Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 25 (1943)

Artikel: La science de l'espace
Autor: Rossier, Paul
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-742306

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

LA SCIENCE DE L'ESPACE[1]

PAR

Paul ROSSIER

Qu'est-ce que la géométrie ? On sait que la réponse fournie par l'étymologie est inexacte. La géométrie, née dit-on de l'arpentage, est une science beaucoup plus vaste que la technique des « géomètres ». D'ailleurs, bien avant que naisse la nécessité des mesures agraires sur les champs égyptiens périodiquement inondés, l'homme a eu des notions de géométrie, car sans elle, la vie serait impossible.

La géométrie, dit-on, a pour objet l'étude des propriétés de l'espace. Laissons aux psychologues et aux métaphysiciens la tâche d'analyser la création de la notion d'espace et d'en estimer la portée. Pour l'homme de science, la géométrie est l'étude des propriétés de l'espace, objet de la pensée humaine, ou celle des corps de l'espace. Ces deux définitions concernent au fond deux sciences différentes.

Les méthodes principales dont nous disposons pour l'étude d'un objet extérieur sont au nombre de deux: l'observation, complétée par l'expérimentation et la mesure, d'une part, le raisonnement, d'autre part.

La première fait appel à nos sens: l'espace visuel, l'espace moteur, l'espace tactile, l'espace auditif, pour ne citer que les

[1] Le présent travail a pour origine une conférence faite à la Société de Physique et d'Histoire naturelle de Genève, le 28 janvier 1943. L'auteur s'était proposé de montrer, à un auditoire composé de non-mathématiciens, quelques-unes des difficultés que l'absence de certaines précautions peut entraîner dans l'élaboration d'une science logique. Sur le conseil de M. le professeur Wavre, auquel il adresse ses remerciements, l'auteur a précisé ici certaines propositions, de façon à donner satisfaction au moins partielle au sens critique du lecteur mathématicien.

plus essentiels, ont des propriétés spécifiques, toutes fournies par la méthode expérimentale. C'est certainement durant les toutes premières années de sa vie que l'enfant fond en une notion unique ces divers espaces partiels. Ne nous attardons pas à l'étude de ce processus: contentons-nous de remarquer que la notion d'espace est de formation principalement expérimentale. C'est là un lieu commun sur lequel il semble inutile d'insister.

Et pourtant le raisonnement joue un rôle énorme et prépondérant dans toute l'étude de la géométrie, à tel point que le mot géométrie a pris un sens très étendu et est même devenu synonyme de mathématiques.

Le terme géométrie, mal choisi étymologiquement, mal utilisé tant par les mathématiciens que par le commun des mortels, prête à confusion. Pour éviter cela, il est commode de distinguer entre ce que nous appellerons la stéréologie [1], étude générale de l'espace, et la géométrie proprement dite. Cette dernière est identique à la géométrie rationnelle, dans ce qu'elle peut avoir de plus abstrait. La stéréologie ou étude générale de l'espace fait appel à toutes les ressources de l'esprit pour étendre et approfondir notre connaissance du monde spatial. Ses méthodes sont l'observation, l'expérimentation et, couronnant le tout, la logique.

Surtout depuis la découverte des géométries dites non-euclidiennes, l'histoire de la géométrie a évolué vers une extension toujours plus grande du champ d'application de la logique. Cette transformation est la conséquence inéluctable du désir

[1] Les naturalistes nous pardonneront de faire usage d'un terme qui leur appartient, puisque le dictionnaire appelle ainsi l'étude des parties solides des corps vivants.

