

# Le champ propre et l'interaction des particules de Dirac : suivant l'électrodynamique quantique

Autor(en): **Pirene, Jean**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Archives des sciences physiques et naturelles**

Band (Jahr): **28 (1946)**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-742869>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# LE CHAMP PROPRE ET L'INTERACTION DES PARTICULES DE DIRAC

suivant l'électrodynamique quantique

PAR

**Jean PIRENNE**

## INTRODUCTION

La notion de quanta apparut au début tant en mécanique (modèle de l'oscillateur de Planck, théorie des chaleurs spécifiques des solides de Einstein) qu'en électrodynamique (notion des quanta de lumière d'Einstein). Toutefois c'est d'abord en mécanique que les principes de la théorie quantique furent posés de façon cohérente et précise, en premier lieu dans l'ancienne théorie de Bohr et de Sommerfeld, puis ensuite dans la mécanique quantique ou ondulatoire, telle qu'elle a été développée par L. de Broglie, Heisenberg, Schrödinger, Pauli, Dirac, etc. Grâce à celle-ci, on a pu aborder en détail l'étude de la structure atomique de la matière et expliquer la plupart des phénomènes de rayonnement en appliquant de façon convenable la théorie électromagnétique classique de Maxwell.

C'est seulement après que les principes de la théorie quantique furent établis en mécanique, que Dirac, Heisenberg et Pauli, Fermi, Bohr et Rosenfeld et d'autres les appliquèrent à la théorie du champ électromagnétique. L'électrodynamique quantique, issue de ces recherches, a trouvé d'importantes applications dans les problèmes de radiation où elle fait appel

à la notion de photon. Elle a permis également d'aborder le problème de l'interaction entre deux particules.

Toutefois aucune analyse approfondie n'avait été faite de la façon dont se présente, suivant cette théorie, le champ propre des particules élémentaires qui est à l'origine des champs statiques macroscopiques de la physique classique. Récemment G. Beck <sup>1</sup> a étudié à ce point de vue le champ d'un électron de Dirac animé d'une vitesse non relativiste. Il trouve que cette particule possède au repos un champ statique constitué de trois parties: le champ de Coulomb, le champ de spin et un nouveau champ qu'il appelle le champ  $\alpha$ .

Dans le présent travail, nous nous proposons en premier lieu de reprendre l'étude du champ propre de l'électron en nous plaçant à un point de vue moins formel, respectant plus fidèlement la définition des notions introduites en électrodynamique quantique. Ensuite nous examinerons en détail l'interaction mutuelle de deux particules de Dirac, de même signe ou de signes opposés et animées de vitesses non relativistes, en mettant en évidence le rôle joué par leurs champs propres. L'existence du champ  $\alpha$  nous amènera à réserver une attention toute particulière au cas de l'interaction entre l'électron et le positron, dans laquelle ce nouveau champ intervient de façon appréciable.

Le mémoire est divisé en trois parties. Dans la première nous exposerons succinctement et de façons parallèles l'électrodynamique classique et l'électrodynamique quantique, suivant une méthode analogue à celle de Fermi, afin de pouvoir comparer et discuter les résultats qui nous intéressent spécialement. Nous y rappellerons également l'équation de Dirac, en présentant la théorie du positron, sous une forme différente de la théorie des lacunes et plus appropriée à l'étude de l'interaction entre l'électron et le positron. Enfin nous y développerons l'étude du champ propre de l'électron. Nous retrouverons les trois parties signalées par G. Beck, mais sous un aspect assez différent. Le champ  $\alpha$ , notamment, ne se présentera plus comme

<sup>1</sup> G. BECK, *Comptes rendus*, 1938, 207, p. 528; *Journal de Physique*, 1939, 10, p. 200; *Comptes rendus*, 1941, 212, p. 850; *Cahiers de Physique*, 1941, n° 4, p. 1.

un champ statique, mais comme un champ de transition, et la façon dont il dépend de la distance sera complètement modifiée. Cette nouvelle forme apparaîtra comme beaucoup plus satisfaisante lors de l'étude du système électron-positron.

Dans la deuxième partie nous montrerons que l'interaction de deux particules de Dirac est liée très simplement, comme en théorie classique, à l'énergie de superposition de leurs champs propres. Nous examinerons ensuite la contribution à cette énergie de chacune des parties de ces champs. Nous verrons ainsi que la superposition des champs magnétiques des spins donne lieu à une interaction formellement identique à celle de deux dipôles magnétiques ponctuels lorsque la distance entre les deux électrons est grande vis-à-vis de la longueur d'onde de Compton. Nous obtenons toutefois un terme supplémentaire nouveau qui peut être considéré comme une interaction intervenant à très petite distance. L'existence de ce terme provient de ce que le champ magnétique du spin correspond plutôt à l'image classique d'une distribution de courants électriques (courants particuliers d'Ampère) qu'à celle d'un dipôle constitué de masses magnétiques ponctuelles.

Quant au champ  $\alpha$ , il donne lieu à une interaction du même ordre de grandeur que celle des spins, mais qui ne se manifeste qu'entre électrons de signes opposés. Elle n'intervient qu'à faible distance et correspond à l'annihilation et à la recréation virtuelle de la paire. On peut l'interpréter comme une interaction d'échange entre les deux particules. On arrive alors, pour le système électron-positron, à des équations analogues à celles que Heisenberg a introduites de façon phénoménologique dans l'étude du système proton-neutron.

Enfin la troisième partie du mémoire est consacrée à l'étude détaillée du système électron-positron. Celui-ci présente un spectre de niveaux assez semblable à celui de l'atome d'hydrogène. Cependant ces niveaux sont élargis par suite de la probabilité de dématérialisation définitive de la paire (annihilation réelle) et déplacés par l'interaction magnétique des spins et l'interaction d'échange (annihilation virtuelle). Toutefois la stabilité des niveaux est suffisante pour qu'on puisse observer le spectre optique du système dans des conditions favorables.

# I. L'ÉLECTRODYNAMIQUE ET LE CHAMP PROPRE DE L'ÉLECTRON

## § 1. — L'ÉLECTRODYNAMIQUE CLASSIQUE.

### 1. *Les équations de Maxwell-Lorentz.*

Suivant la théorie classique, le champ électromagnétique est régi par les équations de Maxwell-Lorentz :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0 \\ \text{div } \vec{H} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 4\pi\rho \frac{\vec{v}}{c} \\ \text{div } \vec{E} = 4\pi\rho \end{array} \right. \quad (1)$$

Le champ électrique  $\vec{E}$  et le champ magnétique  $\vec{H}$  peuvent se déduire d'un potentiel scalaire  $A_0$  et d'un potentiel vecteur  $\vec{A}$  par les formules

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } A_0 \\ \vec{H} = \text{rot } \vec{A} \end{array} \right. \quad (2)$$

$\vec{A}$  et  $A_0$  forment un vecteur d'espace-temps satisfaisant aux équations

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -4\pi\rho \frac{\vec{v}}{c} + \text{grad} \left( \text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_0}{\partial t} \right) \quad (3a) \\ \Delta A_0 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_0}{\partial t^2} = -4\pi\rho - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_0}{\partial t} \right) \quad (3b) \end{array} \right.$$

La solution générale de ces équations est la somme de celle des équations homogènes obtenues en annulant  $\rho$  et  $\rho \frac{\vec{v}}{c}$  et d'une solution particulière des équations non homogènes. La première représente un système d'ondes se propageant avec la

vitesse  $c$  et constitue le champ de radiation dans le vide. La deuxième solution correspond, si elle est convenablement choisie, au champ créé par les charges électriques.

D'habitude on se débarrasse du dernier terme des équations (3) en imposant que la divergence du vecteur spatio-temporel  $\vec{A}, A_0$  soit nulle:

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_0}{\partial t} = 0 \quad (4)$$

Le champ dû aux charges est alors donné par les formules bien connues des potentiels retardés

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \int \frac{\rho \frac{\vec{\varphi}}{c} \left( \vec{r}_1, t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_1|}{c} \right)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} d\tau_1 \quad (5a)$$

$$A_0(\vec{r}, t) = \int \frac{\rho \left( \vec{r}_1, t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_1|}{c} \right)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} d\tau_1 \quad (5b)$$

Si  $\rho$  et  $\rho \frac{\vec{\varphi}}{c}$  sont indépendants du temps, ces formules définissent des champs statiques. Ces champs, qui sont essentiellement différents du champ de radiation, sont intimement liés à l'existence des particules élémentaires et sont mis en évidence dans les expériences fondamentales de l'électro- et de la magnéto-statique. Toute théorie électrodynamique doit nécessairement comprendre ces deux aspects du champ.

D'autre part on peut également imposer aux potentiels, que nous désignerons alors par  $\vec{A}', A'_0$ , la condition de caractère non tensoriel:

$$\operatorname{div} \vec{A}' = 0 \quad (6)$$

au lieu de la relation (4). On renonce ainsi à l'invariance du formalisme vis-à-vis de la transformation de Lorentz ou à la possibilité de considérer  $\vec{A}', A'_0$  comme formant un vecteur d'espace-temps. Mais on arrive à une simplification remar-

quable de l'équation (3 b). En effet les équations (3) s'écrivent alors :

$$\Delta \vec{A}' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}'}{\partial t^2} = -4\pi\rho \frac{\vec{v}}{c} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{grad } A'_0 \quad (7a)$$

$$\Delta A'_0 = -4\pi\rho \quad (7b)$$

Ainsi le potentiel scalaire est donné, comme en électrostatique par la formule

$$A'_0(\vec{r}, t) = \int \frac{\rho(\vec{r}_1, t)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} d\tau_1 \quad (5'b)$$

et le champ électromagnétique peut être considéré comme la somme d'un champ irrotationnel

$$\begin{aligned} \vec{E}_\lambda &= -\text{grad } A'_0 \\ \vec{H}_\lambda &= 0 \end{aligned} \quad (8a)$$

et d'un champ sans divergence

$$\begin{aligned} \vec{E}_\tau &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} \\ \vec{H}_\tau &= \text{rot } \vec{A}' \end{aligned} \quad (8b)$$

Cette décomposition n'est d'ailleurs pas invariante vis-à-vis des transformations de Lorentz et chacun des champs ( $\lambda$ ) et ( $\tau$ ) ne satisfait pas isolément aux équations de Maxwell. D'autre part le champ  $\vec{E}_\lambda$  ne dépend que des coordonnées du point où on l'évalue et de celles des charges considérées au même instant. L'effet de la vitesse finie de propagation est reporté entièrement sur le champ ( $\vec{E}_\tau, \vec{H}_\tau$ ).

