Sur la mécanique ondulatoire des corpuscules élémentaires

Autor(en): **Kwal, Bernard**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Archives des sciences physiques et naturelles**

Band (Jahr): **26 (1944)**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-742682

SUR LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE DES CORPUSCULES ÉLÉMENTAIRES

PAR

Bernard KWAL[1]

PREMIÈRE PARTIE

Résumé.

On se propose d'édifier une théorie générale des corpuscules élémentaires de spin quelconque et de masse au repos, finie ou nulle. La trame mathématique du travail est basée essentiellement sur la multiplication extérieure des matrices, opération dont les propriétés sont examinées succinctement dans l'introduction. On s'en sert pour construire les matrices de spin σ et les matrices α, en nombre de $2^{2j-1} - 1$, de l'hamiltonien.

L'étude de la suite, en complexité croissante, d'équations d'onde des corpuscules élémentaires, conduit à distinguer les équations primaires et les équations secondaires: composées, mixtes et mixtes composées. Les plus simples, les équations primaires, sont formées au moyen des matrices de spin de rang le plus bas possible (2 pour le spin ½, 4 pour le spin 1, etc. ..., 2^{2j} pour le spin j). Au corpuscule de spin j et de masse au repos nulle, on peut associer 2^{2j-1} systèmes d'équations pri-

[1] Mémoire rédigé dans le Stalag II A allemand et transmis par la Croix Rouge Internationale, service de secours intellectuel.

maires. Il existe donc 2^{2j-1} espèces de cette sorte de corpuscules. Lorsqu'on introduit dans les équations primaires les termes de masse, force est d'y faire figurer les fonctions complexes conjuguées. Les équations composées de degré k, qui s'obtiennent en considérant des systèmes de $k+1$ équations primaires simultanées, peuvent revêtir une forme dans laquelle dans le terme de masse figure la même fonction ψ que dans le reste de l'équation, et non sa conjuguée complexe. Ainsi, les équations de Dirac se présentent-elles dans notre théorie comme les équations composées du premier degré pour $j = \frac{1}{2}$.

Lorsque $j \geqslant 1$, on peut former les équations mixtes, en interconnectant, par l'intermédiaire du terme de masse, les 2^{2j-1} systèmes d'équations primaires, de manière à mettre en jeu des fonctions d'ondes à $2^{2j-1} \times 2^{2j+1} = 2^{4j}$ composantes. Il existe d'ailleurs, 2^{2j-1} manières différentes d'interconnection qui conduisent à autant de systèmes d'équations.

Les deux systèmes d'équations mixtes pour le corpuscule de spin 1 donnent lieu aux équations composées du premier degré qui sont équivalentes. Ce système unique est identique aux équations du photon de M. Louis de Broglie. Pour terminer, on forme les équations mixtes, composées du premier degré, dans le cas général du spin j quelconque.

1. Introduction: Multiplication extérieure des matrices.

Soient A et B deux matrices quelconques de rang (c'est-à-dire de nombre d'indices dont sont affectés les éléments de matrice) n_1 et n_2. L'opération de la multiplication extérieure, effectuée sur les matrices A et B, dans l'ordre $A \longrightarrow B$, a pour résultat la formation d'une matrice $C = A \times B$ de rang $n = n_1 + n_2$ dont l'élément de matrice $c_{i_1, \ldots i_n}$ est obtenu à partir des éléments de matrice $a_{i_1 \ldots i_{n_1}}$ et $b_{i'_1, \ldots i'_{n_2}}$ de la manière que voici:

$$c_{i_1, \ldots i_n} = c_{i_1, \ldots i_{n_1}, \ldots i'_1, \ldots i'_{n_2}} = a_{i_1, \ldots i_{n_1}} \cdot b_{i'_2, \ldots i'_{n_2}} \cdot \qquad (1a)$$

Nous nous bornerons dans la suite aux matrices de rang multiple de deux. Dans ce cas, il résulte de la définition précédente la relation

$$\big([A \times B][C \times D]\big) = \big[(AC) \times (BD)\big] \tag{1b}$$

où par (AC) etc. est symbolisée la multiplication ordinaire des matrices, définie comme suit:

$$(AC)_{i_1, \dots i_n ; i'_1 \dots i'_n} =$$
$$= \sum_{k_1, \dots k_n} a_{i_1, k_1 ; i_2, k_2 ; \dots i_n, k_n} \cdot c_{k_1, i'_1 ; k_2, i'_2 ; \dots k_n, i'_n} \,. \tag{1c}$$

Nous avons, en effet, en tenant compte de (1*a*) et de (1*c*),

$$\big[(AC) \times (BD)\big]_{i_1, i_2 ; i'_1, i'_2} = \sum_k (a_{i_1, k}\, c_{k, i_2}) \sum_{k'} (b_{i'_1, k'}\, d_{k', i'_2})$$
$$= \sum_k \sum_{k'} [a_{i_1, k}\, b_{i'_1, k'}][c_{k, i_2}\, d_{k', i'_2}] =$$
$$= \sum_k \sum_{k'} [A \times B]_{i_1, k ; i'_1, k'} [C \times D]_{k i_2 ; k' i'_2} \,.$$

Posons dans (1*b*) $C = A^{-1}$ et $D = B^{-1}$, on obtient alors

$$[A \times B][A^{-1} \times B^{-1}] = [1 \times 1] \,. \tag{1d}$$

Considérons maintenant une matrice V qui transforme une matrice donnée A en une matrice diagonale:

$$V^{-1} AV = A_d \tag{1e}$$

Nous allons montrer que la matrice $V \times V$ transforme $1 \times A$ et $A \times 1$ en matrices diagonales $1 \times A_d$ et $A_d \times 1$, respectivement.

Effectivement, en vertu de (1*b*), nous avons:

$$[V^{-1} \times V^{-1}][1 \times V] = [V^{-1} \times (V^{-1} A)] \,,$$
$$[V^{-1} \times (V^{-1} A)][V \times V] = [1 \times (V^{-1} AV)] = [1 \times A_d] \,,$$

C.Q.F.D.

