Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles

Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève

Band: 25 (1943)

Artikel: Sur la représentation réelle d'une sphère imaginaire au moyen de l'espace réglé

Autor: Saussure, René de

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-742314

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 17.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Il semble plus vraisemblable d'admettre que le Pithécanthrope — et avec lui le Sinanthrope — sont des Hommes — d'un type spécial — mais des Hommes.

Université de Genève.
Laboratoire d'Anthropologie.

Séance du 18 mars 1943.

René de Saussure. — *Sur la représentation réelle d'une sphère imaginaire au moyen de l'espace réglé* [1].

Il y autant de droites réelles dans l'espace que de points sur une surface imaginaire; on peut donc établir une correspondance entre ces droites et ces points et se servir de l'espace réglé comme représentation *réelle* d'une sphère imaginaire, ou bien, au contraire, utiliser les formules de la géométrie sphérique pour les appliquer à l'espace réglé. Quant au rayon de la sphère imaginaire, on peut le prendre égal à l'unité imaginaire $i = \sqrt{-1}$.

* * *

Toute courbe, tracée sur la sphère imaginaire de rayon i, contient une double infinité de points. Sa transformée dans l'espace réglé est donc une congruence de droites réelles. Par exemple, aux *cercles* tracés sur la sphère imaginaire correspondent des congruences, auxquelles le professeur Cailler a donné le nom de *vrilles*; une vrille s'obtient en déplaçant une

à un résultat qui renforcerait encore les conclusions exposées ci-dessus, en aggravant la différence Homme-Gibbon au détriment de ce dernier.

[1] A l'occasion de ma 75me année, j'ai pensé qu'il serait utile de faire une revision de mes principaux travaux de géométrie pour les mettre au point en y introduisant les quelques modifications qui m'ont été suggérées depuis leur publication, particulièrement les modifications dans la nomenclature des nouvelles formes spatiales.

Le sujet dont il est ici question a été publié pour la première fois dans l'American Journal of Mathematics, vol. XVIII, nº 4, sous les titres: *Etude de Géométrie cinématique réglée* et *Calcul géométrique réglé*. Je me borne donc à en donner ici un court résumé.

droite B autour d'un axe fixe A, tout comme un cercle de la sphère s'obtient en déplaçant un point b autour d'un point fixe a. Une vrille se compose donc des droites (B) tangentes à un cylindre de révolution (d'axe A) et également inclinées sur ses génératrices.

La grandeur complexe qui mesure l'intervalle compris entre deux droites de l'espace réglé peut être mise sous la forme $P + QI$, P étant la plus courte distance et Q l'angle compris entre ces deux droites, enfin I étant une unité de longueur absolue. Cette expression correspond sur la sphère imaginaire à la distance $p + qi$ entre deux points, cette distance étant mesurée sur l'arc de grand cercle joignant ces points. L'expression $P + QI$ peut être considérée comme le *distangle* (distance — angle) formé par les deux droites.

Aux *grands cercles* de la sphère correspondent les *grandes vrilles* de l'espace réglé, lesquelles sont des vrilles dont toutes les génératrices rencontrent l'axe fixe A sous un angle droit.

Deux grands cercles de la sphère i comprennent entre eux un angle dièdre qui est mesuré par la distance $p + qi$ de leurs pôles divisée par le rayon i de la sphère. De même deux grandes vrilles déterminent entre elles une grandeur (complexe) qu'on peut appeler *co-distangle* et qui sera mesurée par le distangle AB divisé par I, comme suit : $\frac{P + QI}{I}$.

Trois grandes vrilles forment une figure qu'on peut appeler *tridistangle*, laquelle correspond sur la sphère au triangle sphérique.

* * *

Correspondance analytique entre l'espace réglé et la sphère imaginaire de rayon i.

1. *Règles de calcul* [1]. — On peut déduire les formules de l'espace réglé de celles de la sphère, mais pour qu'il y ait parfaite correspondance entre ces deux Géométries, il est nécessaire

[1] Les premiers principes de ce calcul ont été exposés dans les Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Paris (9 et 16 novembre 1896).

de donner à l'unité de longueur I une valeur appropriée, car rien n'autorise à supposer que cette unité a la même valeur que l'unité imaginaire algébrique i.