On peut également représenter les champs ( $\lambda$ ) et ( $\tau$ ) par des potentiels ( $\vec{A}_\lambda, A_{\lambda 0}$ ) et ( $\vec{A}_\tau, A_{\tau 0}$ ) satisfaisant chacun à la relation (4). Il suffit pour cela de poser

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \vec{A}_\lambda + \vec{A}_\tau ; & \text{rot } \vec{A}_\lambda &= 0 : & \text{div } \vec{A}_\tau &= 0 \\ A_0 &= A_{\lambda 0} ; & A_{\tau 0} &= 0 . \end{aligned}$$

On a alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_\lambda = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_\lambda}{\partial t} - \text{grad } A_0 \\ \vec{H}_\lambda = 0 \end{array} \right. \quad (8'a) ; \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_\tau = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_\tau}{\partial t} \\ \vec{H}_\tau = \text{rot } \vec{A}_\tau \end{array} \right. \quad (8'b)$$

## 2. Développement en série de Fourier du champ électromagnétique.

Nous allons développer le champ électromagnétique en série d'ondes planes à l'intérieur d'un cube d'arête  $L$  arbitrairement grande. Ceci permet d'écrire les équations de Maxwell-Lorentz sous forme hamiltonienne, puis de quantifier le champ par l'introduction des opérateurs. Le développement en série de Fourier peut également être utile dans certains problèmes classiques.

A un instant donné le champ électromagnétique est déterminé si l'on connaît  $\vec{A}$ ,  $A_0$ ,  $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial A_0}{\partial t}$ . Ceci nous amène à le représenter par les séries suivantes,  $\vec{A}_\tau$ ,  $\vec{A}_\lambda$  et  $A_0$  ayant les mêmes significations que précédemment.

$$\begin{aligned} \vec{A}_\tau &= S \sum_{\vec{k}} (c_{\tau\vec{k}} \vec{A}_{\tau\vec{k}} + c_{\tau\vec{k}}^* \vec{A}_{\tau\vec{k}}^*) \\ \vec{A}_\lambda &= \sum_{\vec{k}} (c_{\lambda\vec{k}} \vec{A}_{\lambda\vec{k}} + c_{\lambda\vec{k}}^* \vec{A}_{\lambda\vec{k}}^*) \\ A_0 &= \sum_{\vec{k}} (c_{0\vec{k}} A_{0\vec{k}} + c_{0\vec{k}}^* A_{0\vec{k}}^*) \end{aligned} \quad (9a)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_\tau}{\partial t} &= -S \sum_{\vec{k}} ik (c_{\tau\vec{k}} \vec{A}_{\tau\vec{k}} - c_{\tau\vec{k}}^* \vec{A}_{\tau\vec{k}}^*) \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_\lambda}{\partial t} &= - \sum_{\vec{k}} ik (c_{\lambda\vec{k}} \vec{A}_{\lambda\vec{k}} - c_{\lambda\vec{k}}^* \vec{A}_{\lambda\vec{k}}^*) \\ \frac{1}{c} \frac{\partial A_0}{\partial t} &= - \sum_{\vec{k}} ik (c_{0\vec{k}} A_{0\vec{k}} - c_{0\vec{k}}^* A_{0\vec{k}}^*) \end{aligned} \quad (9b)$$



avec

$$\begin{aligned}\vec{A}_{\tau\vec{k}} &= \vec{a}_{\vec{k}} \frac{\sqrt{2\pi\omega_k}}{k} \frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{\sqrt{L^3}} \\ \vec{A}_{\lambda\vec{k}} &= \frac{\vec{k}}{k} \frac{\sqrt{2\pi\omega_k}}{k} \frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{\sqrt{L^3}} \\ A_{0\vec{k}} &= \frac{\sqrt{2\pi\omega_k}}{k} \frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{\sqrt{L^3}}\end{aligned}\quad (10)$$

La suite des vecteurs d'onde  $\vec{k}$  est déterminée par les conditions

$$\begin{aligned}\frac{k_x L}{2\pi} = n_1, \quad \frac{k_y L}{2\pi} = n_2, \quad \frac{k_z L}{2\pi} = n_3; \\ n_1, n_2, n_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\end{aligned}$$

de façon que les fonctions  $e^{i\vec{k}\vec{r}} / \sqrt{L^3}$  forment un système orthogonal, normal et complet à l'intérieur du cube  $L^3$ . Le signe  $\sum_{\vec{k}}$  indique la sommation sur toutes les valeurs de  $n_1, n_2, n_3$ . Celle-ci se transforme en une intégrale si l'on fait tendre  $L$  vers l'infini; pour effectuer ce passage à la limite on remarquera que pour  $L$  suffisamment grand le nombre de vecteurs  $\vec{k}$  contenus dans un angle solide  $d\Omega$  et dont le module est compris entre  $k$  et  $k + dk$  est

$$L^3 \frac{k^2 dk}{8\pi^3} d\Omega \quad (11)$$

Notons à ce propos les développements en série de Fourier de quelques fonctions que nous rencontrerons:

$$\delta(r) = \frac{1}{\sqrt{L^3}} \sum_{\vec{k}} \frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{\sqrt{L^3}} \quad (12a)$$

$$\frac{1}{r} = \frac{4\pi}{\sqrt{L^3}} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{k^2} \frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{\sqrt{L^3}} \quad (12b)$$

$$\text{grad} \frac{1}{r} = \frac{4\pi}{\sqrt{L^2}} \sum_{\vec{k}} \frac{i\vec{k}}{k^2} \frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{\sqrt{L^3}} \quad (12c)$$

$\delta(r)$  étant la fonction de Dirac satisfaisant aux conditions

$$\delta(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \neq 0 \\ \infty & \text{si } r = 0 \end{cases};$$

$$\int_{\mathcal{O}} \delta(r) d\tau = \begin{cases} 0 & \text{si } r = 0 \text{ est hors de } \mathcal{O} \\ 1 & \text{si } r = 0 \text{ est dans } \mathcal{O} \end{cases}$$

Le vecteur de polarisation  $\vec{a}_{\vec{k}}$  est unitaire et perpendiculaire au vecteur d'onde  $\vec{k}$ . Pour chaque vecteur  $\vec{k}$  nous choisissons deux vecteurs  $\vec{a}_{\vec{k}}^{(1)}$  et  $\vec{a}_{\vec{k}}^{(2)}$  perpendiculaires entre eux. Le signe S se rapporte à la sommation sur ces deux directions du vecteur de polarisation. De l'orthogonalité des trois vecteurs  $\vec{a}_{\vec{k}}^{(1)}$ ,  $\vec{a}_{\vec{k}}^{(2)}$  et  $\vec{k}$  découlent les relations

$$\begin{aligned} S (\vec{a}_{\vec{k}})_x^2 &= 1 - \frac{k_x^2}{k^2}; \dots \\ S (\vec{a}_{\vec{k}})_x (\vec{a}_{\vec{k}})_y &= -\frac{k_x k_y}{k^2}; \dots \end{aligned} \quad (13)$$

Les ondes transversales et longitudinales  $\vec{A}_{\vec{k}}^{\tau}$  et  $\vec{A}_{\vec{k}}^{\lambda}$  forment un système complet ainsi que les ondes scalaires  $A_{0\vec{k}}$ . L'énergie  $\omega_k$  qui intervient dans leur facteur de normalisation reste provisoirement arbitraire.

Des formules (8), (9) et (10) on déduit aisément les relations

$$\frac{1}{8\pi} \int (\vec{E}_{\vec{\tau}}^2 + \vec{H}_{\vec{\tau}}^2) d\tau = S \sum_{\vec{k}} c_{\vec{\tau}\vec{k}}^* c_{\vec{\tau}\vec{k}} \omega_k \quad (14a)$$

$$\frac{1}{8\pi} \int (\vec{E}_{\vec{\lambda}}^2 + 2\vec{E}_{\vec{\lambda}} \cdot \vec{\text{grad}} A_0) d\tau = \sum_{\vec{k}} (c_{\vec{\lambda}\vec{k}}^* c_{\vec{\lambda}\vec{k}} - c_{0\vec{k}}^* c_{0\vec{k}}) \omega_k \quad (14b)$$

$\omega_k$  représente donc l'énergie de l'onde transversale de vecteur  $\vec{k}$  lorsque l'amplitude correspondante  $|c_{\vec{\tau}\vec{k}}|$  est égale à l'unité. De plus (14 a) indique que l'énergie totale du champ transversal est simplement la somme des énergies des ondes planes

qui le composent. Celle du champ longitudinal ne jouit d'une propriété analogue que lorsqu'il s'agit d'un champ électrostatique véritable pour lequel on peut poser  $\frac{\partial A_0}{\partial t} = 0$ ;  $\vec{A} = 0$ . Dans ce cas seulement l'équation (14 b) devient

$$\frac{1}{8\pi} \int \vec{E}_\lambda^2 d\tau = \sum_{\vec{k}} c_{0\vec{k}}^* c_{0\vec{k}} \omega_k \quad (14 b)'$$

D'une façon générale on déduit des formules (14) que l'énergie totale localisée dans l'espace peut s'écrire

$$\begin{aligned} \omega^{(ch)} = \frac{1}{8\pi} \int (E^2 + H^2) d\tau = \Sigma (S c_{\tau\vec{k}}^* c_{\tau\vec{k}} + c_{\lambda\vec{k}}^* c_{\lambda\vec{k}} - \\ - c_{0\vec{k}}^* c_{0\vec{k}}) \omega_k + \int \rho A_0 d\tau \end{aligned} \quad (15)$$

Le dernier terme diffère seulement du second terme du premier membre de (14 b) par une intégrale de surface qui disparaît lorsque la surface s'éloigne indéfiniment des charges qu'elle entoure.