Etymologiquement, stéréologie signifie étude des solides; les ficelles et rayons lumineux dont il sera question plus bas n'en sont pas; cependant, certains mathématiciens ont utilisé le terme de stéréométrie dans le sens de géométrie de l'espace; le stéréoscope est un appareil destiné à la vision des corps de l'espace, solides ou pas; la stéréochimie a pour objet la représentation des formules chimiques dans l'espace; stéréognostique se dit de la perception des formes dans l'espace. Si spatiométrie ou spatiologie n'étaient pas des barbarismes, ils seraient les termes appropriés ici, pour exprimer ce que l'on appellerait en allemand « Raumlehre ».

toujours accru de rigueur: on sait les précautions que prennent les mathématiciens de vider les termes fondamentaux de leur vocabulaire tels que point, droite, ligne, plan... de toute signification concrète, ou même de toute signification autre que la suivante: satisfaire à un ensemble d'axiomes, eux-mêmes vides de tout contenu sensible ou expérimental. L'école axiomatique a construit ainsi un édifice logique merveilleux dont la perfection et l'ampleur excitent au plus haut point l'admiration de ceux qui réussissent à accomplir l'effort d'abstraction considérable qu'en exige l'étude. On ne saurait trop insister sur l'importance de cette œuvre et sa portée philosophique tant en ce qui concerne la théorie de la connaissance que la valeur des méthodes logiques.

A cette étude strictement logique de la géométrie, on peut faire deux critiques, l'une que je qualifierai de philosophique, l'autre qui est plus pragmatique.

La première est la suivante. Depuis quelques dizaines d'années, la logique classique est l'objet de diverses attaques: lorsque certaines conditions ne sont pas satisfaites, la validité de tel de ses principes est contestée. Le mouvement de critique de la logique n'est pas parti de la géométrie mais est basé sur les difficultés que présente la théorie des ensembles. Elles ne doivent, à première vue, exercer aucune influence sur les propositions de la géométrie. Il ne s'agit pas ici d'étudier cette possibilité d'action de la théorie des ensembles sur la géométrie, mais bien de l'immutabilité ou de la non-immutabilité de la logique. Un raisonnement dont un mathématicien d'un siècle ou d'une école se déclare satisfait provoque de vives critiques et des protestations en d'autres circonstances. Ces critiques sont généralement dues à l'usage d'un axiome implicitement admis par un auteur et exclu par un autre [1]. La difficulté est souvent considérable de découvrir quel est cet axiome caché. En tout cas, les difficultés survenues dans l'élaboration

[1] Un exemple de querelle de ce genre est celui relatif au principe de continuité de Poncelet. Celui-ci, sans le dire explicitement, ne l'appliquait qu'à la géométrie algébrique et cela à juste titre. Le principe de continuité, appliqué à des figures transcendantes conduisait Cauchy à des paradoxes.

de la théorie des ensembles semblent devoir rendre prudents les géomètres et les inciter à préciser toujours davantage leurs axiomes et leurs méthodes.

La critique de la logique est un sujet beaucoup trop vaste pour que nous nous y attardions, mais le simple fait que, en l'un de ses points essentiels, l'édifice de la logique est critiqué incite à poser la question de l'origine de notre logique: nous est-elle imposée *a priori* ou, au contraire, consiste-t-elle peut-être en la formulation abrégée et abstraite d'un résumé d'expériences nombreuses, personnelles ou ancestrales, dans lesquelles raisonnement et observation sont tombés d'accord ? L'existence des logiques enfantines, fragmentaires, ne pose-t-elle pas la question de l'évolution possible de la logique des adultes ?

Si nos règles de logique ne doivent être énoncées qu'*a posteriori*, elles résultent d'une induction philosophique immensément bien vérifiée, mais pas infiniment bien vérifiée. En conséquence, toute conclusion logique n'aurait que le « coefficient de validité » que posséderait l'ensemble des expériences de vérification. C'est dire le caractère peut-être partiel et provisoire de la géométrie, considérée souvent comme un modèle de sécurité intellectuelle. Est-ce à dire que l'énorme collection de résultats scientifiques auxquels notre sens logique a collaboré sont à rejeter ? Certes pas, tant qu'une œuvre positive ne vient pas remplacer les ruines. Il semble cependant de quelque intérêt de montrer le caractère très légèrement incertain d'un ensemble de conclusions même parfaitement logique. Par exemple, pour être rigoureux, l'auteur d'une géométrie logique devrait en arriver à expliciter les règles de logique dont il fera usage.