Remarque. — Les matrices de rang multiple de deux peuvent être représentées de plusieurs façons au moyen des matrices de rang deux, en faisant correspondre à tout élément $c_{i_1, \dots i_n, i'_1 \dots i'_n}$ un élément $c_{i, i'}$, obtenu en association à toute combinaison de nombres $i_1, \dots i_n$ un nombre i et à toute combinaison de nombres $i'_1, \dots i'_n$ un dombre i'. Si les i_k prennent toutes les valeurs entières comprises entre 1 et l_k, i prendra toutes les valeurs entières comprises entre 1 et $l_1 l_2 \dots l_k$.

2. Equations d'ondes des corpuscules de spin quelconque, a une seule fonction d'onde associée.

2.1 *Equations primaires.*

Pour que l'opérateur $\mathcal{H} = \frac{h}{i} \alpha_k \frac{\partial}{\partial x_k}$ représente l'hamiltonien relatif au corpuscule sans masse, de spin quelconque j, il faut, les σ_k étant les matrices de spin, que l'on ait

$$\alpha_i \sigma_k - \sigma_k \alpha_i = \begin{cases} 0, \text{ si } k = i \\ \pm \alpha_l, \text{ si } k \neq i , \end{cases} \tag{2.1a}$$

(le signe $+$, lorsque les nombres i, k, l forment une permutation paire des nombres 1, 2, 3; le signe —, en cas d'une permutation impaire).

Une solution particulière des relations (2.1a) est donnée par $\alpha_i = k\sigma_i$, k étant un coefficient de proportionnalité, nombre ordinaire, par ailleurs arbitraire.

Pour pouvoir résoudre les problèmes qui puissent se poser à l'occasion des corpuscules de spin quelconque, et, en particulier, pour trouver les équations auxquelles satisfont les fonctions représentant l'onde associée, nous devons construire: 1° les matrices de spin σ_k^j, 2° les matrices ${}^l\alpha_k^j$ autres que les matrices de spin, satisfaisant aux relations (2.1a). Nous prendrons comme base de départ les matrices de Pauli et nous allons montrer que les expressions qui suivent fournissent la solution cherchée:

$$
\left.
\begin{aligned}
\sigma^j &= 1 \times 1 \times \ldots \times 1 \times \sigma^{1/2} + 1 \times 1 \times \ldots \times \sigma^{1/2} \times 1 + \ldots \\
&\ldots + 1 \times 1 \times \ldots \times \underset{n}{\sigma^{1/2}} \times \ldots \times 1 + \ldots + \sigma^{1/2} \times 1 \times \ldots \times 1 \times 1 \,. \\
&= \sum_{n=1}^{2j} 1 \times 1 \times \ldots \times \underset{n}{\sigma^{1/2}} \times \ldots \times 1 \times 1 = \sum_{n=1}^{2j} s_n
\end{aligned}
\right\} \quad (2.1b)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
{}^{1}\alpha^j &= 1 \times 1 \times \ldots \times 1 \times \sigma^{1/2} + 1 \times 1 \times \ldots \times \sigma^{1/2} \times 1 + \ldots \\
&\ldots + 1 \times 1 \times \ldots \times \underset{n}{\sigma^{1/2}} \times \ldots \times 1 + \ldots - \sigma^{1/2} \times 1 \times \ldots \times 1 \times 1 \\
&= \sum_{n=2}^{2j} s_n - s_1 = \sigma^j - 2 s_1 \\
{}^{l_{k_1}}\alpha^j &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k_1}}^{2j} s_n - s_{k_1} = \sigma^j - 2 s_{k_1} \\
{}^{l_k}\alpha^j &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq n_1,\, n_2,\, \ldots\, n_k}}^{2j} s_n - \sum_{n_1}^{n_k} s_{n_i} = \sigma^j - 2 \sum_{n_1}^{n_k} s_{n_i}
\end{aligned}
\right\} \quad (2.1c)
$$

s_n^j étant un produit de $2j$ facteurs où σ occupe la $n^{\text{ième}}$ place:

$$
s_n^j = 1 \times 1 \times \ldots \times 1 \times \underset{n}{\sigma^{1/2}} \times 1 \times \ldots \times 1 \,, \qquad (2.1d)
$$

$n_1, n_2, \ldots n_k$ sont k nombres parmi $1, 2, \ldots 2j$, k étant un entier de l'intervalle $(0, j + 1/2)$ $0 < k \leqslant j + 1/2$.

D'après la loi de formation des ${}^{l_k}\alpha^j$, on voit que le nombre de valeurs possibles pour l_k est égal à C_{2j}^k et le nombre total des valeurs de l est égal à

$$
1/2 \sum_{k=0}^{k=2j} C_{2j}^k - 1 = 2^{2j-1} - 1 \,.
$$

Voici maintenant la démonstration annoncée que (2.1b) et (2.1c) satisfont à (2.1a).

Nous avons tout d'abord

$$\sigma_i^j \sigma_k^j = \sum_n (s_i)_n \sum_{n'} (s_k)_{n'} = \sum_n \sum_{n'} (s_i)_n (s_k)_{n'}$$

or

$$(s_i)_n (s_k)_{n'} = \begin{cases} 1 \times 1 \times \ldots \times \underset{n}{\sigma_i^j} \times \ldots \times \underset{n'}{\sigma_k^j} \times \ldots \times 1 & \text{si } n < n' \\ 1 \times 1 \times \ldots \times (\sigma_i \sigma_k) \times \ldots \times 1 & \text{si } n = n' \\ 1 \times 1 \times \ldots \times \underset{n'}{\sigma_k^j} \times \ldots \times \underset{n}{\sigma_i^j} \times \ldots \times 1 & \text{si } n > n' \end{cases}$$

donc

$$(s_i)_n (s_k)_{n'} - (s_k)_{n'} (s_i)_n = i \delta_{nn'} (s_l)_n \tag{2.1e}$$

avec

$$\delta_{nn'} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq n' \\ 1 & \text{si} \quad n = n' \end{cases}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} \sigma_i^j \sigma_k^j - \sigma_k^j \sigma_i^j &= \sum_{n,\, n'} \left\{ (s_i^j)_n (s_k^j)_{n'} - (s_k^j)_{n'} (s_i^j)_n \right\} \\ &= i \sum_{n,\, n'} \delta_{nn'} (s_l^j)_n = i \sum_{n'} (s_l^j)_{n'} = i \sigma_l^j \ . \end{aligned}$$

