

Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 26 (1944)

Artikel: Principe de correspondance d'une mécanique asymptotique classique
Autor: Stueckelberg, Ernest-C.-G.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-742725>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 04.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Mais on montre, d'autre part, que les inégalités suivantes sont valables

$$\mu^2 E_{\Delta\mu}(z) \leq A^2 E_{\Delta\mu}(z) \leq (\mu + \Delta\mu)^2 E_{\Delta\mu}(z) .$$

Donc

$$A^2 z = \int_0^{+\infty} \mu^2 dE_{\mu}(z) .$$

Ensuite, par des artifices, un peu long à résumer ici, on peut écrire :

$$Az = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu dE_{\mu}(z) , \quad (2)$$

ce qui fournit la décomposition spectrale de Az . Cette méthode extrêmement rapide est fondée, comme on le voit, uniquement sur la distribution asymptotique (1) des normes des itérés des différents éléments. L'inverse, à savoir déduire (1) de (2) ne ferait aucune difficulté.

Ernest-C.-G. Stueckelberg. — *Principe de correspondance d'une mécanique asymptotique classique.*

Pendant ces dernières années, différentes recherches ont donné des résultats qui montrent que le continu espace-temps est doué d'une structure atomique analogue à la composition du continu matériel par ses molécules ou, mieux encore, parallèle à la structure imposée par la nature quantique de l'énergie-quantité de mouvement.

On a pu démontrer (Wentzel [1]¹, Dirac [2] et l'auteur [3, 11]) que l'équation de mouvement de l'électron ponctuel (qte. de mouvement $\pi^\alpha(\lambda) = m\dot{z}^\alpha(\lambda)$, événement $x^\alpha = z^\alpha(\lambda)$) établie

¹ Pour la littérature, voir la communication suivante de Stueckelberg et Bouvier.

par Lorentz est valable, en toute rigueur, pour l'électron ponctuel de masse m soumise à une force incidente $f^\alpha(\pi, z)$:

$$\begin{aligned}
 & (\dot{\pi}^\alpha - \eta'_1 \lambda_0^2 (\ddot{\pi}^\alpha - 3\pi^\alpha m^{-2} (\ddot{\pi}, \dot{\pi})) + \dots) - \\
 & \quad - \lambda_0 (\ddot{\pi}^\alpha - \pi^\alpha m^{-2} (\dot{\pi}, \dot{\pi})) - \xi'_1 \lambda_0^2 (\dddot{\pi}^\alpha - \dots) + \dots \\
 & + \lambda_0^2 (\eta'_{00} \dot{\pi}^\alpha m^{-2} (\dot{\pi}, \dot{\pi}) + \dots) - \lambda_0^3 (\xi'_{00} \dots) \\
 & = f^\alpha + \zeta_1 \lambda_0 (\dot{f}^\alpha - \pi^\alpha m^{-2} (\dot{\pi}, f)) + \dots \quad (1.1)
 \end{aligned}$$

Dirac [2] a remarqué le premier qu'il y a des solutions non physiques de (1.1) par exemple pour

$$f^\alpha = 0, \quad \eta'_{ik\dots} = \xi'_{ik\dots} = \zeta'_{ik\dots} = 0,$$

$$\pi^\alpha = m \sinh (e^{\lambda/\lambda_0} + \text{const.})$$

la particule s'accélérait d'une manière continue jusqu'à atteindre la vitesse de lumière (qte. de mouv. infinie) sans aucune cause. Pour pouvoir éliminer ce mouvement paradoxal, il a été obligé d'introduire une *condition finale*:

$$\dot{\pi}^\alpha(+T) = 0; \quad \lim(+T) = \lim z^4(+\Lambda) \rightarrow +\infty \quad (1.2)$$

en plus des conditions initiales habituelles:

$$\begin{aligned}
 \pi^\alpha(-T) &= \text{qte. de mouv. donné} \\
 z^\alpha(-T) &= \text{endroit donné}
 \end{aligned}
 \left\{ \begin{array}{l} \lim(-T) \rightarrow -\infty \end{array} \right. \quad (1.3)$$

Seule du reste la condition $+T \rightarrow +\infty$ donnait le résultat cherché. Pour l'époque initiale, une condition asymptotique analogue ($-T \rightarrow -\infty$) s'impose pour ne pas être amené à des états du passé ($t < -T$) très singuliers.