Le reproche que j'ai qualifié de « pragmatique » n'a pas d'importance pour le mathématicien, mais il est essentiel pour les non-mathématiciens, les physiciens par exemple et pour chaque humain peut-être. La géométrie logique conduit à l'élaboration de propriétés liant un certain nombre d'« êtres abstraits », « points », « droites »... dont il est bien entendu qu'il n'ont rien de commun, si ce n'est leur nom, avec les notions habituelles de points, droites... Dans ces conditions, a-t-on le droit d'appliquer à ces derniers les conclusions relatives aux

« êtres abstraits » ? Oui, mais à la condition que les notions vulgaires satisfassent aux axiomes. Nous voici donc amenés à une vérification stéréologique des axiomes, vérification qui ne peut être qu'expérimentale. Mais la vérification expérimentale d'un axiome est toujours difficile: elle manque généralement de précision. Par contre celle de certains théorèmes peut être plus facile et précise. Cette limitation de la précision montre que la question reste perpétuellement posée du rapport entre la géométrie et la stéréologie. Insistons sur le fait que la vérification de la validité stéréologique d'une géométrie n'est pas du domaine de celle-ci, mais bien de la stéréologie. La vérification ne porte pas sur les êtres abstraits, mais bien sur des objets, sur tout ou partie de solides parfaits ou réels, sur des rayons lumineux. C'est dire que la vérification est l'affaire des physiciens et pas celle des mathématiciens.

Donnons un exemple, celui des géométries non-euclidiennes. Les mathématiciens de la seconde moitié du XIXe siècle ont démontré, avec toute la rigueur possible, la validité des géométries non-euclidiennes et leur équivalence avec la géométrie euclidienne; il suffit pour cela de modifier quelques définitions, celle de la longueur en particulier. Henri Poincaré estimait que la géométrie euclidienne donne une représentation plus « commode » du monde physique tel qu'il se le représentait; autrement dit, c'est la stéréologie à base euclidienne qui est plus commode. Cependant, les théoriciens de la physique d'il y a un quart de siècle n'ont pas hésité, dans l'élaboration de la théorie de la relativité, à faire usage de la géométrie non-euclidienne. Que devient alors la vérification et que signifie-t-elle ? Simplement ceci: la stéréologie opère par approximations successives et les vérifications ne sont qu'une détermination du domaine de validité, à la stéréologie, de la première approximation constituée par une certaine géométrie.

Toute la question revient ici à celle de la validité de l'axiome des parallèles. Sa vérification expérimentale directe est limitée à des figures beaucoup trop petites pour donner satisfaction. Cet axiome conduit au théorème de la somme des angles du triangle: lui alors est vérifié avec une précision remarquable, tant sur les grands triangles de la géodésie que sur ceux plus

immenses encore de l'astronomie, quoique avec une précision moindre.

On ne peut en toute rigueur parler de vérification du théorème de la somme des angles d'un triangle en astronomie, car les opérations y afférentes comportent le recours à des éléments non uniquement spatiaux; cependant l'étude du mouvement planétaire képlérien établit par approximations successives une relation simple entre les positions observées, quoique l'on puisse attribuer à l'astre un mouvement radial arbitraire. Ce mouvement radial est contredit par les mesures photométriques ou du diamètre apparent; celles-ci ne prennent un sens simple que si l'on postule l'invariabilité du diamètre de la planète. Or, dans un autre domaine astronomique, n'a-t-on pas été conduit à l'hypothèse de la pulsation des céphéides ! La vérification astronomique d'une stéréologie est celle de l'ensemble constitué par une stéréologie et une mécanique [1].