On a de même

$$\begin{aligned} {}^{l_k}\alpha_i \sigma_k - \sigma_k {}^{l_k}\alpha_i &= \left\{ \sigma_i - 2 \sum_{n_1}^{n_k} (s_i)_{n_m} \right\} \sigma_k - \sigma_k \left\{ \sigma_i - 2 \sum_{n_1}^{n_k} (s_i)_{n_m} \right\} \\ &= i \sigma_l - 2 \left\{ \sum_m (s_i)_{n_m} \sigma_k - \sigma_k \sum_m (s_i)_{n_m} \right\} \\ &= i \sigma_l - i\, 2 \sum_m (s_l)_{n_m} = i \alpha_l \ . \qquad \text{C. Q. F. D.} \end{aligned}$$

Ainsi les équations (2.1a) admettent-elles 2^{2j-1} solutions du type (2.1b) et (2.1c). Nous pouvons donc attribuer au corpuscule de spin quelconque j, 2^{2j-1} hamiltoniens primaires; ce qui nous conduit, en nous restreignant de prime abord aux corpuscules sans masse, à écrire 2^{2j-1} systèmes d'équations d'onde, obtenus en faisant $\mathcal{H} \psi = 0$ et, en adjoignant au groupe d'équations ainsi engendré d'autres groupes complémentaires, choisies de manière à satisfaire la condition

$$\Box \psi = 0 . \tag{2.1f}$$

On arrive à les déduire, ces groupes complémentaires dont le nombre est égal à $2j - 1$, en raisonnant comme suit. Commençons par poser

$$S^{1/2} = 2\sigma_k^{1/2} \partial_k = 2\left(\sigma_1^{1/2} \frac{\partial}{\partial x_1} + \sigma_2^{1/2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \sigma_3^{1/2} \frac{\partial}{\partial x_3}\right), \tag{2.1g}$$

on a alors

$$(S^{1/2})^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2$$

$$(\partial_t - S^{1/2})(\partial_t + S^{1/2}) = \Box = \partial_t^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2 - \partial_3^2$$

$$[1 \times 1 \times \ldots \times S_n^{1/2} \times \ldots \times 1 \times 1]^2 =$$

$$= 1 \times 1 \times \ldots \times \underbrace{(\partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2)}_{n} \times \ldots \times 1 \times 1$$

$$= (\partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2)[1 \times 1 \times \ldots \times 1 \times \ldots \times 1 \times 1]$$

$$= (\partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2)\left[\prod_1^{2j} (1_n)\right] .$$

Afin de simplifier les notations, nous poserons en outre

$$S_n^j = 1 \times 1 \times \ldots \times S_n^{1/2} \times \ldots \times 1 \times 1 ; \tag{2.1h}$$

S_n^j est donc un produit extérieur de $2j$ facteurs dont $2j-1$ sont constitués par la matrice unité et dont un, occupant la $n^{\text{ième}}$ place, est la matrice — opérateur différentiel — $S^{1/2}$, définie par (2.1g).

Cela étant, on vérifie aisément que la solution cherchée, pour les équations d'onde primaires du corpuscule de spin j, se présente sous la forme de 2^{2j-1} systèmes d'équations, comprenant chacun $2j$ groupes de 2^{2j} équations (la fonction d'onde ψ^j ayant 2^{2j} fois plus de composantes que la fonction $\psi^{1/2}$ qui est à 2 composantes):

$$\left.\begin{array}{lr}
(\partial_t + S^j_1)\,\psi = 0 \ldots (\partial_t + S^j_n)\,\psi = 0 \ldots \qquad\qquad (\partial_t + S^j_{2j})\,\psi = 0 & (1) \\
(\partial_t + S^j_1)\,\psi = 0 \ldots (\partial_t + S^j_n)\,\psi = 0 \ldots (\partial_t + S^j_{2j-1})\,\psi = 0\,,\ (\partial_t - S^j_{2j})\,\psi = 0 & (2) \\
(\partial_t + S^j_1)\,\psi = 0 \ldots (\partial_t + S^j_n)\,\psi = 0 \ldots (\partial_t - S^j_{2j-1})\,\psi = 0\,,\ (\partial_t + S^j_{2j})\,\psi = 0 & (3) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
(\partial_t - S^j_1)\,\psi = 0\,,\ (\partial_t + S^j_2)\,\psi = 0 \ldots\ldots\ldots \qquad (\partial_t + S^j_{2j})\,\psi = 0 & (2j+1) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
(\partial_t + S^j_1)\,\psi = 0\,, \ldots (\partial_t + S_{j \text{ ou } j-1/2})\,\psi = 0\,, & \\
\qquad (\partial_t - S_{j+1 \text{ ou } j+1/2})\,\psi = 0\,, \ldots (\partial_t - S^j_{2j})\,\psi = 0 & (2^{2j-1})
\end{array}\right\} \quad (2.1i)$$

(j et $j+1$ lorsque $2j$ est un nombre pair, $j - 1/2$ et $j + 1/2$ lorsque $2j$ est un nombre impair).

Nous pouvons donc dire qu'il existe 2^{2j-1} espèces de corpuscules sans masse de spin j et autant de corpuscules complémentaires.

Quant au terme de *masse*, on peut l'ajouter formellement aux équations que nous venons d'écrire, selon le procédé suivant:

Posons

$$\varkappa = \frac{mc}{h} \tag{2.1j}$$

et imposons aux ψ la condition

$$\Box\,\psi = -\varkappa^2\psi\,. \tag{2.1k}$$

Ecrivons alors

$$(\partial_t + S^{1/2})\,\psi = \varkappa\sigma\psi^* \tag{2.1l}$$

σ étant une matrice à déterminer. On a

$$\Box\,\psi = (\partial_t - S^{1/2})(\partial_t + S^{1/2})\,\psi = \varkappa(\partial_t - S^{1/2})\,\sigma\psi^* =$$
$$= -\varkappa^2\psi = \varkappa\sigma\left(\partial_t + (S^{1/2})^*\right)\psi^*\,.$$

D'où les deux conditions auxquelles doit satisfaire σ:

$$-S^{1/2}\sigma = \sigma(S^{1/2})^* \tag{2.1m}$$

$$\sigma\sigma^* = -1\,. \tag{2.1n}$$

La condition (2.1m) conduit aux relations:

$$\sigma_k \sigma = -\sigma \sigma_k^* \tag{2.1m'}$$

σ_k étant une matrice quelconque de Pauli. On satisfait les relations (2.1m) et (2.1n) en prenant pour σ le double de la matrice de Pauli à éléments purement imaginaires.