### 3. Le champ considéré comme un ensemble d'oscillateurs harmoniques.

Portons dans les équations de Maxwell-Lorentz (1) et (4) les expressions de  $A_0$ ,  $\vec{A} = \vec{A}_\tau + \vec{A}_\lambda$ ,  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$ , déduites des formules (2), (9), (10), (11). En multipliant les deux membres de chacune de ces équations par le conjugué complexe de l'une des fonctions (11) et en intégrant sur tout l'espace on obtient sans difficulté les équations différentielles suivantes:

$$\left( c_{\tau\vec{k}} + \frac{\dot{c}_{\tau\vec{k}}}{i\omega} \right) \omega_k = \int \rho \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{A}_{\tau\vec{k}}^*(\vec{r}) d\tau \quad (16 a)$$

$$\left( c_{\lambda\vec{k}} + \frac{\dot{c}_{\lambda\vec{k}}}{i\omega} \right) \omega_k = \int \rho \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{A}_{\lambda\vec{k}}^*(\vec{r}) d\tau \quad (16 b)$$

$$\left( c_{0\vec{k}} + \frac{\dot{c}_{0\vec{k}}}{i\omega} \right) \omega_k = \int \rho A_{0\vec{k}}^*(\vec{r}) d\tau \quad (16 c)$$

$$c_{\lambda\vec{k}} + \frac{\dot{c}_{0\vec{k}}}{i\omega} = 0 \quad (17)$$

dans lesquelles on a posé:  $\omega = kc$ . La condition (17) résulte de l'équation (4). Il suffit qu'elle soit remplie à l'instant initial pour l'être ultérieurement car les équations (16 a) et (16 b) entraînent la relation

$$\left(\frac{d}{dt} + i\omega\right) \left(c_{\lambda\vec{k}} + \frac{\dot{c}_{0\vec{k}}}{i\omega}\right) = 0$$

Les équations (16) peuvent donc être considérées comme indépendantes. Notons en passant que des équations (16 b), (16 c) et (17) découle la relation

$$\begin{aligned} \frac{\Sigma}{\vec{k}} (c_{0\vec{k}} - c_{\lambda\vec{k}})^* (c_{0\vec{k}} - c_{\lambda\vec{k}}) \omega_k &= \\ &= \Sigma (c_{\lambda\vec{k}}^* c_{\lambda\vec{k}} - c_{0\vec{k}}^* c_{0\vec{k}}) \omega_k + \int \rho A_0 d\tau \end{aligned} \quad (18)$$

La formule (15) devient alors

$$\omega^{(ch)} = \frac{\Sigma}{\vec{k}} \left\{ (c_{0\vec{k}} - c_{\lambda\vec{k}})^* (c_{0\vec{k}} - c_{\lambda\vec{k}}) + S c_{\tau\vec{k}}^* c_{\tau\vec{k}} \right\} \omega_k \quad (15')$$

D'autre part, si le système est constitué par des charges quasi ponctuelles  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , les équations (16) peuvent s'écrire sous la forme

$$\left(c_{\tau\vec{k}} + \frac{\dot{c}_{\tau\vec{k}}}{i\omega}\right) \omega_k = \sum_i e_i \frac{\vec{v}_i}{c} \cdot \vec{A}_{\tau\vec{k}}^* (\vec{r}_i) \quad (19a)$$

$$\left(c_{\lambda\vec{k}} + \frac{\dot{c}_{\lambda\vec{k}}}{i\omega}\right) \omega_k = \sum_i e_i \frac{\vec{v}_i}{c} \cdot \vec{A}_{0\vec{k}}^* (\vec{r}_i) \quad (19b)$$

$$\left(c_{0\vec{k}} + \frac{\dot{c}_{0\vec{k}}}{i\omega}\right) \omega_k = \sum_i e_i A_{0\vec{k}}^* (\vec{r}_i) \quad (19c)$$

pour les valeurs de  $k$  telles que la longueur d'onde  $\frac{2\pi}{k}$  soit grande vis-à-vis du rayon des particules.

Ecrivons maintenant ces équations sous forme hamiltonienne. Pour cela introduisons les couples de variables canoniques  $q_{\tau\vec{k}}$ ,

$p_{\tau\vec{k}}; q_{\lambda\vec{k}}, p_{\lambda\vec{k}}; q_{0\vec{k}}, p_{0\vec{k}}$  définis par les formules

$$\left\{ \begin{array}{l} q_{\tau\vec{k}} = \sqrt{\frac{2\omega_k}{\omega}} \frac{c_{\tau\vec{k}} + c_{\tau\vec{k}}^*}{2} \\ p_{\tau\vec{k}} = \sqrt{\frac{2\omega_k}{\omega}} \frac{c_{\tau\vec{k}} - c_{\tau\vec{k}}^*}{2i} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} q_{\lambda\vec{k}} = \sqrt{\frac{2\omega_k}{\omega}} \frac{c_{\lambda\vec{k}} + c_{\lambda\vec{k}}^*}{2} \\ p_{\lambda\vec{k}} = \sqrt{\frac{2\omega_k}{\omega}} \frac{c_{\lambda\vec{k}} - c_{\lambda\vec{k}}^*}{2i} \end{array} \right. \quad (20a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} q_{0\vec{k}} = -\sqrt{\frac{2\omega_k}{\omega}} \frac{c_{0\vec{k}}^* + c_{0\vec{k}}}{2} \\ p_{0\vec{k}} = -\sqrt{\frac{2\omega_k}{\omega}} \frac{c_{0\vec{k}}^* - c_{0\vec{k}}}{2i} \end{array} \right.$$

d'où l'on tire

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{\tau\vec{k}} = \sqrt{\frac{\omega}{2\omega_k}} (q_{\tau\vec{k}} + ip_{\tau\vec{k}}) \\ c_{\tau\vec{k}}^* = \sqrt{\frac{\omega}{2\omega_k}} (q_{\tau\vec{k}} - ip_{\tau\vec{k}}) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} c_{\lambda\vec{k}} = \sqrt{\frac{\omega}{2\omega_k}} (q_{\lambda\vec{k}} + ip_{\lambda\vec{k}}) \\ c_{\lambda\vec{k}}^* = \sqrt{\frac{\omega}{2\omega_k}} (q_{\lambda\vec{k}} - ip_{\lambda\vec{k}}) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{0\vec{k}} = -\sqrt{\frac{\omega}{2\omega_k}} (q_{0\vec{k}} - ip_{0\vec{k}}) \\ c_{0\vec{k}}^* = -\sqrt{\frac{\omega}{2\omega_k}} (q_{0\vec{k}} + ip_{0\vec{k}}) \end{array} \right. \quad (20b)$$

Choisissons comme hamiltonien l'expression

$$H = H^{(\text{ch})} + H^{(i)}$$

avec

$$H^{(\text{ch})} = \sum_{\vec{k}} (S c_{\tau\vec{k}}^* c_{\tau\vec{k}} + c_{\lambda\vec{k}}^* c_{\lambda\vec{k}} - c_{0\vec{k}}^* c_{0\vec{k}}) \omega_k \quad (21a)$$

$$= \sum_{\vec{k}} \left\{ S \frac{1}{2} \omega (p_{\tau\vec{k}}^2 + q_{\tau\vec{k}}^2) + \frac{1}{2} \omega (p_{\lambda\vec{k}}^2 + q_{\lambda\vec{k}}^2) - \frac{1}{2} \omega (p_{0\vec{k}}^2 + q_{0\vec{k}}^2) \right\} \omega_k \quad (21'a)$$

$$H^{(i)} = \sum e_i \left\{ A_0(\vec{r}_i) - \frac{\vec{v}_i}{c} \cdot \vec{A}(\vec{r}_i) \right\} \quad (21b)$$

On vérifie immédiatement que le système d'équations canoniques

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial q_{\tau\vec{k}}} = -\dot{p}_{\tau\vec{k}} \\ \frac{\partial H}{\partial p_{\tau\vec{k}}} = \dot{q}_{\tau\vec{k}} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial q_{\lambda\vec{k}}} = -\dot{p}_{\lambda\vec{k}} \\ \frac{\partial H}{\partial p_{\lambda\vec{k}}} = \dot{q}_{\lambda\vec{k}} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial q_{0\vec{k}}} = -\dot{p}_{0\vec{k}} \\ \frac{\partial H}{\partial p_{0\vec{k}}} = \dot{q}_{0\vec{k}} \end{array} \right. \quad (19')$$

est équivalent à l'ensemble des équations (16) et de leurs conjuguées complexes. La condition (17) devient

$$\dot{q}_{0\vec{k}} = -\omega p_{\lambda\vec{k}} ; \quad \dot{p}_{0\vec{k}} = \omega q_{\lambda\vec{k}} \quad (17')$$

Suivant le schéma actuel, le comportement du champ se trouve ainsi décrit par les mouvements d'une triple suite d'oscillateurs harmoniques dont  $H^{(\text{ch})}$  représente la somme des hamiltoniens, ceux des ondes scalaires étant comptés négativement, et dont le terme d'interaction  $H^{(i)}$  exprime le couplage avec les particules. Il est d'ailleurs à remarquer que l'énergie du champ n'est ni  $H$  ni  $H^{(\text{ch})}$ . D'après (15) elle est égale à

$$\omega^{(\text{ch})} = H^{(\text{ch})} + \sum_i e_i A_0(\vec{r}_i) \quad (22)$$

Quant à la solution générale des équations (16) ou (16'), elle est la somme de celle des équations homogènes correspondantes (oscillations libres) et d'une solution particulière des équations non homogènes (oscillations forcées).

La première est de la forme

$$\begin{aligned} c_{\tau\vec{k}}(t) &= c_{\tau\vec{k}}(0) e^{-i\omega t} \\ c_{\lambda\vec{k}}(t) &= c_{\lambda\vec{k}}(0) e^{-i\omega t} \\ c_{0\vec{k}}(t) &= c_{0\vec{k}}(0) e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (23 a)$$

avec  $c_{\lambda\vec{k}} = c_{0\vec{k}}$  à cause de (17). Les formules (9) fournissent alors la décomposition du champ de radiation en ondes planes se

propageant dans la direction  $\vec{k}$  avec la vitesse  $c$  et cette décomposition est physiquement réalisable, au moyen d'un prisme par exemple, puisque chacune des ondes transversales et longitudinales satisfait séparément aux équations de Maxwell. Toutefois les ondes transversales seules représentent effectivement des radiations lumineuses, les ondes longitudinales ne donnant lieu ici qu'à un champ nul.

