

# Sur la géométrie des sphères et des cercles et la définition du plan et de la droite

Autor(en): **Rossier, Paul**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Archives des sciences physiques et naturelles**

Band (Jahr): **25 (1943)**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-742371>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

jusqu'ici à Bramois, Maragnenaz, Champsec, Chandoline, aux Etablons et à Dorénaz; c'est-à-dire partout où nous avons abordé l'étude du carbonifère par P.S.

Les recherches que nous avons entreprises soulèvent naturellement de multiples questions d'ordre scientifique et pratique sur lesquelles nous espérons revenir à mesure que progresseront nos travaux.

**Paul Rossier.** — *Sur la géométrie des sphères et des cercles et la définition du plan et de la droite.*

1. — La géométrie logique élémentaire repose sur les notions fondamentales de droite et de plan, définies axiomatiquement, c'est-à-dire de façon à satisfaire à un ensemble de propriétés énoncées *a priori*. L'élaboration des notions psychologiques de droite et de plan comporte une difficulté: ces figures sont indéfinies et il est impossible d'en donner une image matérielle ou graphique complète. Au contraire, les notions de sphère et de cercle sont à un certain point de vue plus simples que les précédentes, car il est possible d'en construire un modèle matériel complet.

Nous nous proposons d'examiner à quelles conditions il serait possible d'établir une géométrie élémentaire sur les notions fondamentales de sphère et de cercle au lieu de celles de plan et de droite.

2. — Une sphère peut être donnée intuitivement comme un corps pour lequel il est possible de trouver un mouvement tel que, traversant une plaque quelconque, il y découpe le même trou, quelle que soit l'orientation relative des deux corps. Cet énoncé, qui fait appel à une expérience matérielle, n'est pas une définition. Nous allons montrer qu'il est possible de définir axiomatiquement la sphère et, des axiomes de la sphère, de déduire les propriétés des plans et des droites. Dans un problème aussi élémentaire, la grosse difficulté est de ne pas se laisser entraîner par son intuition et d'opérer strictement logiquement. Pour cela, Hilbert a montré qu'il est avantageux

de substituer au raisonnement géométrique élémentaire des considérations portant sur un domaine plus abstrait, tel que l'algèbre ou la théorie des groupes.

3. — Introduisons donc la notion de point analytique, ensemble de trois nombres réels  $x, y, z$  pris dans un ordre déterminé. Appelons sphère analytique l'équation

$$K\{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2\} = Kr^2 .$$

où  $a, b, c$  et  $r$  sont des nombres réels et  $K$  une constante arbitraire. Un point analytique et une sphère analytique sont dits incidents si les trois nombres déterminant le premier satisfont à l'équation donnant la seconde. On dit aussi que le point appartient à la sphère. De deux sphères analytiques, nous dirons qu'elles sont égales si les nombres  $r$  (appelés rayons) sont égaux. Deux sphères analytiques sont dites concentriques si les constantes  $a, b, c$  sont égales deux à deux. Un point appartenant simultanément à deux sphères analytiques est dit appartenir à leur intersection.

Ces définitions posées, considérons deux sphères analytiques non concentriques et de rayons égaux variables et formons la différence de leurs équations. On trouve ainsi une équation linéaire entre  $x, y$  et  $z$ .

Par définition, appelons plan analytique l'ensemble des points analytiques appartenant à l'intersection de nos deux sphères. Le plan analytique est ainsi défini à partir de la notion de sphère. De même, la droite analytique sera définie par l'intersection de deux plans ou de trois systèmes de sphères de centres différents et de rayons égaux. On sait qu'il est facile de montrer que les plans et droites analytiques satisfont aux propositions concernant les plans et les droites choisies généralement comme axiomes. Il est donc logiquement possible de baser une géométrie de l'espace sur la notion fondamentale de sphère. Il est nécessaire pour cela d'admettre des axiomes précisant le sens des notions de point, de sphère et d'incidence.

Au géomètre pur, cette façon d'opérer par un détour algébrique ne donne pas satisfaction: il exige des démonstrations

ne faisant appel qu'à des notions de géométrie élémentaire. Ce travail reste à faire.

4. — La notion de sphère, admise ici, repose sur celle d'espace, d'ailleurs indispensable à toute géométrie élémentaire. Admettant la notion de plan, il serait possible d'opérer de façon analogue et de définir la droite comme lieu des intersections de cercles égaux et non concentriques. Si, au contraire, on voulait opérer directement en géométrie à  $n$  dimensions, on serait conduit à la détermination *a priori* de l'hypersphère, ce qui paraît impossible sans recours à l'analyse.

Relativement à la méthode classique, la difficulté de construire une géométrie sur la notion de sphère est donc la suivante. Dans la méthode classique, il est possible de faire constamment croître le nombre de dimensions; on admet la notion de droite, puis celle de plan et ainsi de suite. Au contraire, dans la géométrie que nous venons d'esquisser, il est nécessaire de partir d'une notion appartenant à l'espace à nombre maximum de dimensions. Dans cette géométrie, la notion de droite est plus complexe que celle de plan, ainsi que cela résulte de l'image analytique utilisée, puisque le plan ne fait intervenir qu'une équation, et la droite, deux.

**Jean-Ph. Buffle.** — *L'hydrologie de la région de Sierre (Valais).*  
*I. Les relations entre les eaux superficielles et les eaux profondes.*

Nous avons eu récemment l'occasion de compléter nos connaissances sur l'hydrologie de la région sierroise, grâce à l'amabilité de M. Vocat, Directeur des Services industriels de Sierre, que nous remercions bien vivement ici pour son obligeant concours. Nous pouvons maintenant mieux comprendre quelle est l'origine des eaux superficielles et des eaux profondes de la région sierroise, quelles sont les relations qui les lient et quelle est enfin l'influence des terrains traversés sur leur composition.

a) *Eaux superficielles.*

1. *Le Rhône et ses affluents.* — L'analyse de l'eau du Rhône