Les équations primaires des corpuscules de spin j peuvent de même être pourvues *formellement* d'un terme de masse. En voici un groupe d'équations :

$$(\partial_t \pm S_n^j)\,\psi = \varkappa[\sigma' \times \sigma'' \times \ldots \times \sigma^{(n-1)} \times \sigma \times \sigma^{(n+1)} \times \ldots \times \sigma^{(2j)}]\,\psi^* \tag{2.1o}$$

où la matrice σ, précédemment définie, figure comme $n^{\text{ième}}$ facteur et où $\sigma' \times \sigma'' \times \ldots \times \sigma^{(2j)}$ représente un produit de $n-1$ matrices unitaires à deux lignes et à deux colonnes, ne contenant qu'un nombre pair des matrices à éléments purement imaginaires. A titre d'exemple nous allons écrire les équations primaires relatives aux corpuscules de spin 1 et $^3/_2$:

Spin 1

$$(1)\left\{\begin{aligned}&\left(\partial_t + [1 \times S^{1/2}]\right)\psi = \varkappa[\sigma' \times \sigma]\,\psi^*\\&\left(\partial_t + [S^{1/2} \times 1]\right)\psi = \varkappa[\sigma \times \sigma']\,\psi^*\end{aligned}\right. \qquad (2)\left\{\begin{aligned}&\left(\partial_t + [1 \times S^{1/2}]\right)\psi = \varkappa[\sigma' \times \sigma]\,\psi^*\\&\left(\partial_t - [S^{1/2} \times 1]\right)\psi = \varkappa[\sigma \times \sigma']\,\psi^*\end{aligned}\right. \tag{2.1p}$$

Spin $^3/_2$

$$(1)\left\{\begin{aligned}&\left(\partial_t + [1 \times 1 \times S^{1/2}]\right)\psi = \varkappa[\sigma' \times \sigma' \times \sigma]\,\psi^*\\&\left(\partial_t + [1 \times S^{1/2} \times 1]\right)\psi = \varkappa[\sigma' \times \sigma \times \sigma']\,\psi^*\\&\left(\partial_t + [S^{1/2} \times 1 \times 1]\right)\psi = \varkappa[\sigma \times \sigma' \times \sigma']\,\psi^*\end{aligned}\right. \qquad (2)\left\{\begin{aligned}&\left(\partial_t + [1 \times 1 \times S^{1/2}]\right)\psi = \varkappa[\sigma' \times \sigma' \times \sigma]\,\psi^*\\&\left(\partial_t + [1 \times S^{1/2} \times 1]\right)\psi = \varkappa[\sigma' \times \sigma \times \sigma']\,\psi^*\\&\left(\partial_t - [S^{1/2} \times 1 \times 1]\right)\psi = \varkappa[\sigma \times \sigma' \times \sigma']\,\psi^*\end{aligned}\right.$$

$$(3)\left\{\begin{aligned}&\left(\partial_t + [1 \times 1 \times S^{1/2}]\right)\psi = \varkappa[\sigma' \times \sigma' \times \sigma]\,\psi^*\\&\left(\partial_t - [1 \times S^{1/2} \times 1]\right)\psi = \varkappa[\sigma' \times \sigma \times \sigma']\,\psi^*\\&\left(\partial_t + [S^{1/2} \times 1 \times 1]\right)\psi = \varkappa[\sigma \times \sigma' \times \sigma']\,\psi^*\end{aligned}\right. \qquad (4)\left\{\begin{aligned}&\left(\partial_t - [1 \times 1 \times S^{1/2}]\right)\psi = \varkappa[\sigma' \times \sigma' \times \sigma]\,\psi^*\\&\left(\partial_t + [1 \times S^{1/2} \times 1]\right)\psi = \varkappa[\sigma' \times \sigma \times \sigma')\,\psi^*\\&\left(\partial_t + [S^{1/2} \times 1 \times 1]\right)\psi = \varkappa[\sigma \times \sigma' \times \sigma']\,\psi^*\end{aligned}\right. \tag{2.1q}$$

2.2 *Equations secondaires.*

2.21 *Equations composées.*

Les équations composées de degré k du corpuscule de spin j s'obtiennent en considérant un système de $k+1$ équations primaires simultanées. L'intérêt des équations composées réside dans la possibilité de donner aux équations une forme où dans le terme de masse figure la même fonction ψ que dans le reste de l'équation et non pas la fonction conjuguée complexe, comme c'est le cas des équations primaires. Ces équations sont donc compatibles avec l'existence d'un hamiltonien du type

$$\mathcal{H} = \frac{h}{i}\alpha_k \frac{\partial}{\partial x_k} + \alpha_5 m_0 c \ .$$

Envisageons premièrement les équations composées du corpuscule de spin $\frac{1}{2}$:

$$\begin{cases} \left(\partial_t + S^{\frac{1}{2}}\right)^{(1)}\varphi = \varkappa\sigma^{(1)}\varphi^* \\ \left(\partial_t + S^{\frac{1}{2}}\right)^{(2)}\varphi = \varkappa\sigma^{(2)}\varphi^* \ . \end{cases} \qquad (2.21a)$$

Posons

$${}^{(1)}\psi = {}^{(1)}\varphi + i\,{}^{(2)}\varphi \ , \qquad {}^{(2)}\psi = \sigma({}^{(1)}\varphi^* + i\,{}^{(2)}\varphi^*) \ , \qquad (2.21b)$$

et considérons une fonction ψ à 4 composantes (${}^{(1)}\psi_1$, ${}^{(1)}\psi_2$, ${}^{(2)}\psi_1$, ${}^{(2)}\psi_2$). Les équations (2.21*a*) deviennent

$$\left(\partial_t + \begin{vmatrix} S^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & -S^{\frac{1}{2}} \end{vmatrix}\right)\psi = \varkappa \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}\psi = i\varkappa \begin{vmatrix} 0 & -i \\ +i & 0 \end{vmatrix}\psi \qquad (2.21c)$$

ce qui n'est qu'*une des représentations possibles de l'équation de Dirac.* D'une manière plus générale nous écrirons pour cette équation

$$\left(\partial_t + [\sigma^l \times S^{\frac{1}{2}}]\right)\Psi = i\varkappa[\sigma^k \times 1]\psi \qquad (2.21d)$$

Or

$$\Box\psi = i\varkappa\left(\partial_t - [\sigma^l \times S^{\frac{1}{2}}]\right)[\sigma^k \times 1]\psi =$$
$$= i\varkappa[\sigma^k \times 1]\left(\partial_t + [\sigma^l \times S^{\frac{1}{2}}]\right)\psi = -\varkappa^2\psi \ .$$

D'où les conditions:

$$(\sigma^l)^2 = (\sigma^k)^2 = 1\ , \qquad \sigma^k \sigma^l = -\sigma^l \sigma^k\ . \qquad (2.21e)$$

Donc σ^k et σ^l sont les doubles de deux matrices différentes de Pauli ($k \neq l$).