En toute généralité les lois de la physique microscopique ont ainsi la forme:

$$\dot{F} = f_0(F, G, \dots) + \lambda_0 f_1(F, \dot{F}, \ddot{F}, \dots, G, \dot{G}, \dots) + \lambda_0^2 f_2 + \dots \quad (1.4)$$

où $\dot{F} = dF/d\lambda$ (ou $= dF/dt$) est la dérivée d'une grandeur physique F par rapport au temps propre λ (ou au temps ordinaire x^4 ($x^4 = ct$; $[\lambda] = [x^4] = cm$) et où f_n est de l'ordre $n + 1$ en $(d/d\lambda)$. La *mécanique rationnelle* est le cas-limite $\lambda_0/c = t_0 \rightarrow 0$ où l'« atome du temps » t_0 tend vers zéro. Elle permet, entre autres, d'exprimer l'état final $F(+T)$ en termes de l'état initial, soit :

$$\lim_{\lambda_0 \rightarrow 0} F(+T) = F(-T) + \int_{-T}^{+T} dt f_0(F, G, \dots)(t) \quad (1.5)$$

Explicitement, ce résultat s'exprime par les parenthèses de Poisson :

$$F(+T) = \left(\frac{1}{0!} F + \frac{2T}{1!} \{H, F\} + \frac{(2T)^2}{2!} \{H, \{H, F\}\} + \dots \right) (-T) \quad (1.6)$$

$F = F(p_1 \dots q_n)$ et $H(p_1 \dots q_n)$ sont la grandeur physique F et l'hamiltonienne H exprimée en termes de la valeur des $2n$ variables canoniques $p_1(-T) \dots q_n(-T)$ prises à l'époque initiale $t = -T$.

La *mécanique asymptotique* que nous proposons est une théorie qui exprime une grandeur physique $F(+T)$ à l'époque finale directement en termes de la valeur initiale $F(-T)$, $G(-T)$, ... des variables $F, G, \dots$, soit :

$$F(+T) = F(-T) + g(F, G, \dots)(-T) \quad (1.7)$$

De telles grandeurs physiques sont par exemple la trajectoire d'une particule sans spin :

$$y^\alpha = m^{-1} p^\alpha \lambda + q^\alpha ; \quad (p, p) = -m^2 ; \quad p^4 \geq 0 \quad (1.8)$$

et l'onde scalaire (« champ électro-magnétique » $\varphi = \dots(c, c^*)$)

$$((\mu, \mu) = -x^2 ; \quad \mu^4 \geq 0)$$

$$\sqrt{2} \varphi(x) = \Sigma (V\mu^4)^{-1/2} (c(\vec{\mu}) \exp(i(\mu, x)) + c^*(\vec{\mu}) \exp(-i(\mu, x))) \quad (1.9)$$

caractérisés par les $2(4 + \infty)$ *paramètres canoniques* $p^1(\pm \Lambda) \dots, \dots, c(\vec{\mu})(\pm T) = 2^{-1/2} (p(\vec{\mu}) - iq(\vec{\mu}))$ (= « constantes » d'intégration), qui ont des valeurs différentes pour l'époque initiale ($-\Lambda$ et $-T$) et pour l'époque finale ($+\Lambda$ et $+T$) dès qu'une interaction a pris place entre $-T$ et $+T$. En termes des parenthèses de Poisson, (1.7) s'écrit:

$$F(+T) = \left(\frac{1}{0!} F + \frac{1}{1!} \{ \alpha, F \} + \frac{1}{2!} \{ \alpha, \{ \alpha, F \} \} + \dots \right) (-T) \quad (1.10)$$

$\alpha(p^1, \dots c(\vec{\mu}) \dots)$ doit être une invariante de Lorentz, fonction des paramètres canoniques. Les lois de conservation résultent en vertu de

$$\{ P^{\alpha'}, \alpha \} = \{ M^{\alpha''\alpha'}, \alpha \} = 0 \quad (1.11)$$

$P^{\alpha'}$ et $M^{\alpha''\alpha'}$ sont un quadrivecteur (= énergie-impulsion) et un tenseur antisymétrique (moment d'énergie-impulsion) définis par

$$\varphi(x + \delta x) - \varphi(x) = \left\{ P^{\alpha'} \delta \tau_{\alpha'} - \frac{1}{2} M^{\alpha''\alpha'} \delta \psi_{\alpha''\alpha'}, \varphi(x) \right\} \quad (1.12)$$

$$(y + \delta y)^{\alpha} - y^{\alpha} = \left\{ P^{\alpha'} \delta \tau_{\alpha'} - \frac{1}{2} M^{\alpha''\alpha'} \delta \psi_{\alpha''\alpha'}, y^{\alpha} \right\}$$

si l'espace-temps subit la transformation infinitésimale

$$x^{\alpha} + \delta x^{\alpha} = x^{\alpha} + \delta \tau^{\alpha} - \delta \psi^{\alpha''\alpha'} x_{\alpha'}. \quad (1.13)$$

Le principe de correspondance « mécanique asymptotique $\rightarrow$ mécanique rationnelle » s'exprime alors par la formule (voir (5) et (7)):

$$\lim_{\lambda_0 \rightarrow 0} g(F, G, \dots) (-T) \rightarrow \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^{+T} dt f_0(F, G, \dots)(t) \quad (1.14)$$

Il nous assure que, dans la limite $t_0 = \lambda_0/c \rightarrow 0$, la mécanique rationnelle résulte. Un $\alpha = \alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} + \dots$ (série en ε) peut être donné afin que (1.1) résulte [11].