On peut faire des remarques analogues à propos de l'astronomie stellaire. L'identité des parallaxes déduites de l'application des méthodes trigonométriques, dynamiques et de celles basées sur le principe de Doppler-Fizeau, les mesures photométriques de céphéides ou de variables à éclipses, les estimations de diamètres apparents ou d'éclats dans les amas ou les nébuleuses spirales, peut s'expliquer par des hypothèses stéréologiques qui nous paraissent simples; on postule l'identité dans l'espace et le temps de certaines lois physiques. On pourrait imaginer d'autres systèmes de principes, qui nous paraîtraient moins immédiats mais qui seraient certainement tout aussi capables de donner une image logiquement cohérente de l'ensemble des mesures effectuées à ce jour.

Après cette digression sur les conditions astronomiques d'une vérification stéréologique de l'applicabilité de la géométrie euclidienne à l'espace physique, revenons à cette vérification elle-même. Malgré la précision de la vérification du théorème de la somme des angles du triangle, les relativistes concluent à la nécessité du caractère non-euclidien de l'espace physique.

[1] Remarquons en passant l'introduction inéluctable du temps en ces matières: on sait toute l'importance de cette fusion spatio-temporelle dans les raisonnements des relativistes.

Sont-ce ces théoriciens ou les praticiens de la mesure qui ont tort ? Ni les uns ni les autres. Les derniers opèrent, malgré tous leurs efforts, sur des triangles beaucoup trop petits et les théoriciens envisagent une chrono-stéréologie beaucoup plus vaste que les cas élémentaires strictement géométriques auxquels s'applique l'affirmation de Poincaré.

Abandonnons le cas particulier du théorème du triangle et revenons aux relations entre la géométrie et la stéréologie, et appliquons les principes précédents à l'étude des notions fondamentales de la géométrie, soit aux points, lignes et surfaces. Essayer de les définir abstraitement est aussi vain que de définir toute autre notion métaphysique. Pour qu'une définition soit logiquement utile, il faut qu'elle soit féconde, c'est-à-dire qu'elle donne prise aux règles de la logique. C'est dire que les axiomes font partie intégrante des définitions. Le choix des axiomes est arbitraire. La formation des notions fondamentales exige donc un appel à une opération non logique, c'est-à-dire à l'observation.

La notion de point nous est fournie par l'examen d'un corps dont toutes les dimensions sont extrêmement petites: un fil, une étoffe extrêmement minces nous donnent l'image d'une ligne, d'une surface.

Les considérations précédentes font appel à la notion de limite, ou mieux de passage à la limite. Qu'on se rappelle combien de temps ont mis les mathématiciens à bien comprendre ce qu'ils entendaient eux-mêmes par un passage à la limite; cela explique l'effort énorme qu'exige l'assimilation des notions de point, ligne et surface.

Parmi toutes les lignes que la nature nous présente, il en est une espèce particulièrement importante: la droite. Renonçons à en donner une définition brève; aucune n'est satisfaisante. L'image d'une droite nous est donnée par un fil tendu dont les dimensions transversales décroissent indéfiniment. La droite jouit des propriétés essentielles suivantes: elle comporte des points en nombre infini; elle est déterminée par deux d'entre eux; une portion de droite étant donnée, elle peut être prolongée indéfiniment sans que jamais on retombe sur des points déjà envisagés, et cela dans deux sens. Sur la figure formée par une

droite et deux de ses points, on peut distinguer un segment, limité par ces deux points, et le reste de la droite; c'est sur ce reste que l'on peut tracer les prolongements du segment.

Faisons passer une courbe quelconque par deux points L et M d'une droite; laissons L fixe; on peut, sur la droite, éloigner l'extrémité M de la courbe *c* et sans l'allonger, jusqu'en un point N qui n'appartient pas au segment LM. On exprime ce fait expérimental, réalisé stéréologiquement au moyen d'une ficelle inextensible, par l'énoncé suivant: la droite (on devrait dire un segment de droite) est le plus court chemin entre deux points.