D'autre part la solution de (16) correspondant aux oscillations forcées fournit les coefficients de Fourier du champ dû à la présence des particules. En particulier s'il s'agit d'une particule en mouvement uniforme, on a

$$\begin{aligned}
 c_{\tau\vec{k}} &= \frac{e \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{A}_{\tau\vec{k}}^*(\vec{r}_1)}{\omega_k \left(1 - \frac{\vec{v}}{c} \cdot \frac{\vec{k}}{k}\right)} \\
 c_{\lambda\vec{k}} &= \frac{e \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{A}_{\lambda\vec{k}}^*(\vec{r}_1)}{\omega_k \left(1 - \frac{\vec{v}}{c} \cdot \frac{\vec{k}}{k}\right)} \\
 c_{0\vec{k}} &= \frac{e A_{0\vec{k}}^*(\vec{r}_1)}{\omega_k \left(1 - \frac{\vec{v}}{c} \cdot \frac{\vec{k}}{k}\right)}
 \end{aligned} \tag{23b}$$

Les formules (9) représentent alors le champ propre de la particule. Mais, au contraire de ce qui se passe pour le champ de radiation, le développement en série d'ondes planes ne possède ici qu'une signification purement mathématique, chaque onde ne satisfaisant plus aux équations de Maxwell et ne pouvant par conséquent exister isolément. Les composantes de Fourier du champ de radiation et celles du champ propre présentent donc un caractère essentiellement différent; elles correspondent en électrodynamique quantique aux notions de photons réels et virtuels.

Enfin calculons effectivement le champ propre d'une particule en mouvement uniforme. En portant les expressions (23)

dans les formules (9) il vient:

$$\begin{aligned}
 \vec{A}_\tau &= S \sum_{\vec{k}} \frac{\left( e \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{A}_{\tau\vec{k}}^*(\vec{r}_1) \right) \vec{A}_{\tau\vec{k}}(\vec{r}) + \left( e \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{A}_{\tau\vec{k}}(\vec{r}_1) \right) \vec{A}_{\tau\vec{k}}^*(\vec{r})}{\omega_k \left( 1 - \frac{\vec{v}}{c} \cdot \frac{\vec{k}}{k} \right)} \\
 \vec{A}_\lambda &= \sum_{\vec{k}} \frac{\left( e \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{A}_{\lambda\vec{k}}^*(\vec{r}_1) \right) \vec{A}_{\lambda\vec{k}}(\vec{r}) + \left( e \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{A}_{\lambda\vec{k}}(\vec{r}_1) \right) \vec{A}_{\lambda\vec{k}}^*(\vec{r})}{\omega_k \left( 1 - \frac{\vec{v}}{c} \cdot \frac{\vec{k}}{k} \right)} \\
 A_0 &= \sum_{\vec{k}} \frac{e A_{0\vec{k}}^*(\vec{r}_1) A_{0\vec{k}}(\vec{r}) + e A_{0\vec{k}}(\vec{r}_1) A_{0\vec{k}}^*(\vec{r})}{\omega_k \left( 1 - \frac{\vec{v}}{c} \cdot \frac{\vec{k}}{k} \right)}
 \end{aligned} \tag{24}$$

En tenant compte de (11) et (13) on obtient

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \frac{2\pi}{\sqrt{L^3}} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{k^2} \frac{1}{1 - \left( \frac{\vec{v}}{c} \cdot \frac{\vec{k}}{k} \right)} \left\{ \frac{e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}_1)}}{\sqrt{L^3}} + \frac{e^{-i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}_1)}}{\sqrt{L^3}} \right\} = \\
 &= \frac{e}{r \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} + \left( \frac{\vec{v}}{c} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \right)^2}}
 \end{aligned} \tag{24'}$$

$$\vec{A} = \vec{A}_\tau + \vec{A}_\lambda = \frac{\vec{v}}{c} A_0$$

On retrouve ainsi les potentiels du champ coulombien en translation uniforme. C'est en suivant une méthode analogue en tous points que nous déterminerons, au moyen de l'électrodynamique quantique, le champ propre d'un électron de Dirac.

#### 4. Champ propre et dynamique de l'électron.

Du point de vue classique, l'électron apparaît comme une charge  $e$  distribuée d'une certaine façon à l'intérieur d'une petite sphère de rayon  $r$ . L'énergie électrostatique de celle-ci est égale à l'énergie au repos  $mc^2$  de la particule lorsque  $r$  est de l'ordre de grandeur  $r_0 = \frac{e^2}{mc^2} = 2,80 \cdot 10^{-13}$  cm. Cette



dernière longueur, qu'on appelle « rayon classique de l'électron », constitue donc une limite inférieure de la validité de la loi de Coulomb. Nous verrons plus loin que les théories quantiques conduisent déjà à des modifications sensibles du champ propre de l'électron pour des distances de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde de Compton,  $\Lambda = \frac{h}{2\pi mc} = 137 r_0$ .

D'autre part le modèle classique de la sphère électrisée possède des propriétés mécaniques assez semblables à celles d'un point matériel. Toutefois on sait que s'il est en translation uniforme, l'énergie et l'impulsion de son champ propre ne se transforment pas comme les composantes d'un vecteur d'espace-temps; pour les vitesses non relativistes, l'énergie cinétique est bien de la forme  $kmv^2$  mais  $k \neq 1/2$ . On obtient de même un facteur discordant pour la force d'inertie qui résulte en première approximation, dans le cas d'une faible accélération, de l'action retardée de divers éléments de la particule les uns sur les autres. Il est bien connu que ces difficultés sont dues au fait que le modèle classique proposé n'est pas stable sans l'intervention d'une énergie de nature non électromagnétique<sup>1</sup>. Enfin l'influence de la durée de propagation du champ d'un point à un autre de la particule se marque en deuxième approximation par l'existence d'une force de freinage tenant compte de l'énergie rayonnée par la particule. Les théories actuelles ne considèrent que le cas où cette force est faible vis-à-vis de celle d'inertie. Pour établir la dynamique classique relativiste de l'électron, on peut éviter ces difficultés en considérant d'emblée celui-ci comme un point matériel doué d'une énergie et d'une impulsion

$$c g_0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} ; \quad \vec{g} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} ,$$

englobant l'énergie et l'impulsion du champ propre, et soumis, lorsqu'il est plongé dans un champ extérieur, à la force de Lorentz

$$\vec{f} = e \left( \vec{E} + \left[ \frac{\vec{v}}{c}, \vec{H} \right] \right)$$

<sup>1</sup> Cf. W. HEITLER, *The quantum theory of radiation*. Oxford Clarendon Press, 1936, §§ 2 et 4.

appliquée à une charge ponctuelle. On néglige ainsi complètement l'influence de la structure de l'électron ainsi que le freinage dû à son rayonnement.

Pour écrire les équations du mouvement

$$\vec{f} = \frac{d\vec{g}}{dt}$$

sous la forme canonique

$$\frac{\partial H}{\partial x_1} = -\dot{p}_{x_1} ; \quad \frac{\partial H}{\partial y_1} = -\dot{p}_{y_1} ; \quad \frac{\partial H}{\partial z_1} = -\dot{p}_{z_1} \quad (25a)$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_{x_1}} = \dot{x}_1 ; \quad \frac{\partial H}{\partial p_{y_1}} = \dot{y}_1 ; \quad \frac{\partial H}{\partial p_{z_1}} = \dot{z}_1 \quad (25b)$$

il suffit d'introduire le vecteur d'espace-temps

$$\vec{p} = e \frac{\vec{A}}{c} + \vec{g} \quad (26)$$

$$p_0 = e \frac{A_0}{c} + g_0$$

et de prendre comme hamiltonien  $H = cp_0$ , c'est-à-dire

$$H = e A_0 + c \sqrt{m^2 c^2 + \left(\vec{p} - c \frac{\vec{A}}{c}\right)^2} \quad (27)$$

##### 5. *Champ et mouvement d'un système de particules.*

Les équations (19') fournissent le champ d'un système de particules dont le mouvement est connu, tandis que les équations (25) régissent le mouvement d'une particule dans un champ extérieur donné. L'ensemble de ces deux systèmes d'équations canoniques permet donc de déterminer à la fois le champ et le mouvement du système. Toutefois l'influence du freinage dû au rayonnement a été négligée. Afin de pouvoir passer ultérieurement de la théorie classique à la théorie

quantique nous devons arriver à cette détermination au moyen d'un seul système d'équations cononiques :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial p_{\tau \vec{k}}} = \dot{q}_{\tau \vec{k}} \\ \frac{\partial H}{\partial q_{\tau \vec{k}}} = -\dot{p}_{\tau \vec{k}} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial p_{\lambda \vec{k}}} = \dot{q}_{\lambda \vec{k}} \\ \frac{\partial H}{\partial q_{\lambda \vec{k}}} = -\dot{p}_{\lambda \vec{k}} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial p_{0 \vec{k}}} = \dot{q}_{0 \vec{k}} \\ \frac{\partial H}{\partial q_{0 \vec{k}}} = -\dot{p}_{0 \vec{k}} \end{array} \right. \quad (28 a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial p_{xi}} = \dot{x}_i \\ \frac{\partial H}{\partial x_i} = -\dot{p}_{xi} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial p_{yi}} = \dot{y}_i \\ \frac{\partial H}{\partial y_i} = -\dot{p}_{yi} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial p_{zi}} = \dot{z}_i \\ \frac{\partial H}{\partial z_i} = -\dot{p}_{zi} \end{array} \right. \quad (28 b)$$

Dans ce but on est amené à choisir pour l'hamiltonien du champ et des particules l'expression suivante

$$H = \sum c \sqrt{m_i^2 c^2 + \left( \vec{p}_i - e_i \frac{\vec{A}(\vec{r}_i)}{c} \right)^2} + \sum_i e_i A_0(\vec{r}_i) + H^{(ch)} \quad (29)$$

dans laquelle  $H^{(ch)}$ , donné par la formule (21'a), est l'hamiltonien des oscillateurs du champ. L'ensemble des deux derniers termes de  $H$  est égal, d'après (22), à l'énergie du champ tandis que le premier représente la somme des énergies mécaniques des particules. On vérifie aisément que les équations (28 a) et (28 b) sont formellement identiques aux équations (19') et (25). Toutefois les équations (19') et (25) font intervenir, les unes le champ total de toutes les particules, et les autres le champ extérieur agissant sur chacune de celles-ci. Au contraire il ne figure dans les équations (28) qu'un seul champ, celui de toutes les particules. Pour que (19') et (28 a) soient effectivement identiques, il faut donc insérer ce dernier champ dans les relations (26) définissant les  $\vec{p}_i$ . Par ailleurs l'introduction de ce champ total dans l'hamiltonien (27) d'une particule a pour effet d'ajouter à la force exercée sur celle-ci par le champ extérieur, la réaction de son champ propre. Celle-ci donne lieu à la force d'inertie (à part un facteur voisin de l'unité) et à la force de freinage. Cette dernière force avait été négligée dans

les équations (25); son apparition dans les équations (28 *b*) constitue donc un progrès. Par contre celle de nouveaux termes d'inertie d'origine électromagnétique est certainement incorrecte, puisque l'inertie totale de la particule se trouve déjà entièrement contenue dans la masse  $m$  qui figure dans (25) et (28 *b*). Ces termes doivent donc être supprimés des équations (28 *b*) avant de les intégrer. De même, si après avoir déterminé le champ et le mouvement du système, on veut calculer son énergie au moyen de l'expression hamiltonienne  $H$ , il ne faut pas tenir compte des termes apportant une contribution électromagnétique supplémentaire à l'énergie propre des particules, puisque celle-ci est représentée complètement par le dernier terme de  $H$ .

