\rho_1}{D_1}\right).$$

En limitant supérieurement  $u$ , on a

$$\mu_1 < \frac{5}{3} + \frac{4}{5} \left(1 - \frac{\rho_1}{D_1}\right),$$

inégalité analogue à celle du cas le plus défavorable déduit de la loi de Lipschitz ( $n \rightarrow 0$ ), mais obtenue actuellement sans introduire la loi des densités.

#### LES RÉSULTATS NUMÉRIQUES.

Les valeurs numériques auxquelles conduisent les formules algébriques donnent pour l'inverse d'aplatissement des résultats légèrement plus élevés. Le centre de l'intervalle de variation de l'inverse d'aplatissement paraît être 296,4; le chiffre 297 reste exclu.

En tenant compte des modifications apportées par l'introduction de la constante  $p$  de la précession générale, on peut donner les résultats suivants

$$\text{avec } \frac{5}{3}u < \mu_1 < 2 \quad \boxed{296 < \frac{1}{\alpha} < 296,7}$$

la limite  $\frac{7}{3}$  élève à 297,08 la valeur maximum.

Avec trois décimales, nous avons  $0,958 < u < 0,965$ .

Enfin le rapport  $x = \frac{g_p - g_{\text{éq.}}}{g_{\text{éq.}}}$  donne lieu à la double inégalité

$$\boxed{0,005274 < x < 0,005286}.$$

Ces limites de  $x$  et de l'inverse d'aplatissement contiennent les chiffres donnés par Helmert en 1915 et rappelés par M. Wavre dans son livre à la page 122.