En langage mathématique, cette propriété exprime que la droite stéréologique est une géodésique de notre espace physique. Jusqu'à l'élaboration de la théorie de la relativité généralisée, l'assimilation à la droite de la géodésique stéréologique paraissait aller de soi: l'affirmation de Poincaré qu'il serait toujours plus commode de représenter le monde physique dans un espace euclidien semblait une évidence. Les théories modernes donnent tort à Poincaré, car les complications surgissent en nombre à vouloir éluder l'usage d'une géométrie riemannienne en physique théorique. Celle-ci postule l'existence d'un univers euclidien tangent à son espace-temps. A l'échelle humaine, l'écart entre l'univers relativiste et l'univers euclidien tangent est très petit, si minime que des opérations de stéréologie effectuées dans la portion de l'univers accessible à l'homme n'en peuvent donner la grandeur qu'au prix de mille difficultés: cet écart est de l'ordre de grandeur des erreurs de mesure. Ce ne sont pas des considérations purement spatiales qui imposent l'emploi de la géométrie riemannienne, mais bien des raisonnements d'ordre cinématique, mécanique, électromagnétique et optique.

Entre l'expérience strictement stéréologique et la mesure physique la plus générale, il subsiste une contradiction apparente, d'ordre subjectif; la géométrie euclidienne évolue dans un cadre trop étroit pour pouvoir être appliquée au monde physique moderne. Comme nos ancêtres ont dû apprendre à penser « en terre ronde » ou « à la Copernic », le physicien moderne doit accepter de ne plus être un géomètre euclidien.

Une image de la droite apparemment indépendante de toute considération mécanique nous est fournie par la notion de rayon lumineux dans un milieu homogène. Le simple fait qu'il y a lieu de faire ici la restriction de l'homogénéité du milieu permet d'attribuer à une hétérogénéité toute déviation entre le rayon lumineux et la droite. Comment, en principe, la vérification du caractère rectiligne du trajet de la lumière peut-elle être obtenue ? On disposera trois diaphragmes de telle sorte que le troisième soit vu au travers des deux premiers. Puis, introduisant une ficelle dans les trois ouvertures, la tendant, on constatera qu'elle ne marque aucun point anguleux au diaphragme médian. Ainsi est vérifiée l'identité stéréologique des deux objets dénommés droite, considérés d'une part comme limite d'une ficelle tendue, d'autre part comme limite d'un faisceau lumineux infiniment étroit. Matériellement, ces deux passages à la limite sont irréalisables: la ficelle, si on l'amincit trop, n'a plus la solidité nécessaire pour supporter d'être tendue, ou même elle ne supporte plus son propre poids; même si l'on opérait en un milieu de gravité négligeable, au centre de la terre par exemple, le fait de la constitution moléculaire de la matière interdirait encore de dépasser une certaine borne inférieure dans l'expérience de vérification.

Le rayon lumineux est encore plus décevant; si les ouvertures des diaphragmes ont des dimensions notablement inférieures au millimètre, les phénomènes de diffraction prennent une importance telle que la notion de rayon lumineux disparaît elle-même. Sans insister sur la théorie générale de la relativité, remarquons encore ici qu'aux yeux de cette théorie, rayon lumineux et ficelle infiniment tendue sont deux notions identiques; ce sont des géodésiques de l'espace-temps.

Revenons à nos essais de définition stéréologique de la droite: l'opération physico-mécanique de définition, le recours à l'optique sont décevants. On en arrive à une convention: une droite est représentée par une règle correctement construite. Cette définition comporte une part énorme d'arbitraire. On conçoit qu'il ait été possible de construire des images euclidiennes de la géométrie non-euclidienne dans lesquelles une droite peut être une courbe dépendant de deux paramètres,

comme cela est le cas dans la représentation euclidienne donnée par Poincaré de la géométrie non-euclidienne [1].