Le formalisme actuel est donc loin d'être rigoureux et les difficultés signalées subsistent dans la théorie quantique qui en découle par la simple introduction des opérateurs. Il permet néanmoins, moyennant les précautions indiquées, d'aborder l'étude du champ propre et de l'interaction des particules élémentaires, problème qui nous intéresse tout particulièrement ici, et de traiter un grand nombre de questions relatives aux phénomènes de radiation.

#### 6. *Interaction entre particules et superposition de leurs champs propres.*

Le champ électromagnétique joue un rôle essentiel dans les phénomènes d'interactions entre particules, puisque c'est uniquement par son intermédiaire que l'impulsion peut se transmettre de l'une à l'autre, ce qui s'effectue avec la vitesse de propagation  $c$ . Il n'existe donc pas d'interaction directe et instantanée entre elles. Toutefois, si nous nous limitons au cas de vitesses non relativistes il est possible de considérer l'étude du mouvement d'un système de particules électrisées comme un problème purement mécanique, c'est-à-dire dans lequel le champ n'intervient pas explicitement. Autrement dit on peut représenter l'énergie du système par un hamiltonien ne dépendant que des coordonnées des particules et de leurs moments conjugués. Celui-ci est formellement la somme des hamiltoniens

niens des particules supposées libres et de certains termes d'interaction qu'il s'agit de déterminer à partir du formalisme général de l'électrodynamique. Il faudra ensuite préciser les rapports qui existent entre ces termes d'interaction et l'énergie résultant de la superposition des champs propres des particules. Ces deux problèmes se posent en théorie classique comme en théorie quantique. Leur étude détaillée, à ce dernier point de vue et dans le cas des particules de Dirac, fera l'objet de la deuxième partie de ce mémoire. Pour l'instant nous allons rappeler les résultats que fournit à ce sujet l'électrodynamique classique afin de pouvoir les comparer aux résultats quantiques.

Tout d'abord, on sait qu'il est possible d'éliminer les ondes longitudinales du formalisme, en choisissant comme hamiltonien l'expression indiquée par Fermi <sup>1</sup>:

$$H' = \sum_i c \sqrt{m_i^2 c^2 + \left( \vec{p}_i - e_i \frac{\vec{A}_\tau(\vec{r}_i)}{c} \right)^2} + V_0 + \sum_{\vec{k}} c_{\tau \vec{k}}^* c_{\tau \vec{k}} \omega_k \quad (30)$$

avec

$$V_0 = \frac{1}{2} \sum_{i, j \neq i} \frac{e_i e_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \quad (31)$$

$$\vec{p}_i = \vec{g}_i + e_i \frac{\vec{A}_\tau(\vec{r}_i)}{c} \quad (32)$$

Ceci paraît particulièrement évident si on représente le champ par les potentiels  $\vec{A}'$ ,  $A'_0$  introduits précédemment [équations (5), (6), (7)]. Bien que  $V_0$  représente une interaction instantanée, la restriction des vitesses non relativistes n'est pas nécessaire, l'effet de la propagation étant entièrement contenu dans la partie transversale du champ. On appelle d'habitude  $V_0$  l'interaction coulombienne des charges; en fait l'expression (31) ne présente qu'une analogie formelle avec celle de l'électrostatique. Conformément au point de vue que nous venons d'indiquer, l'hamiltonien  $H'$  peut s'obtenir à partir du formalisme général de l'électrodynamique développé précédemment

<sup>1</sup> E. FERMI, *Review of Modern Physics*, 4 (1932).

(§ 1, 5)<sup>1</sup>. H' se déduit de H. En effet, en tenant compte des formules (9 a), (10) et (18) on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{\vec{k}} (c_{\lambda\vec{k}}^* c_{\lambda\vec{k}} - c_{0\vec{k}}^* c_{0\vec{k}}) \omega_{\vec{k}} + \sum_i e_i A_0(r_i) &= \sum_{\vec{k}} (c_{0\vec{k}}^* - c_{\lambda\vec{k}}^*) (c_{0\vec{k}} - c_{\lambda\vec{k}}) \omega_{\vec{k}} \quad (33) \\ &= \sum_{i,j} e_i e_j \sum_{\vec{k}} \frac{A_{0\vec{k}}(\vec{r}_i) A_{0\vec{k}}^*(\vec{r}_j)}{\omega_{\vec{k}}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} e_i e_j \sum_{\vec{k}} \frac{4\pi}{\sqrt{L^3}} \frac{1}{k^2} \frac{e^{i\vec{k}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}}{\sqrt{L^3}} \end{aligned}$$

Les termes ( $i, j \neq i$ ) s'évaluent immédiatement par la formule (12 b). Ceux pour lesquels  $i = j$  divergent, par suite de l'hypothèse de charges ponctuelles. Ils correspondent à la contribution des ondes longitudinales à l'énergie propre des particules, laquelle est déjà complètement représentée par le premier terme de H (ou H'). L'élimination du champ longitudinal de notre formalisme nous permet de faire disparaître cette contradiction signalée plus haut, en supprimant ces termes divergents. En affectant de l'indice  $i$  les coefficients de Fourier du champ de la  $i^{\text{ième}}$  particule, on obtient alors:

$$V_0 = \sum_{i,j \neq i} \sum_{\vec{k}} (c_{0\vec{k}}^{(i)*} - c_{\lambda\vec{k}}^{(i)*}) (c_{0\vec{k}}^{(j)} - c_{\lambda\vec{k}}^{(j)}) \omega_{\vec{k}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j \neq i} \frac{e_i e_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \quad (31')$$

Pour passer de H à H' il ne reste plus qu'à se débarrasser de  $\vec{A}_\lambda$  en introduisant de nouveaux  $\vec{p}_i$  définis par (32) au lieu de (26). Enfin on vérifie aisément que les équations canoniques dérivant de H' sont équivalentes aux équations (28) et que par conséquent l'expression (30) présente effectivement la forme hamiltonienne.

Occupons-nous maintenant de l'élimination de la partie transversale du champ. Celle-ci contenant l'effet de la propagation, nous nous placerons dans le cas de vitesses non rela-

<sup>1</sup> E. FERMI, *Review of Modern Physics*, 4 (1932).

tivistes. En le développant en série, le premier terme de  $H'$  peut s'écrire

$$\sum_i c \sqrt{m_i^2 c^2 - \left( \vec{p}_i - e_i \frac{\vec{A}_\tau(\vec{r}_i)}{c} \right)^2} = \sum_i \left\{ m_i c^2 + \frac{1}{2m_i} \left| \vec{p}_i - e_i \frac{\vec{A}_\tau(\vec{r}_i)}{c} \right|^2 - \frac{1}{8m_i^3 c^2} \left| \vec{p}_i - e_i \frac{\vec{A}_\tau(\vec{r}_i)}{c} \right|^4 + \dots \right\} \quad (34)$$

Par conséquent, si

$$\left| e_i \frac{\vec{A}_\tau(\vec{r}_i)}{c} \right| \ll |\vec{p}_i| \quad (35)$$

l'interaction entre les particules et le champ transversal est représentée en première approximation par le terme

$$H_\tau = - \sum_i e_i \frac{\vec{p}_i}{m_i c} \cdot \vec{A}_\tau(\vec{r}_i) \quad (36)$$

D'autre part nous admettrons que le champ des particules est le même que si celles-ci étaient en translation uniforme; nous négligeons ainsi leur champ de radiation dont l'action comparativement faible ne se fait sentir qu'à la longue. En tenant compte des formules (23) et en négligeant  $v/c$  vis-à-vis de l'unité on obtient en première approximation

$$H_\tau^{(i)} = - 2 H_\tau^{(ch)} \quad (37)$$

$$H_\tau^{(ch)} = S \sum_{\vec{k}} c_{\tau k}^* c_{\tau k} \omega_k = \sum_{i,j} S \sum_{\vec{k}} e_i e_j \frac{\left( \frac{\vec{p}_i}{m_i c} \cdot \vec{A}_{\tau \vec{k}}(\vec{r}_i) \right) \left( \frac{\vec{p}_j}{m_j c} \cdot \vec{A}_{\tau \vec{k}}^*(\vec{r}_j) \right)}{\omega_k} \quad (38)$$

Les sommations sur les deux directions du vecteur de polarisation  $a_{\vec{k}}$  et sur tous les vecteurs  $\vec{k}$  s'effectuent au moyen des formules (13) et (12). Comme dans le cas du champ longitudinal, le résultat est divergent lorsque  $i = j$ . Les termes correspondants de  $H_\tau^{(ch)}$  fournissent cette fois la contribution des ondes transversales à l'énergie propre des particules, contribution qui

est déjà contenue dans le premier terme de  $H'$ . Comme précédemment, on supprimera les termes divergents; en ce qui concerne  $H_{\tau}^{(i)}$  ceci revient à considérer  $\vec{A}_{\tau}(\vec{r}_i)$  comme le potentiel vecteur du champ transversal agissant sur la  $i^{\text{ème}}$  particule, ce qui justifie la condition (36). En groupant les termes restants de  $H_{\tau}^{(i)}$  et de  $H_{\tau}^{(\text{ch})}$  on obtient l'interaction  $V_l$  due aux ondes transversales:

$$V_l = -\frac{1}{2} \sum_{i,j \neq i} \frac{e_i e_j}{2 m_i m_j c^2} \left\{ \frac{(\vec{p}_i \cdot \vec{p}_j)}{r_{ij}} + \frac{(\vec{p}_i \cdot \vec{r}_{ij})(\vec{p}_j \cdot \vec{r}_{ij})}{r_{ij}^3} \right\} \quad (39)$$

L'ordre de grandeur de  $V_l$  est  $v^2/c^2$  fois plus petit que celui de  $V_0$ , lequel est le même que celui de l'énergie cinétique. Nous devons donc développer celle-ci jusqu'au terme en  $p^4$  afin d'atteindre la même précision que pour l'interaction.