Pour trouver la valeur de I, il suffit de postuler que toute fonction d'un co-distangle est elle-même un co-distangle:

$$F\left(\frac{x_1 + I x_2}{I}\right) = \frac{y_1 + I y_2}{I},$$

x_1 et y_1 étant des longueurs, x_2 et y_2 des angles.

Or, d'après la formule de Taylor:

$$F\left(\frac{x_1 + I x_2}{I}\right) = F\left(x_2 + \frac{x_1}{I}\right) = F(x_2) + \frac{x_1}{I}\frac{dF(x_2)}{dx_2} + \text{etc...},$$

c'est-à-dire:

$$F\left(\frac{x_1 + I x_2}{I}\right) = \frac{x_1 \dfrac{dF(x_2)}{dx_2} + I F(x_2)}{I} + \text{etc. ...}$$

Le premier terme du second membre est précisément un co-distangle de la forme $\frac{y_1 + I y_2}{I}$. Quant aux autres termes du développement, ils sont d'une nature essentiellement différente et irréductible, puisqu'ils contiennent tous des puissances de I au dénominateur; ces termes doivent disparaître, et comme ils contiennent tous en facteur I^{-2}, il suffit pour les faire disparaître, de poser $I^{-2} = 0$, avec $I <> 0$, puisque le premier terme ne doit pas disparaître. Telle est la valeur de I qui, en Géométrie réglée, correspond à $i^2 = -1$ sur la sphère.

Il reste alors:

$$F\left(\frac{x_1 + I x_2}{I}\right) = \frac{x_1 \dfrac{dF(x_2)}{dx_2} + I F(x_2)}{I}$$

formule qui permet de mettre toute fonction d'un co-distangle sous la forme d'un co-distangle, par exemple:

$$\sin\left(\frac{x_1 + I x_2}{I}\right) = \frac{x_1 \cos x_2 + I \sin x_2}{I}.$$

La même formule fondamentale permet d'établir les règles de calcul suivantes applicables aux co-distangles:

$$\text{Addition:}\quad \frac{a_1 + \mathrm{I}\, a_2}{\mathrm{I}} + \frac{b_1 + \mathrm{I}\, b_2}{\mathrm{I}} = \frac{(a_1 + b_1) + \mathrm{I}\,(a_2 + b_2)}{\mathrm{I}}\,,$$

$$\text{Multiplication:}\quad \left(\frac{a_1 + \mathrm{I}\, a_2}{\mathrm{I}}\right)\left(\frac{b_1 + \mathrm{I}\, b_2}{\mathrm{I}}\right) = \frac{(a_1\, b_2 + a_2\, b_1) + \mathrm{I}\,(a_2\, b_2)}{\mathrm{I}}\,,$$

et de même pour la division, les puissances, les différentielles et les intégrales.

Avec ces règles de calcul toutes les formules ordinaires d'analyse subsistent, lorsque les lettres qui entrent dans ces formules représentent des co-distangles. Soit par exemple:

$$a = \frac{a_1 + \mathrm{I}\, a_2}{\mathrm{I}} \qquad \text{et} \qquad b = \frac{b_1 + \mathrm{I}\, b_2}{\mathrm{I}}\,,$$

on vérifiera facilement que:

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1\,, \qquad d(ab) = adb + bda\,, \quad \text{etc.}$$

Du reste, pour plus de détails sur cette question, on consultera les articles que j'ai publiés dans l'*American Journal of Mathematics*. Le résumé que je donne ici a surtout pour but de préciser et fixer la nomenclature (de remplacer, par exemple, le terme de *congruence circulaire* par le terme plus court de *vrille*, proposé par M. Cailler, qui l'a utilisé dans son article intitulé: *Géométrie des corps solides* (ou Géométrie des feuillets) *et Géométrie imaginaire* [1].

[1] Voir: Archives des Sciences physiques et naturelles, *42*, 1916. — Cet article offre beaucoup d'analogie avec le mien: la sphère imaginaire est remplacée par l'espace (ponctuel) imaginaire, et la Géométrie réglée par la Géométrie des feuillets.