La notion stéréologique de droite conduit facilement à celle de plan stéréologique quoique l'idée de surface « plate » soit antérieure à toute étude de la géométrie. Faisons d'abord quelques remarques relatives aux surfaces. Sur une surface, on peut marquer des points, en nombre infini; on y peut tracer des courbes; parmi elles peuvent figurer des droites. Si par chacun des points de la surface, il est possible de tracer une ou plusieurs droites sur la surface, celle-ci est dite réglée. Mais, en général, sur une surface réglée, il n'est pas possible de joindre deux quelconques de ses points par une droite. Il existe une surface qui jouit de cette propriété très particulière que la droite déterminée par deux quelconques de ses points lui appartient. Cette surface, c'est le plan; nous disons le plan, car quoique l'on puisse imaginer autant de plans que l'on veut, tous sont de même forme; ils sont superposables. L'expérience montre que deux plans sont confondus dès que trois de leurs points le sont.

Les propriétés d'un être géométrique ne prennent toute leur valeur que si l'on cite des exemples de notions aussi simples que possible auxquelles ne s'applique pas la propriété considérée. Rapprochons donc la notion de cercle de celle de droite.

Les roues, les mouvements de rotation sont si répandus dans notre monde que chacun possède la notion de « rond » longtemps avant toute étude de la géométrie. Essayons d'appliquer au cercle les propriétés de la droite et montrons les ressemblances et les dissemblances de ces deux notions.

Un cercle comporte des points en nombre infini, mais n'est pas déterminé par deux d'entre eux; au contraire, il existe une infinité de cercles passant par deux points donnés. Le cercle n'est pas prolongeable indéfiniment; si l'on avance suffisamment sur un cercle, on finit inéluctablement par atteindre le point de départ, « par derrière », pour ainsi dire. Sur un cercle, marquons deux points: on détermine ainsi deux arcs; sur un cercle, il

[1] *La science et l'hypothèse*, p. 56. Nous nous limitons au cas de la géométrie plane, par simple souci de brièveté. Le passage à la géométrie de l'espace n'offre ici aucune difficulté.

n'est pas possible de déterminer un segment par deux points, comme sur la droite, ainsi que deux prolongements opposés; plus exactement, ces deux prolongements sont identiques, au sens de description près. Tout cercle possède un centre, la droite pas.

On considère généralement le cercle comme une figure plus compliquée que la droite. Cela est-il justifié ? La notion géométrique de droite implique l'existence du prolongement à l'infini ou la possibilité d'existence de points sur la droite à une distance de l'un donné d'entre eux, surpassant toute longueur donnée. Stéréologiquement, jamais aucune droite n'a été dessinée, mais seulement des segments de droites. Au contraire, le cercle reste en entier dans le fini; il peut souvent être dessiné en entier: il n'oblige pas à un prolongement à l'infini.

Passons enfin à l'examen de la notion de courbe plane, en excluant tout appel à l'analyse mathématique, qui nous conduirait beaucoup trop loin. A un point de vue élémentaire, et à juste titre, une courbe est souvent envisagée comme la trajectoire d'un point mobile. Cette notion est insuffisante, car une courbe peut être engendrée tout autrement, par exemple comme enveloppe d'une droite mobile. Le découpage aux ciseaux, l'usage de la lime pour affiner le contour d'une plaque en sont des exemples stéréologiques familiers. Un exemple plus savant est celui de la caustique par réflexion fournie par un miroir courbe, un simple lien de serviette, par exemple. Les conceptions de la géométrie tangentielle sont moins familières que celles de la géométrie ponctuelle. Cela tient, pourrait-on croire, au fait que la notion de tangente résulte d'un passage à la limite. Cela est vrai, à condition de préciser et de dire « tangente à une courbe considérée comme lieu de points ». Mais une courbe plane peut aussi être considérée comme enveloppe d'une droite mobile; comme telles, sans passage à la limite, les courbes de cette sorte ne possèdent pas de points ! Pour en définir un, il faut faire intervenir, si elle existe, la position limite de l'intersection de deux tangentes infiniment voisines.