En posant

$$H_i^{(p)} = m_i c^2 + \frac{p_i^2}{2 m_i} - \frac{p_i^4}{8 m_i^3 c^2}, \quad (40)$$

l'hamiltonien du système s'écrit sous la forme indiquée par Darwin <sup>1</sup>

$$H = \sum_i H_i^{(p)} + V_0 + V_l. \quad (41)$$

Afin d'interpréter les différents termes de  $H$ , introduisons la notion d'énergie de superposition.

Soit  $(\vec{E}_1, \vec{H}_1)$  et  $(\vec{E}_2, \vec{H}_2)$  deux champs quelconques. Si nous les superposons, l'énergie totale

$$\omega^{(\text{ch})} = \frac{1}{8\pi} \int \{ (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2 + (\vec{H}_1 + \vec{H}_2)^2 \} d\tau$$

est la somme de trois termes représentant respectivement les énergies de chacun des champs

$$\omega_1^{(\text{ch})} = \frac{1}{8\pi} \int (\vec{E}_1^2 + \vec{H}_1^2) d\tau, \quad \omega_2^{(\text{ch})} = \frac{1}{8\pi} \int (\vec{E}_2^2 + \vec{H}_2^2) d\tau$$

<sup>1</sup> DARWIN, *Phil. Mag.*, 39, 1929, p. 537.



et leur énergie de superposition

$$\omega^{(s)} = \frac{1}{4\pi} \int (\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 + \vec{H}_1 \cdot \vec{H}_2) d\tau. \quad (42)$$

Si  $(\vec{E}_1, \vec{H}_1)$  et  $(\vec{E}_2, \vec{H}_2)$  sont les champs de deux particules, l'adoption de modèles ponctuels pour représenter celles-ci rend divergentes les expressions de  $\omega_1^{(ch)}$  et  $\omega_2^{(ch)}$  alors qu'elle ne modifie pas pratiquement la valeur de  $\omega^{(s)}$  pour autant que la distance  $r_{12}$  soit grande vis-à-vis du rayon des particules. L'intégrale de la formule (42) devient impropre. Son évaluation ne requiert aucune précaution spéciale dans le cas actuel de particules douées simplement d'une charge électrique; il n'en est plus de même si celles-ci sont plus compliquées et présentent par exemple des moments dipolaires électriques et magnétiques (voir plus loin).

D'autre part,  $\omega^{(ch)}$  est également donné quelle que soit la complexité des particules étudiées par l'expression (15):

$$\omega^{(ch)} = \sum_{\vec{k}} \{ (c_{0\vec{k}}^* - c_{\lambda\vec{k}}^*) (c_{0\vec{k}} - c_{\lambda\vec{k}}) + c_{\tau\vec{k}}^* c_{\tau\vec{k}} \} \omega_k$$

Par conséquent l'énergie de superposition est égale à la somme de celles des champs longitudinaux et transversaux:

$$\omega^{(s)} = \omega_{\lambda}^{(s)} + \omega_{\tau}^{(s)} \quad (43)$$

avec

$$\begin{aligned} \omega_{\lambda}^{(s)} &= \frac{1}{4\pi} \int \vec{E}_{1\lambda} \cdot \vec{E}_{2\lambda} d\tau \\ &= \sum_{\vec{k}} \{ (c_{0\vec{k}}^{(1)*} - c_{\lambda\vec{k}}^{(1)*}) (c_{0\vec{k}}^{(2)} - c_{\lambda\vec{k}}^{(2)}) \\ &\quad + (c_{0\vec{k}}^{(2)*} - c_{\lambda\vec{k}}^{(2)*}) (c_{0\vec{k}}^{(1)} - c_{\lambda\vec{k}}^{(1)}) \} \omega_k \quad (44a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_{\tau}^{(s)} &= \frac{1}{4\pi} \int (\vec{E}_{1\tau} \cdot \vec{E}_{2\tau} + \vec{H}_{1\tau} \cdot \vec{H}_{2\tau}) d\tau \\ &= S \sum_{\vec{k}} \{ c_{\tau\vec{k}}^{(1)*} c_{\tau\vec{k}}^{(2)} + c_{\tau\vec{k}}^{(2)*} c_{\tau\vec{k}}^{(1)} \} \omega_k \quad (44b) \end{aligned}$$

Ces formules s'appliquent à des champs quelconques. Dans le cas de champs statiques, leurs parties longitudinales et transversales sont constituées par les champs électriques et magnétiques. On a alors

$$\omega_{\lambda}^{(s)} = \omega_E^{(s)} = \frac{1}{4\pi} \int \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 d\tau = \sum_{\vec{k}} (c_{0\vec{k}}^{(1)*} c_{0\vec{k}}^{(2)} + c_{0\vec{k}}^{(2)*} c_{0\vec{k}}^{(1)}) \omega_k \quad (45 a)$$

$$\omega_{\tau}^{(s)} = \omega_H^{(s)} = \frac{1}{4\pi} \int \vec{H}_1 \cdot \vec{H}_2 d\tau = S \sum_{\vec{k}} (c_{\tau\vec{k}}^{(1)*} c_{\tau\vec{k}}^{(2)} + c_{\tau\vec{k}}^{(2)*} c_{\tau\vec{k}}^{(1)}) \omega_k \quad (45 b)$$

Notons que dans ce cas

$$c_{\vec{k}} = c_{-\vec{k}}^*$$

de sorte que les formules (9 a) s'écrivent

$$A_0 = 2 \sum_{\vec{k}} c_{0\vec{k}} A_{0\vec{k}}$$

$$\vec{A} = 2 S \sum_{\vec{k}} c_{\tau\vec{k}} \vec{A}_{\tau\vec{k}}$$

Cette remarque nous servira plus loin.

L'introduction de l'énergie de superposition permet d'écrire le principe de la conservation de l'énergie en évitant les difficultés relatives à l'énergie du champ propre des particules.

En effet on peut montrer, en partant directement des équations de Maxwell et de l'expression de la densité de force de Lorentz, que la somme des énergies mécaniques de particules de structures quelconques et des énergies de superposition de leurs champs propres est constante, si on néglige le rayonnement.

Dans le cas considéré précédemment, où les particules sont seulement douées d'une charge et ne possèdent aucun moment électrique ou magnétique, il est aisé de voir que cette énergie constante est numériquement égale à H. En effet le terme  $H_i^{(p)}$ , qui est formellement identique à l'hamiltonien de la  $i^{\text{ème}}$  particule, représente en fait la somme de son énergie mécanique

et de l'énergie de superposition de son champ transversal avec celui des autres particules;  $V_0$  est l'énergie de superposition des champs longitudinaux et  $V_i$  celle des champs transversaux changée de signe, mais cette dernière a été comptée deux fois déjà dans la somme des  $H_i^{(p)}$ .

Enfin, dans le cas non relativiste,  $E_{\tau}$  est de l'ordre de  $\frac{v^2}{c^2} E_{\lambda}$  (champ quasi statique). Comme nous avons calculé l'interaction correctement jusqu'aux termes de l'ordre de  $\frac{v^2}{c^2} \frac{e^2}{r}$  inclus,  $V_0$  se confond, à la même approximation, avec l'énergie de superposition des champs électriques et  $V_l$  avec celle des champs magnétiques.

*Remarque:* Les potentiels  $A_0^{(j)}$  et  $\vec{A}^{(j)}$  des champs longitudinaux et transversaux de la  $j^{\text{ième}}$  particule, ont pour expression

$$A_0^{(j)}(\vec{r}) = \frac{e_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|},$$

$$\vec{A}^{(j)}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \frac{e_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} \left\{ \frac{\vec{v}_j}{c} + \left( \frac{\vec{v}_j}{c} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} \right) \frac{\vec{r} - \vec{r}_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} \right\}$$

(la dernière étant seulement valable pour  $v/c \ll 1$ ). L'hamiltonien (41) du système peut alors s'écrire sous la forme

$$H = \sum_i H_i^{(p)} + \frac{1}{2} \sum_{i, j \neq i} e_i \left\{ A_0^{(j)}(r_i) - \frac{\vec{v}_i}{c} \cdot \vec{A}^{(j)}(\vec{r}_i) \right\}$$

Ceci permet de vérifier immédiatement que les équations canoniques dérivant de  $H$  sont bien identiques aux équations du mouvement de chacune des particules soumise au champ de toutes les autres. On retrouve ainsi la possibilité d'étudier le mouvement d'une particule élémentaire en interaction avec un système macroscopique éloigné en considérant celle-ci comme plongée dans un champ extérieur produit par le système.

C'est en suivant une méthode semblable que nous cherchons à mettre en lumière le rôle joué en électrodynamique

quantique par le champ propre des particules de Dirac dans les phénomènes d'interaction mutuelle.

*Application. — Energie de superposition de deux dipôles:* En vue de discuter les formules d'interaction quantique de deux particules de Dirac, il est utile de calculer par les formules (45 a) et (45 b) les énergies de superposition des champs statiques de deux dipôles électriques et de deux dipôles magnétiques immobiles et de dimension  $\varepsilon$  arbitrairement petite.