En formant les équations composées de degré supérieur à un, pour le corpuscule de spin ½, on aboutit aux équations de Whittaker. Nous reviendrons encore sur ce point plus loin.

Pour le spin $j > ½$, chaque système d'équations va donner naissance à une suite autonome d'équations composées. Pour chaque groupe, on déduit, par exemple, les équations composées de degré 1 qui sont les suivantes:

$$\pm \left| \begin{matrix} S_n^j & 0 \\ 0 & -S_n^j \end{matrix} \right| \Bigg) \psi = i\varkappa \left| \begin{matrix} 0, & [\sigma' \times \sigma'' \times \ldots \times \sigma^{(n-1)} \times \sigma \times \sigma^{(n+1)} \times \ldots \times \sigma^{(2j)}] \\ -[\sigma' \times \sigma'' \times \ldots \times \sigma^{(n-1)} \times \sigma \times \sigma^{(n+1)} \times \ldots \times \sigma^{(2j)}], & 0 \end{matrix} \right| \Psi \qquad (2.21f)$$

où ψ est une fonction à 2^{2j+1} composantes, définie par les relations:

$$^{(1)}\psi = {}^{(1)}\varphi + i\,{}^{(2)}\varphi\ ;$$

$$^{(2)}\psi = [\sigma' \times \sigma'' \times \ldots \times \sigma^{(n-1)} \times \sigma \times \sigma^{(n+1)} \times \ldots \times \sigma^{(2j)}]\,({}^{(1)}\varphi^* + i\,{}^{(2)}\varphi^*)\ . \qquad (2.21g)$$

Ces relations devant jouer simultanément pour les $2j$ groupes d'équations du corpuscule de spin j, il faut que l'on ait

$$\sigma' = \sigma'' = \ldots = \sigma^{(n-1)} = \sigma^{(n+1)} = \ldots = \sigma^{(2j)} = \sigma\ .$$

On posera, d'une manière générale:

$$\left(\partial_t \pm [\sigma^l \times S_n^j]\right)\psi = i\varkappa \left[\sigma^k \times \coprod_1^{2j} \sigma\right]\psi\ , \qquad (2.21h)$$

et l'on démontrera, comme précédemment, que les matrices σ^l et σ^k satisfont aux relations (2.21e).

2.22 *Equations mixtes.*

Ce type d'équations peut être formé pour $j > \frac{1}{2}$, en interconnectant par l'intermédiaire du terme de masse les 2^{2j-1} systêmes d'équations primaires (de 2^{2j-1} manières différentes, donc il existe, pour le spin j, 2^{2j-1} systèmes d'équations mixtes), de façon à obtenir des systèmes où jouent des fonctions d'onde à $2^{2j-1} \times 2^{2j+1} = 2^{4j}$ composantes. Avant de nous attaquer au cas général, nous allons pour plus de clarté traiter le cas particulier du spin 1.

Reprenons les équations (2.1p) en combinant les systèmes (1) et (2) de la manière que voici:

$$(1)\begin{cases} \left(\partial_t + S^1_2\right)\psi = \varkappa[\sigma' \times \sigma]\varphi^* , \\ \left(\partial_t + S^1_2\right)\varphi = -\varkappa[\sigma' \times \sigma]\psi^* , \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} \left(\partial_t + S^1_1\right)\psi = i\varkappa[1 \times 1]\varphi \\ \left(\partial_t - S^1_1\right)\varphi = i\varkappa[1 \times 1]\psi \end{cases} \tag{2.22a}$$

$$(1)\begin{cases} \left(\partial_t + S^1_2\right)\psi = i\varkappa[1 \times 1]\varphi , \\ \left(\partial_t - S^1_2\right)\varphi = i\varkappa[1 \times 1]\psi , \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} \left(\partial_t + S^1_1\right)\psi = \varkappa[\sigma \times \sigma']\varphi^* \\ \left(\partial_t + S^1_1\right)\varphi = -\varkappa[\sigma \times \sigma']\psi^* . \end{cases} \tag{2.22b}$$

Dans un groupe d'équations figurent aux termes de masse des fonctions ψ^* et φ^*, tandis que dans un autre, les fonctions ψ et φ. Cela résulte des conditions de compatibilité des équations du type (1) et de celles du type (2), question dont il sera question plus tard. L'étude de l'écriture relativiste de ces équations conduit, par ailleurs, clairement à la même constatation. Quant aux matrices σ', leur structure résulte des conditions:

$$\Box\psi = -\varkappa^2\psi \quad \text{et} \quad \Box\varphi = -\varkappa^2\varphi .$$

On a ainsi, par exemple:

$$\begin{aligned} \Box\psi &= \left(\partial_t - S^1_2\right)\left(\partial_t + S^1_2\right)\psi = \varkappa\left(\partial_t - S^1_2\right)[\sigma' \times \sigma]\varphi^* \\ &= \varkappa[\sigma' \times \sigma]\left(\partial_t + S^{1*}_2\right)\varphi^* = -\varkappa^2[\sigma' \times \sigma][\sigma' \times \sigma]^*\psi = -\varkappa^2\psi ; \end{aligned}$$

d'où l'on tire $\sigma'\sigma'^* = -1$, relation qui est satisfaite en prenant pour σ' la matrice σ à éléments purement imaginaires.