On peut naturellement généraliser et considérer une courbe plane comme l'enveloppe d'une autre courbe, d'un cercle mobile

par exemple. Les mouvements de roulement, l'usage de la meule à rectifier en sont des exemples stéréologiques simples.

Examinons d'un peu plus près la notion de tangente à une courbe lieu de points. Celle-ci peut-elle toujours être considérée comme enveloppe de ses tangentes ? Stéréologiquement, cela paraît évident. Pour préciser, une analyse de la notion de tangente est indispensable. Pour définir la tangente, considérons-la, pour un instant, comme la limite d'une sécante qui se déplace de telle sorte que deux de ses points d'intersection avec la courbe se rapprochent indéfiniment. Quoique souvent commode dans les éléments, cette définition est insuffisante. Durant l'opération de rapprochement, il peut se faire que la sécante tende vers une limite bien déterminée et indépendante de la façon dont a lieu le mouvement des deux points. Le cercle en fournit un exemple. Il n'y a aucune nécessité générale à cela. En certains points, dits singuliers, une courbe peut ne pas avoir de tangente bien définie satisfaisant à notre définition provisoire. A titre d'exemple, examinons la courbe représentant la trajectoire d'une petite bille élastique qui, lancée obliquement vers le bas, rencontre une surface suffisamment dure; elle rebondit, dessinant un V à côtés curvilignes. Considérons un point arbitraire A du plan du V, différent de la pointe et traçons une droite d passant par A: la droite d peut couper les deux branches du V en deux points X et Y. Faisons tourner la sécante autour de A de telle sorte que les points X et Y se rapprochent indéfiniment de la pointe du V; si la chose est possible, ils y parviennent simultanément. Par conséquent, la droite qui joint la pointe du V à un point A tel qu'une droite par ce point coupe les deux branches du V en deux points voisins est une tangente à la trajectoire. Le point A est arbitraire entre des limites très larges. Par conséquent, en la pointe du V, la trajectoire possède une infinité de tangentes de l'espèce définie ci-dessus. Dans le cas particulier, le processus considéré de définition ou de construction de la tangente ne conduit pas à un résultat bien déterminé.

Mais, remarquera-t-on, on voit bien qu'il est possible de tracer, à la pointe, deux tangentes à la trajectoire. Evidemment, mais un énoncé plus précis est indispensable si nous

conservons la définition donnée plus haut de la tangente. Sur l'une des deux branches, considérons un point P. Construisons la tangente à la courbe en ce point. Rendons maintenant le point P mobile et, alors qu'il se rapproche indéfiniment de la pointe du V, construisons la tangente en chacune de ses positions. Dans le cas particulier considéré, la tangente tend vers une certaine limite, qu'on appelle la tangente en la pointe, à la branche considérée de la courbe. En général, la limite de la tangente n'est pas nécessairement la tangente au point limite; ici, cela est réalisé. Définie comme nous venons de le faire, il n'existe pas une tangente unique, mais bien deux. La pointe du V est un point singulier de la courbe. D'autre part, ce n'est pas un seul passage à la limite qu'il a fallu pour déterminer l'une de ces tangentes, mais deux opérations successives. Les tangentes considérées ici n'obéissent donc pas à la définition donnée plus haut dans laquelle liberté est laissée aux deux points sécants de se rapprocher l'un de l'autre selon une loi arbitraire.

Dans le cas particulier, la définition suivante donne satisfaction: la tangente en un point P d'une courbe est la limite, si elle existe, d'une sécante mobile passant par P et par un point R de la courbe astreint à se rapprocher indéfiniment de P.

A la pointe du V que nous considérions ci-dessus, il existe deux tangentes satisfaisant à cette dernière définition. Est-ce à dire que toutes difficultés soient ainsi éliminées ? Non, car on a imaginé des cas particuliers de courbes, plus spécieux que celle à point anguleux, où elles réapparaissent. Nous en verrons un tout à l'heure.