Soient  $\vec{\mathcal{P}}_1, \vec{\mathcal{P}}_2$  et  $\vec{\mathcal{M}}_1, \vec{\mathcal{M}}_2$  leurs moments respectifs. Les coefficients de Fourier de leurs champs sont donnés par les formules (16) qui peuvent s'écrire ici sous la forme

$$\begin{aligned} c_{\vec{0}\vec{k}}^{(j)} \omega_k &= \int \rho A_{\vec{0}\vec{k}}^*(\vec{r}) d\tau = \vec{\mathcal{P}}_j \cdot \text{grad}_{(\vec{r}_j)} A_{\vec{0}\vec{k}}^* \\ &= -\sqrt{2\pi\omega_k} \frac{(\vec{\mathcal{P}}_j \cdot i\vec{k})}{k^2} \frac{e^{-i\vec{k}\vec{r}_j}}{\sqrt{L^3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{\vec{\tau}\vec{k}}^{(j)} \omega_k &= \int \rho \frac{\vec{\mathcal{P}}}{c} \cdot \vec{A}_{\vec{\tau}\vec{k}}^*(\vec{r}) d\tau = \vec{\mathcal{M}}_j \cdot \text{rot}_{(\vec{r}_j)} \vec{A}_{\vec{\tau}\vec{k}}^* \\ &= -\sqrt{2\pi\omega_k} \frac{[\vec{\mathcal{M}}_j, i\vec{k}]}{k^2} \frac{e^{-i\vec{k}\vec{r}_j}}{\sqrt{L^3}} \end{aligned}$$

pour autant que la longueur d'onde  $\frac{2\pi}{k}$  soit grande vis-à-vis de  $\varepsilon$ . En appliquant les formules (46) et (12) on trouve les potentiels de chaque dipôle

$$A_{\vec{0}}^{(j)}(\vec{r}) = -\frac{4\pi}{\sqrt{L^3}} \sum_{\vec{k}} \frac{\vec{\mathcal{P}}_j \cdot i\vec{k}}{k^2} \frac{e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}_j)}}{\sqrt{L^3}} = \frac{\vec{\mathcal{P}}_j \cdot (\vec{r}-\vec{r}_j)}{|\vec{r}-\vec{r}_j|^3}$$

$$\vec{A}^{(j)}(\vec{r}) = -\frac{4\pi}{\sqrt{L^3}} \sum_{\vec{k}} \frac{([\vec{\mathcal{M}}_j, i\vec{k}] \cdot \vec{a}_{\vec{k}})}{k^2} \frac{e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}_j)}}{\sqrt{L^3}} = \frac{[\vec{\mathcal{M}}_j, \vec{r}-\vec{r}_j]}{|\vec{r}-\vec{r}_j|^3}$$

et les énergies de superposition

$$\begin{aligned} \omega_{\vec{r}}^{(s)} &= \sum_{\vec{k}} (c_{0\vec{k}}^{(1)*} c_{0\vec{k}}^{(2)} + c_{0\vec{k}}^{(2)*} c_{0\vec{k}}^{(1)}) \omega_k \\ &= \frac{4\pi}{\sqrt{L^3}} \sum_{\vec{k}} \frac{(\vec{c}_1 \cdot i\vec{k})(\vec{c}_2 \cdot i\vec{k})}{k^2} \frac{e^{i\vec{k}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}}{\sqrt{L^3}} \end{aligned} \quad (48a)$$

$$\begin{aligned} \omega_{\vec{m}}^{(s)} &= S \sum_{\vec{k}} (c_{\tau\vec{k}}^{(1)*} c_{\tau\vec{k}}^{(2)} + c_{\tau\vec{k}}^{(2)*} c_{\tau\vec{k}}^{(1)}) \omega_k \\ &= \frac{4\pi}{\sqrt{L^3}} S \sum_{\vec{k}} \frac{([\vec{m}_1, i\vec{k}] \vec{a}_k) ([\vec{m}_2, i\vec{k}] \vec{a}_k)}{k^2} \frac{e^{i\vec{k}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}}{\sqrt{L^3}} \\ &= \frac{4\pi}{\sqrt{L^3}} \sum_{\vec{k}} \left\{ \frac{(\vec{m}_1 \cdot i\vec{k})(\vec{m}_2 \cdot i\vec{k})}{k^2} + \vec{m}_1 \vec{m}_2 \right\} \frac{e^{i\vec{k}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}}{\sqrt{L^3}} \end{aligned} \quad (48b)$$

Ces expressions ne sont exactes que pour les grandes distances ( $r_{12} \gg \varepsilon$ ) puisque les coefficients de Fourier ne sont corrects que pour les petites valeurs de  $k$  ( $k \ll 1/\varepsilon$ ).

Effectuons les sommations en laissant provisoirement de côté le terme  $\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2$  qui n'apporte aucune contribution à distance finie; nous obtenons:

$$\omega_{\vec{r}}^{(s)} = \frac{\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_2}{r_{12}^3} - 3 \frac{(\vec{c}_1 \cdot \vec{r}_{12})(\vec{c}_2 \cdot \vec{r}_{12})}{r_{12}^5} \quad (49a)$$

$$\omega_{\vec{m}}^{(s)} = \frac{\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2}{r_{12}^3} - 3 \frac{(\vec{m}_1 \cdot \vec{r}_{12})(\vec{m}_2 \cdot \vec{r}_{12})}{r_{12}^5} \quad (49b)$$

Comme on le voit,  $\omega_{\vec{r}}^{(s)}$  est égale à l'énergie potentielle mécanique tandis que  $\omega_{\vec{m}}^{(s)}$  en diffère par le signe. Ceci provient de ce que les moments  $\vec{c}$  et  $\vec{m}$  n'ont pas la même symétrie; le premier est un vecteur polaire et le second un vecteur axial ainsi que le sont respectivement  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$ . De façon plus précise l'emploi dans notre calcul de potentiels  $A_0$  et  $\vec{A}$  continus et uniformes dans tout l'espace implique nécessairement que les dipôles électriques soient constitués par des charges électriques et les dipôles magnétiques par des courants électriques et non par des masses magnétiques libres.

Revenons maintenant au terme  $\overline{\mathcal{M}}_1 \cdot \overline{\mathcal{M}}_2$  de la formule (48 b). Par sommation il donne lieu à une énergie de superposition

$$4\pi \overline{\mathcal{M}}_1 \cdot \overline{\mathcal{M}}_2 \delta(r_{12}) \quad (50)$$

qu'il s'agit d'interpréter. Pour cela nous devons supposer que  $r_{12}$  puisse devenir du même ordre de grandeur que  $\epsilon$ . L'expression de l'énergie de superposition est alors très différente de (49 b) et dépend essentiellement de la structure particulière des dipôles. Il est alors intéressant de déterminer la valeur moyenne de cette énergie en admettant que ceux-ci ont une certaine probabilité de se trouver en tout point de l'espace. Ce problème se pose en mécanique ondulatoire dans le calcul de l'interaction des spins de deux électrons. Nous désignerons par  $\overline{\mathcal{M}}_1$  et  $\overline{\mathcal{M}}_2$  les densités probables de moment magnétique; si nous supposons que celles-ci varient peu sur des distances de l'ordre de  $\epsilon$  l'expression (48 b) reste applicable, mais nous ne pouvons pas lui substituer la somme des expressions (49 b) et (50), la première donnant lieu à une intégrale impropre dont la valeur dépend de la façon dont on approche le pôle  $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$ .

D'autre part, on peut également écrire l'énergie de superposition moyenne sous la forme

$$\overline{\omega}_{\mathcal{M}}^{(s)} = \int \overline{H}_1^{(L)}(\vec{r}_2) \cdot \overline{\mathcal{M}}_2(\vec{r}_2) d\tau. \quad (51)$$

$\overline{H}_1^{(L)}(\vec{r}_2)$  est le champ moyen produit au point  $\vec{r}_2$  par le dipôle 1. Suivant Lorentz,  $\overline{H}_1^{(L)}$  est égal à l'induction  $\vec{B}_1 = \vec{H}_1^{(M)} + 4\pi \overline{\mathcal{M}}_1$  de la théorie de Maxwell,  $\vec{H}_1^{(M)}$  étant le champ créé par la densité de masse magnétique apparente  $\text{div } \overline{\mathcal{M}}_1$ . Pour évaluer celui-ci on peut le dériver du potentiel scalaire

$$\Phi(r) = \lim_{v \rightarrow 0} \int_{V-v} \frac{\text{div } \overline{\mathcal{M}}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} d\tau_2 = \lim_{v \rightarrow 0} 4\pi \sum_{\vec{k}} \frac{1}{k^2} \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}}{\sqrt{L^3}} \int_{V-v} \text{div } \overline{\mathcal{M}}_1 e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_1} d\tau_1$$

$V$  désigne le domaine où  $\overline{\mathcal{M}}_1 \neq 0$  et  $S$  sa frontière;  $v$  est un domaine de dimensions arbitrairement petites entourant le

point  $\vec{r}_1$ ,  $s$  sa frontière et  $d\vec{s}$  le produit de l'élément de surface de  $s$  multiplié par un vecteur unitaire dirigé suivant la normale extérieure au domaine  $v$ . Nous supposons que les intégrales sur  $S$  s'annulent. On déduit de  $\Phi$  le champ magnétique

$$\begin{aligned} \vec{H}_1^{(M)}(r_2) &= \lim_{v \rightarrow 0} \left[ \int_{\vec{V}-v} \left\{ -\frac{\vec{\mathcal{M}}_1(\vec{r}_1)}{r_{12}^3} + 3 \frac{(\vec{\mathcal{M}}_1(\vec{r}_1) \cdot \vec{r}_{12}) \vec{r}_{12}}{r_{12}^5} \right\} d\tau_2 - \right. \\ &\quad \left. - \int_s \frac{(\vec{\mathcal{M}}_1 \cdot d\vec{s})(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{r_{12}^3} \right] \\ &= \lim_{v \rightarrow 0} 4\pi \sum_{\vec{k}} \frac{i\vec{k}}{k^2} \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}}{\sqrt{L^3}} \left\{ \int_{\vec{V}-v} (i\vec{k} \cdot \vec{\mathcal{M}}_1) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}_1} d\tau_1 - \right. \\ &\quad \left. - \int_s (\vec{\mathcal{M}}_1 \cdot d\vec{s}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_1} \right\} \end{aligned}$$

