

**Zeitschrift:** Archives des sciences physiques et naturelles  
**Herausgeber:** Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève  
**Band:** 25 (1943)

**Artikel:** Sur la géométrie des sphères et des cercles et la définition du plan et de la droite  
**Autor:** Rossier, Paul  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-742371>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

jusqu'ici à Bramois, Maragnenaz, Champsec, Chandoline, aux Etablons et à Dorénaz; c'est-à-dire partout où nous avons abordé l'étude du carbonifère par P.S.

Les recherches que nous avons entreprises soulèvent naturellement de multiples questions d'ordre scientifique et pratique sur lesquelles nous espérons revenir à mesure que progresseront nos travaux.

**Paul Rossier.** — *Sur la géométrie des sphères et des cercles et la définition du plan et de la droite.*

1. — La géométrie logique élémentaire repose sur les notions fondamentales de droite et de plan, définies axiomatiquement, c'est-à-dire de façon à satisfaire à un ensemble de propriétés énoncées *a priori*. L'élaboration des notions psychologiques de droite et de plan comporte une difficulté: ces figures sont indéfinies et il est impossible d'en donner une image matérielle ou graphique complète. Au contraire, les notions de sphère et de cercle sont à un certain point de vue plus simples que les précédentes, car il est possible d'en construire un modèle matériel complet.

Nous nous proposons d'examiner à quelles conditions il serait possible d'établir une géométrie élémentaire sur les notions fondamentales de sphère et de cercle au lieu de celles de plan et de droite.

2. — Une sphère peut être donnée intuitivement comme un corps pour lequel il est possible de trouver un mouvement tel que, traversant une plaque quelconque, il y découpe le même trou, quelle que soit l'orientation relative des deux corps. Cet énoncé, qui fait appel à une expérience matérielle, n'est pas une définition. Nous allons montrer qu'il est possible de définir axiomatiquement la sphère et, des axiomes de la sphère, de déduire les propriétés des plans et des droites. Dans un problème aussi élémentaire, la grosse difficulté est de ne pas se laisser entraîner par son intuition et d'opérer strictement logiquement. Pour cela, Hilbert a montré qu'il est avantageux

de substituer au raisonnement géométrique élémentaire des considérations portant sur un domaine plus abstrait, tel que l'algèbre ou la théorie des groupes.

3. — Introduisons donc la notion de point analytique, ensemble de trois nombres réels  $x, y, z$  pris dans un ordre déterminé. Appelons sphère analytique l'équation

$$K\{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2\} = Kr^2 .$$

où  $a, b, c$  et  $r$  sont des nombres réels et  $K$  une constante arbitraire. Un point analytique et une sphère analytique sont dits incidents si les trois nombres déterminant le premier satisfont à l'équation donnant la seconde. On dit aussi que le point appartient à la sphère. De deux sphères analytiques, nous dirons qu'elles sont égales si les nombres  $r$  (appelés rayons) sont égaux. Deux sphères analytiques sont dites concentriques si les constantes  $a, b, c$  sont égales deux à deux. Un point appartenant simultanément à deux sphères analytiques est dit appartenir à leur intersection.

Ces définitions posées, considérons deux sphères analytiques non concentriques et de rayons égaux variables et formons la différence de leurs équations. On trouve ainsi une équation linéaire entre  $x, y$  et  $z$ .

Par définition, appelons plan analytique l'ensemble des points analytiques appartenant à l'intersection de nos deux sphères. Le plan analytique est ainsi défini à partir de la notion de sphère. De même, la droite analytique sera définie par l'intersection de deux plans ou de trois systèmes de sphères de centres différents et de rayons égaux. On sait qu'il est facile de montrer que les plans et droites analytiques satisfont aux propositions concernant les plans et les droites choisies généralement comme axiomes. Il est donc logiquement possible de baser une géométrie de l'espace sur la notion fondamentale de sphère. Il est nécessaire pour cela d'admettre des axiomes précisant le sens des notions de point, de sphère et d'incidence.

Au géomètre pur, cette façon d'opérer par un détour algébrique ne donne pas satisfaction: il exige des démonstrations

ne faisant appel qu'à des notions de géométrie élémentaire. Ce travail reste à faire.

4. — La notion de sphère, admise ici, repose sur celle d'espace, d'ailleurs indispensable à toute géométrie élémentaire. Admettant la notion de plan, il serait possible d'opérer de façon analogue et de définir la droite comme lieu des intersections de cercles égaux et non concentriques. Si, au contraire, on voulait opérer directement en géométrie à  $n$  dimensions, on serait conduit à la détermination *a priori* de l'hypersphère, ce qui paraît impossible sans recours à l'analyse.

Relativement à la méthode classique, la difficulté de construire une géométrie sur la notion de sphère est donc la suivante. Dans la méthode classique, il est possible de faire constamment croître le nombre de dimensions; on admet la notion de droite, puis celle de plan et ainsi de suite. Au contraire, dans la géométrie que nous venons d'esquisser, il est nécessaire de partir d'une notion appartenant à l'espace à nombre maximum de dimensions. Dans cette géométrie, la notion de droite est plus complexe que celle de plan, ainsi que cela résulte de l'image analytique utilisée, puisque le plan ne fait intervenir qu'une équation, et la droite, deux.

**Jean-Ph. Buffle.** — *L'hydrologie de la région de Sierre (Valais).*  
*I. Les relations entre les eaux superficielles et les eaux profondes.*

Nous avons eu récemment l'occasion de compléter nos connaissances sur l'hydrologie de la région sierroise, grâce à l'amabilité de M. Vocat, Directeur des Services industriels de Sierre, que nous remercions bien vivement ici pour son obligeant concours. Nous pouvons maintenant mieux comprendre quelle est l'origine des eaux superficielles et des eaux profondes de la région sierroise, quelles sont les relations qui les lient et quelle est enfin l'influence des terrains traversés sur leur composition.

a) *Eaux superficielles.*

1. *Le Rhône et ses affluents.* — L'analyse de l'eau du Rhône