Le qualificatif de singulier appliqué aux points des courbes au sujet desquels la notion de tangence donne lieu à des difficultés semble indiquer qu'il s'agit là d'accidents exceptionnels, mais qu'en général la tangente existe, sauf peut-être quelques exceptions. Il n'en est rien; il a été possible, sans faire appel à des notions de mathématiques supérieures, d'imaginer des courbes dont tous les points sont singuliers. Avant d'aborder ce sujet, il est indispensable de préciser la notion de courbe, lieu continu de points.

Considérons un point A d'une courbe; traçons un cercle

centré sur A et de rayon arbitraire; lorsque ce rayon décroît au delà de toute limite, on trouve toujours à son intérieur des points de la courbe. On a énoncé une proposition analogue sous la forme suivante: une courbe est le lieu d'un point en mouvement continu. Ces deux énoncés, examinés superficiellement, semblent avoir le même sens. Cela est inexact; le second a un sens plus restreint que le premier; la notion de mouvement implique celle de vitesse, dont la grandeur est surtout la direction sont bien déterminées. Ces notions ne sont pas contenues dans la première proposition basée sur le cercle de rayon indéfiniment décroissant.

Au commencement du XIXe siècle on pensait que toute courbe possède en général une tangente en tous ses points sauf en des singularités distinctes les unes des autres. Mais, durant la seconde moitié du siècle, on découvrit des fonctions qui, appliquées à la géométrie analytique, conduisirent à la notion de courbes sans tangente. Depuis le commencement du XXe siècle, les géomètres sont en possession de divers artifices permettant la construction de courbes dont tous les points sont singuliers, et cela par des procédés appartenant exclusivement à ceux de la géométrie élémentaire, plus un passage à la limite.

Donnons un exemple: Imaginons un segment de droite dirigé AB; partageons-le en trois segments égaux AC, CD et DB; sur l'un des côtés du segment médian CD, à gauche par exemple, construisons le triangle équilatéral de côté CD, soit CDE, puis effaçons le segment CD. Nous disposons ainsi de quatre segments dirigés AC, CE, ED et DB. Sur chacun d'eux, effectuons la construction précédente et répétons l'opération indéfiniment. L'ensemble des sommets des triangles ainsi construits jouit de la propriété de continuité; dans tout voisinage de l'un d'eux, si petit soit-il, il existe de ces sommets. On pressent que ce lieu de points ne peut pas être décrit par un point mobile, car sa direction devrait changer avant d'avoir parcouru le moindre segment. Considérons la droite définie par deux points L et M du lieu; supposons L fixe et M mobile, astreint à se rapprocher indéfiniment de L, c'est-à-dire astreint à rester à l'intérieur d'un cercle centré sur L et de rayon indéfiniment décroissant. La sécante LM ne tend pas alors vers une

limite bien définie; elle saute de façon discontinue. La courbe considérée ne comporte donc aucune tangente.

Terminons par une remarque d'ordre général. L'exemple que nous venons d'examiner montre combien considérable est le rôle de la conviction psychologique en matière de sciences exactes et combien cette conviction peut être trompeuse, puisque certains de nos prédécesseurs se sont laissé leurrer par leur intuition. Et pourtant, cette intuition est indispensable à la découverte. Ceci montre que les problèmes fondamentaux de la science, même dans le domaine qui semble si sûr des sciences de raisonnement sont constamment « ouverts », car l'étude des notions les plus simples présente des difficultés considérables. La critique ne perd jamais ses droits. De l'œuvre scientifique, comme celle de l'écrivain, on peut dire

« Vingt fois sur le métier remettez votre ouvrage ».

Le métier, ici, c'est la pensée humaine, cette pensée qui « n'est qu'un éclair au milieu d'une longue nuit. Mais c'est cet éclair qui est tout » [1].

[1] H. Poincaré, *La valeur de la science*, p. 276.