Nous condenserons les écritures en prenant une fonction d'onde unique $\Psi(\psi, \varphi)$. Ensuite nous écrirons d'une manière plus générale:

$$\left(\partial_t + [\sigma^l \times S_n^1]\right)\Psi = \varkappa[\sigma^k \times \sigma \times \sigma]\Psi^* \; ; \qquad \left(\partial_t + [\sigma^{l'} \times S_{n'}^1]\right)\Psi = i\varkappa[\sigma^{k'} \times 1 \times 1]\Psi \tag{2.22a'}$$

$$\left(\partial_t + [\sigma^{l'} \times S_n^1]\right)\Psi = i\varkappa[\sigma^{k'} \times 1 \times 1]\Psi \; ; \qquad \left(\partial_t + [\sigma^l \times S_{n'}^1]\right)\Psi = \varkappa[\sigma^k \times \sigma \times \sigma]\Psi^* \; . \tag{2.22b'}$$

On a alors

$$\square\Psi = \varkappa\left(\partial_t - [\sigma^l \times S_n^1]\right)[\sigma^k \times \sigma \times \sigma]\Psi^* = \varkappa[\sigma^k \times \sigma \times \sigma]\left(\partial_t + [\sigma^l \times S_n^1]^*\right)\Psi^*$$
$$= \varkappa^2[\sigma^k \times \sigma \times \sigma][\sigma^k \times \sigma \times \sigma]^*\Psi = - \varkappa^2\Psi \; ;$$

d'où $\sigma^k\sigma^{k*} = -1$, donc $\sigma^k = \sigma$, et $\sigma^l\sigma^k = \sigma^k(\sigma^l)^*$, donc $\sigma^l = 1$.

D'autre part

$$\square\Psi = i\varkappa\left(\partial_t - [\sigma^{l'} \times S_n^1]\right)[\sigma^{k'} \times 1 \times 1]\Psi = i\varkappa[\sigma^{k'} \times 1 \times 1]\left(\partial_t + [\sigma^{l'} \times S_n^1]\right)\Psi$$
$$= -\varkappa^2\Psi \; ;$$

d'où $\sigma^{l'}\sigma^{k'} = -\sigma^{k'}\sigma^{l'}$, donc $\sigma^{l'}$ et $\sigma^{k'}$ sont deux matrices de Pauli (avec $l' \neq k'$).

Passons maintenant au cas général du spin j. D'après ce que nous avons vu nous devons distinguer deux types d'équations:

1° Le type A:

$$\left(\partial_t + \left[\prod_{i=1}^{2j-1}\sigma^{l_i} \times S_n^j\right]\right)\Psi = \varkappa\left[\prod_1^{2j-1}\sigma^{k_i} \times \prod_1^{2j}\sigma\right]\Psi^* \; ; \tag{2.22c}$$

2° Le type B:

$$\left(\partial_t + \prod_1^{2j-1}\sigma^{l'i} \times S_{n'}^j\Big]\right)\Psi = i\varkappa\left[\prod_1^{2j-1}\sigma^{k'i} \times \prod_1^{2j}1\right]\Psi \; . \tag{2.22d}$$

La condition $\Box\Psi^{\cdot} = -\varkappa^2\Psi^{\cdot}$ conduit aux relations suivantes:

$$\left(\prod_1^{2j-1}\sigma^{l_i}\right)\left(\prod_1^{2j-1}\sigma^{k_i}\right) = \left(\prod_1^{2j-1}\sigma^{k_i}\right)\left(\prod_1^{2j-1}\sigma^{l_i}\right)^* . \qquad (2.22e)$$

$$\left(\prod_1^{2j-1}\sigma^{k_i}\sigma^{k_i^*}\right)\left(\prod_1^{2j}\sigma\sigma^*\right) = -1 \qquad (2.22f)$$

$$\prod_1^{2j-1}\sigma^{l'_i}\sigma^{k'_i} = -\prod_1^{2j-1}\sigma^{k'_i}\sigma^{l'_i} . \qquad (2.22g)$$

Comme $\sigma\sigma^* = -1$, nous voyons que suivant que $2j$ est impair ou pair, nous devons avoir, respectivement, un nombre pair ou impair des matrices σ^{k_i} satisfaisant à la condition $\sigma^{k_i}\sigma^{k_i^*} = -1$, c'est-à-dire telles que $\sigma^{k_i} = \sigma$. Par ailleurs nous devons avoir un nombre pair p de couples de matrices satisfaisant à la relation

$$\sigma^{l_i}\sigma^{k_i} = -\sigma^{k_i}(\sigma^{l_i})^*$$

et $2j - p$ de couples de matrices satisfaisant à

$$\sigma^{l_i}\sigma^{k_i} = \sigma^{k_i}(\sigma^{l_i})^* ;$$

ainsi qu'un nombre impair p' de couples de matrices satisfaisant à

$$\sigma^{l'_i}\sigma^{k'_i} = -\sigma^{k'_i}\sigma^{l'_i}$$

et un nombre $2j - p'$ de couples de matrices satisfaisant à

$$\sigma^{l'_i}\sigma^{k'_i} = \sigma^{k'_i}\sigma^{l'_i} .$$

Les relations (2.22*e*, *f* et *g*) sont relatives aux matrices du même groupe d'équations. Il existe des relations analogues qui relient entre elles les matrices σ^{l_i}, σ^{k_i}, $\sigma^{k'_i}$ et $\sigma^{l'_i}$, relatives aux groupes différents (caractérisés par les différentes valeurs de l'indice n) d'un même système d'équations (caractérisé par l'indice r). Nous appellerons l'ensemble de ces relations, les *relations de compatibilité.*

Voici, par exemple, comment on en obtient une partie:

$$\left(\partial_t - \left[\prod_1^{2j-1} \sigma^{(l_i)n_1} \times S^j_{n_1}\right]\right)\left(\partial_t + \left[\prod_1^{2j-1} \sigma^{(l_i)n_2} \times S^j_{n_2}\right]\right)\psi =$$

$$= \left(\partial_t - \left[\prod_1^{2j-1} \sigma^{(l_i)n_2} \times S^j_{n_2}\right]\right)\left(\partial_t + \left[\prod_1^{2j-1} \sigma^{(l_i)n_1} \times S^j_{n_1}\right]\right)\psi =$$

$$= \left(\partial_t - \left[\prod_1^{2j-1} \sigma^{(l_i)n_2} \times S^j_{n_1}\right]\right)\varkappa\left[\prod_1^{2j-1} \sigma^{(k_i)n_1} \times \prod_1^{2j} \sigma\right]\psi^*$$

$$= \varkappa\left[\prod_1^{2j-1} \sigma^{(k_i)n_1} \times \prod_1^{2j} \sigma\right]\left(\partial_t + \left[\prod_1^{2j-1} (\sigma^{(l_i)n_2})^* \times S^{j*}_{n_2}\right]\right)\psi^*$$

$$= \varkappa^2\left[\prod_1^{2j-1} \sigma^{(k_i)n_1} \times \prod_1^{2j} \sigma\right]\left[\prod_1^{2j-1} (\sigma^{(k_i)n_2})^* \times \prod_1^{2j} (\sigma)^*\right]\psi$$

$$= (-1)^{2j}\varkappa^2\left[\left(\prod_1^{2j-1} \sigma^{(k_i)n_1} \prod_1^{2j-1} (\sigma^{(k_i)n_2})^*\right) \times \prod_1^{2j} 1\right]\psi\,.$$

Or les expressions précédentes doivent être égales aussi à:

$$\left(\partial_t + \left[\prod_1^{2j-1} \sigma^{(l_i)n_1} \times S^j_{n_1}\right]\right)\varkappa\left[\prod_1^{2j-1} \sigma^{(k_i)n_2} \times \prod_1^{2j} \sigma\right]\psi^*$$

$$= \varkappa\left[\prod_1^{2j-1} \sigma^{(k_i)n_2} \times \prod_1^{2j} \sigma\right]\left[\partial_t + \prod_1^{2j-1} (\sigma^{(l_i)n_1})^* \times S^{*j}_{n_1}\right]\psi^*$$

$$= \varkappa^2\left[\prod_1^{2j-1} \sigma^{(k_i)n_2} \times \prod_1^{2j} \sigma\right]\left[\prod_1^{2j-1} (\sigma^{(k_i)n_1})^* \times \prod_1^{2j} \sigma^*\right]\psi$$

$$= (-1)^{2j}\varkappa^2\left[\prod_1^{2j-1} \sigma^{(k_i)n_2}\right]\left[\prod_1^{2j-1} (\sigma^{(k_i)n_1})^* \times \prod_1^{2j} 1\right]\psi\,.$$

Des raisonnements analogues doivent être faits à propos des équations du type B, ainsi que pour un groupe A et un autre du type B (appartenant tous au même système d'équations). On aboutit ainsi à l'ensemble suivant de relations de compatibilité:

$$\left.\begin{aligned}
\prod_1^{2j-1} \sigma^{(l_i)n_1} \prod \sigma^{(k_i)n_2} &= (-1)^{(1-\delta_{n_1,\,n_2})} \prod \sigma^{(k_i)n_2} \prod (\sigma^{(l_i)n_1})^* \\
\prod \sigma^{(l'_i)n_1} \prod \sigma^{(k'_i)n_2} &= (-1)^{\delta_{n_1,\,n_2}} \prod \sigma^{(k'_i)n_2} \prod \sigma^{(l'_i)n_1} \\
\prod \sigma^{(l_i)} \prod \sigma^{(k'_i)} &= \prod \sigma^{(k'_i)} \prod \sigma^{(l_i)} \\
\prod \sigma^{(l'_i)} \prod \sigma^{(k_i)} &= -\prod \sigma^{(k_i)} \prod (\sigma^{(l'_i)})^* \\
\prod \sigma^{(l_i)n_1} \prod \sigma^{(l_i)n_2} &= \prod \sigma^{(l_i)n_2} \prod \sigma^{(l_i)n_1} \\
\prod \sigma^{(l'_i)n_1} \prod \sigma^{(l'_i)n_2} &= \prod \sigma^{(l'_i)n_2} \prod \sigma^{(l'_i)n_1} \\
\prod \sigma^{l_i} \prod \sigma^{l'_i} &= \prod \sigma^{l'_i} \prod \sigma^{l_i} \\
\prod \sigma^{(k_i)n_1} \prod (\sigma^{(k_i)n_2})^* &= \prod \sigma^{(k_i)n_2} \prod (\sigma^{(k_i)n_1})^* \\
\prod \sigma^{(k'_i)n_1} \prod \sigma^{(k'_i)n_2} &= \prod \sigma^{(k'_i)n_2} \prod \sigma^{(k'_i)n_1} \\
\prod \sigma^{k_i} \prod (\sigma^{k'_i})^* &= -\prod \sigma^{k'_i} \prod \sigma^{k_i} \;.
\end{aligned}\right\} \qquad (2.22h)$$

Nous allons donner maintenant le nombre r de groupes du type A et le nombre $2j - r$ de groupes du type B dans chacun des 2^{2j-1} systèmes d'équations relatives au spin j:

Spin	Type A	Type B	Nombre total de groupes
1	1	1	2
$^3/_2$	1 ou 3	2 ou 0	3
2	1 ou 3	2 ou 1	4
$^5/_2$	1, 3 ou 5	4, 2 ou 0	5
. . . .	. . . .	. . . .	. . .
. . . .	. . . .	. . . .	. . .
$2j$ impair	1, 3, ... $2j-2$ ou $2j$	$2j-1$, ... 2 ou 0	$2j$
$2j$ pair	1, 3, ... $2j-3$ ou $2j-1$	$2j-1$, ... 3 ou 1	$2j$

(2.22 i)

Lorsque les r groupes du type A sont pris d'une manière quelconque parmi les $2j$ groupes:

$$\left(\partial_t + \left[\prod_1^{2j-1} \sigma^{(l_i^r)_n} \times S^j_n\right]\right)\psi = \varkappa\left[\prod_1^{2j-1} \sigma^{(k_i^r)_n} \times \prod_1^{2j} \sigma\right]\psi^*$$

$$n = 1,\ 2,\ \ldots\ 2j$$

alors que les $2j - r$ groupes du type B sont fixés, parmi les $2j$ groupes,

$$\left(\partial_t + \left[\prod_1^{2j-1} \sigma^{(l_i^{2j-r})_{n'}} \times S_{n'}^j\right]\right)\psi = i\varkappa\left[\prod_1^{2j-1} \sigma^{(k_i^{2j-r})_{n'}} \times \Pi\, 1\right]\Psi,$$

$$n' = 1, 2, \ldots 2j$$

par la condition $n' \neq n$. Il y a ainsi C_{2j}^r systèmes admettant r groupes du type A et $2j - r$ groupes du type B, donc, au total, $\Sigma' C_{2j}^r$ systèmes, la somme Σ' étant étendue à toutes les valeurs impaires de r, comprises entre 1 et $2j$. Or, d'après une relation bien connue $C_{2j}^r = C_{2j-1}^r + C_{2j-1}^{r-1}$. On voit donc que $\Sigma' C_{2j}^r = \sum_0^{2j-1} C_{2j-1}^r$, où la dernière somme est étendue à toutes les valeurs entières de r comprises entre 0 et $2j - 1$. Elle est donc bien égale à 2^{2j-1}. Les 2^{2j-1} systèmes, obtenus en prenant pour le nombre $2j - r$ de groupe B un nombre impair, sont équivalents aux systèmes complexes conjugués des systèmes précédents.

2.23 *Equations mixtes composées.*

Nous allons suivre la même procédure qu'au § 2.21. Tout d'abord nous allons former les équations mixtes composées du premier degré pour le corpuscule de spin 1. Partons, par exemple, des équations (2.22*b*):

$$\left.\begin{array}{ll}
(\partial_t + S_1^1)^{(1)}\psi = \varkappa[\sigma \times \sigma]^{(1)}\varphi^*\,, & (\partial_t + S_2^1)^{(1)}\psi = i\varkappa[1 \times 1]^{(1)}\varphi \\
(\partial_t + S_1^1)^{(2)}\psi = \varkappa[\sigma \times \sigma]^{(2)}\varphi^*\,, & (\partial_t + S_2^1)^{(2)}\psi = i\varkappa[1 \times 1)^{(2)}\varphi \\
(\partial_t + S_1^1)^{(1)}\varphi = -\varkappa[\sigma \times \sigma]^{(1)}\psi^*\,, & (\partial_t - S_2^1)^{(1)}\varphi = i\varkappa[1 \times 1]^{(1)}\psi \\
(\partial_t + S_1^1)^{(2)}\varphi = -\varkappa[\sigma \times \sigma]^{(2)}\psi^*\,, & (\partial_t - S_2^1)^{(2)}\varphi = i\varkappa[1 \times 1]^{(2)}\psi
\end{array}\right\} \quad (2.23a)$$

et introduisons une fonction d'onde Ψ (${}^{(1)}\Psi$, ${}^{(2)}\Psi$, ${}^{(3)}\Psi$ et ${}^{(4)}\Psi$), formée de la manière suivante:

$$\left.\begin{array}{ll}
{}^{(1)}\Psi = {}^{(1)}\psi + i\,{}^{(2)}\psi & {}^{(3)}\Psi = -\,i[\sigma \times \sigma]\left({}^{(1)}\varphi^* + i\,{}^{(2)}\varphi^*\right) \\
{}^{(2)}\Psi = {}^{(1)}\varphi + i\,{}^{(2)}\varphi & {}^{(4)}\Psi = +\,i[\sigma \times \sigma]\left({}^{(1)}\psi^* + i\,{}^{(2)}\psi^*\right)\,.
\end{array}\right\} \quad (2.23b)$$

Les équations (2.23a) prennent alors la forme suivante:

$$\left.\begin{aligned} \left(\partial_t + [\sigma_3 \times 1 \times S^1_1]\right)\Psi &= i\varkappa\left[\sigma_1 \times 1 \times \prod_1^2 1\right]\Psi \\ \left(\partial_t + [1 \times \sigma_3 \times S^1_2]\right)\Psi &= i\varkappa\left[1 \times \sigma_1 \times \prod_1^2 1\right]\Psi \end{aligned}\right\} \quad (2.23c)$$

où les matrices σ_1 et σ_3 sont les doubles de deux matrices réelles de Pauli.

En appliquant le même procédé aux équations (2.22a) nous aboutissons aux équations suivantes:

$$\left.\begin{aligned} \left(\partial_t + [1 \times \sigma_3 \times S^1_1]\right)\Psi' &= i\varkappa\left[1 \times \sigma_1 \times \prod_1^2 1\right]\Psi' \\ \left(\partial_t + [\sigma_3 \times 1 \times S^1_2]\right)\Psi' &= i\varkappa\left[\sigma_1 \times 1 \times \prod_1^2 1\right]\Psi' . \end{aligned}\right\} \quad (2.23d)$$

La transformation, définie par la matrice unitaire:

$$U = \tfrac{1}{2}\left([1 \times 1] + [\sigma_1 \times \sigma_1] + [\sigma \times \sigma] + [\sigma_3 \times \sigma_3]\right)[1 \times 1] \quad (2.23e)$$

permet de prouver l'équivalence de (2.23c) et de (2.23d).

Donc les équations composées du premier degré, auxquelles donnent lieu les deux systèmes d'équations mixtes pour le corpuscule de spin 1, sont équivalentes. Ce système unique d'équations mixtes composées pour $j = 1$ est d'ailleurs identique au système d'équations que M. Louis de Broglie a mis à la base de sa théorie du photon.

Dans le cas général du spin j quelconque, nous avons:

$$\left.\begin{aligned} \left(\partial_t + [\Pi\sigma^{li} \times S^j_n]\right)^{(1)}\psi &= \varkappa[\Pi\sigma^{ki} \times \Pi\sigma]^{(1)}\psi^* \\ \left(\partial_t + [\Pi\sigma^{li} \times S^j_n]\right)^{(2)}\psi &= \varkappa[\Pi\sigma^{ki} \times \Pi\sigma]^{(2)}\psi^* \end{aligned}\right\} \quad (2.23f)$$

et les équations du type B, doublées de la même manière.

En posant:

$${}^{(1)}\Psi = {}^{(1)}\psi + i\,{}^{(2)}\psi \qquad {}^{(2)}\Psi = -\,i[\Pi\sigma^{(ki)_{n_0}} \times \Pi\sigma]\left({}^{(1)}\psi^* + i\,{}^{(2)}\psi^*\right) ,$$

nous obtenons, compte tenu des relations de compatibilité, les équations suivantes:

$$\left.\begin{aligned} \left(\partial_t + [\sigma_3 \times \Pi\sigma^{(li)_n} \times S^j_n]\right)\Psi &= i\varkappa[\sigma_1 \times \Pi(\sigma^{(ki)_n}\sigma^{(ki)_{n_0}}) \times \Pi 1]\Psi \\ \left(\partial_t + [1 \times \Pi\sigma^{(l'i)_{n'}} \times S^j_{n'}]\right)\Psi &= i\varkappa[1 \times \Pi\sigma^{(k'i)_{n'}} \times \Pi 1]\Psi . \end{aligned}\right\} \quad (2.23g)$$

(à suivre)