L'énergie de superposition s'écrit alors

$$\overline{\omega}_{\mathcal{M}}^{(s)} = \iint \vec{\mathcal{M}}_2(\vec{r}_2) \left\{ \vec{H}_1^{(M)}(\vec{r}_2) + 4\pi \vec{\mathcal{M}}_1(\vec{r}_2) \right\} d\tau_2 \quad (52a)$$

$$= \iint \frac{4\pi}{\sqrt{L^3}} \sum_{\vec{k}} \left\{ \frac{(\vec{\mathcal{M}}_1 \cdot i\vec{k})(\vec{\mathcal{M}}_2 \cdot i\vec{k})}{k^2} - \vec{\mathcal{M}}_1 \cdot \vec{\mathcal{M}}_2 \right\} \frac{e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}}{\sqrt{L^3}} d\tau_1 d\tau_2 \quad (52b)$$

$$\begin{aligned} &= - \int \lim_{v \rightarrow 0} \left[ \int_{\vec{V}-v} \left\{ \frac{\vec{\mathcal{M}}_1 \cdot \vec{\mathcal{M}}_2}{r_{12}^3} - 3 \frac{(\vec{\mathcal{M}}_1 \cdot \vec{r}_{12})(\vec{\mathcal{M}}_2 \cdot \vec{r}_{12})}{r_{12}^5} \right\} d\tau_1 + \right. \\ &\quad \left. + \int_s \frac{(\vec{\mathcal{M}}_1 \cdot d\vec{s})(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{r_{12}^3} \right] d\tau_2 - \\ &\quad - \iint 4\pi \vec{\mathcal{M}}_1(\vec{r}_1) \cdot \vec{\mathcal{M}}_2(\vec{r}_2) \delta(r_{12}) d\tau_1 d\tau_2 \quad (52c) \end{aligned}$$

Dans ces trois expressions équivalentes de  $\omega_{\mathcal{M}}^{(s)}$  les premiers termes se correspondent, ainsi que les derniers, ce qui permet de les interpréter aisément. D'autre part la limite de chacune des deux intégrales du premier terme de (52c) dépend de la

façon dont on fait tendre vers zéro le domaine  $\nu$  tandis que la limite de leur somme en est indépendante. En particulier, si l'on choisit pour  $\nu$  une petite sphère de centre  $\vec{r}_2$ , l'intégrale de surface tend vers  $\frac{4\pi}{3} \overline{\mathcal{M}}_1(\vec{r}_2)$ . En d'autres termes, si l'on adopte ce mode d'intégration, la somme de la série (48 b) doit s'écrire

$$\omega_{\mathcal{M}}^{(s)} = - \left\{ \frac{\overline{\mathcal{M}}_1 \cdot \overline{\mathcal{M}}_2}{r_{12}^3} - 3 \frac{(\overline{\mathcal{M}}_1 \cdot \vec{r}_{12})(\overline{\mathcal{M}}_2 \cdot \vec{r}_{12})}{r_{12}^5} + \frac{4\pi}{3} (\overline{\mathcal{M}}_1 \cdot \overline{\mathcal{M}}_2) \delta(r_{12}) \right. \\ \left. - 4\pi (\overline{\mathcal{M}}_1 \cdot \overline{\mathcal{M}}_2) \delta(r_{12}) \right\} \quad (53)$$

On peut voir que dans l'hypothèse de  $\overline{\mathcal{M}}_1$  et  $\overline{\mathcal{M}}_2$  lentement variables, la majeure partie de l'intégrale du premier terme provient des grandes distances pour lesquelles il représente correctement  $\omega_{\mathcal{M}}^{(s)}$ . Les deux derniers termes donnent la contribution des petites distances.

Pour deux dipôles électriques, on trouve la même formule sans le dernier terme. Ceci correspond au fait que, suivant Lorentz, le champ moyen à l'intérieur d'un diélectrique est égal au champ macroscopique de la théorie de Maxwell.

## § 2. — LES PARTICULES DE DIRAC.

### 1. Equations de Dirac de l'électron et du positron.

D'après Dirac le mouvement relativiste d'un électron dans un champ extérieur donné est décrit par une fonction d'onde  $\psi$  à quatre composantes satisfaisant à l'équation

$$\left[ \left( -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{e}{c} A_0 \right) + \vec{\alpha} \left( \frac{\hbar}{2\pi i} \text{grad} + \frac{e}{c} \vec{A} \right) + \beta mc \right] \psi = 0 \quad (1)$$



où les composantes du vecteur  $\vec{\alpha}$  ainsi que  $\beta$  sont les matrices

$$\alpha_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\alpha_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$e$  représente la valeur absolue de la charge de l'électron. De même l'équation d'onde d'un positron peut s'écrire :

$$\left[ \left( -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - eA_0 \right) + \vec{\alpha} \left( \frac{\hbar}{2\pi i} \text{grad} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) + \beta mc \right] \varphi = 0 \quad (2)$$

Vis-à-vis du groupe de la relativité restreinte, les équations (1) et (2) sont invariantes de forme, tandis que les composantes de chacune des fonctions d'onde  $\psi$  et  $\varphi$  se transforment linéairement entre elles comme celles d'un spineur d'espace-temps.

On trouvera dans le tableau II (colonne réservée au cas de l'énergie positive) les opérateurs représentant les principales grandeurs mécaniques ainsi que les densités de probabilité et de courant de probabilité, qui forment un vecteur d'espace-temps, des densités de charge et de courant électriques, qui jouissent de la même propriété, et des densités de moments magnétique et électrique qui forment un tenseur antisymétrique du second ordre. Les composantes du vecteur  $\vec{\sigma} = -\frac{i}{2} [\vec{\alpha}, \vec{\alpha}]$  sont les matrices de spin :

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\mu = eh/4\pi mc$  est le magnétron de Bohr.

## 2. Les états d'énergie négative.

Les fonctions propres représentant les états stationnaires de l'électron de Dirac sont de la forme  $\psi = u(x, y, z) \cdot e^{-\frac{2\pi i}{h} \omega t}$  où  $\omega$  représente l'énergie totale de l'électron. Il est bien connu que l'équation de Dirac admet également des solutions de la forme  $\psi = u(x, y, z) \cdot e^{+\frac{2\pi i}{h} \omega t}$ , correspondant à une valeur propre négative,  $-\omega$ , de l'opérateur  $cp_0$ . Si l'on admet que ces solutions représentent un électron, celui-ci se trouve dans un état d'énergie négative.

Pour arriver à une interprétation physique de l'existence de ces états d'énergie négative, Dirac a supposé que l'espace vide est caractérisé par le fait que tous ceux-ci sont occupés par des électrons inobservables (électrons virtuels). S'il existe un électron observable dans cet espace, il occupera donc nécessairement un état d'énergie positive. D'autre part, si l'un des états d'énergie négative est inoccupé, la lacune se comporte comme un électron dont la charge, l'énergie, l'impulsion, le moment cinétique et le moment magnétique sont de signe opposé aux grandeurs correspondantes se rapportant à l'état d'énergie négative considéré. La lacune représente donc un positron.

Sous l'influence d'un champ électromagnétique, un électron d'énergie négative peut effectuer une transition vers un état d'énergie positive. On verra alors apparaître simultanément et au même endroit un électron et un positron: c'est la création d'une paire par matérialisation d'énergie électromagnétique. Le phénomène inverse ou annihilation se produit lorsqu'un électron d'énergie positive tombe dans une lacune en émettant un rayonnement électromagnétique.

Toutefois la théorie des lacunes soulève de nombreuses difficultés. Notamment elle nécessite l'emploi d'un nombre infini de particules (virtuelles), même lorsqu'il s'agit de représenter le vide ou un système constitué d'une ou de deux particules. Cependant nous allons montrer qu'on peut éviter dans une certaine mesure ce dernier inconvénient en rattachant de façon directe les états d'énergie négative au positron.

Nous entendrons par spineur conjugué de  $\psi$  l'expression  $C\psi^*$  où  $C$  est la matrice

$$C = i\alpha_y\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

qui jouit des propriétés suivantes:

$$C^{-1} = C ; \quad C\vec{\alpha}^*C = \vec{\alpha} ; \quad C\beta C = -\beta \quad (4)$$

En tenant compte de ces relations, la conjuguée complexe de l'équation de Dirac (1) peut s'écrire

$$C \left[ \left( -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{e}{c} A_0 \right) + \vec{\alpha}^* \left( \frac{\hbar}{2\pi i} \text{grad} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) - \beta mc \right] C \psi^* = 0$$

ou encore

$$\left[ \left( -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{e}{c} A_0 \right) + \vec{\alpha} \left( \frac{\hbar}{2\pi i} \text{grad} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) + \beta mc \right] C \psi^* = 0$$

On retrouve donc l'équation (2) avec  $\varphi = C\psi^*$ . On voit que l'on passe de l'équation (1) à l'équation (2) et réciproquement, en posant:

$$\varphi = C\psi^* ; \quad \psi = C\varphi^* \quad (5)$$

Cette transformation fait donc correspondre les états d'énergie négative de chacune de ces équations aux états d'énergie positive de l'autre. On peut donc dire que les fonctions d'onde à énergie négative  $\psi$  et  $\varphi$  représentent respectivement le positron et l'électron. Ainsi une particule de Dirac est susceptible d'être représentée de deux façons mathématiquement équivalentes soit par le spineur  $\psi$ , soit par le spineur conjugué  $\varphi$ . La signification de  $\psi$  et  $\varphi$  dans chaque cas est donnée par le tableau suivant:

TABLEAU I.

	Energie positive	Energie négative
Electron	$\psi$	$\varphi$
Positron	$\varphi$	$\psi$

D'autre part, si un opérateur  $F$  correspond à une certaine grandeur physique dans l'une des deux représentations, l'opérateur

$$G = C.F*.C \quad (6)$$

représente la même grandeur dans la représentation conjuguée. En effet, on voit aisément que l'on a

$$(\psi_k^* F \psi_i)^* = \varphi_k^* G \varphi_i \quad (7)$$

TABLEAU II.

Opérateurs	Energie positive		Energie négative	
Energie	$p_0 = -\frac{h}{2\pi i} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}$		$p_0^* = \frac{h}{2\pi i} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}$	
Impulsion	$\vec{p} = \frac{h}{2\pi i} \text{grad}$		$\vec{p}^* = -\frac{h}{2\pi i} \text{grad}$	
Moment cinétique	$\vec{J} = [\vec{r}, \vec{p}] + \frac{1}{2} \frac{h}{2\pi} \vec{\sigma}$		$J_- = [\vec{r}, \vec{p}^*] - \frac{1}{2} \frac{h}{2\pi} \vec{\sigma}$	
Spin	$\vec{\sigma}$		$-\vec{\sigma}$	
Vitesse	$-c \vec{\alpha}$		$-c \vec{\alpha}$	
Densités de	Electron	Positron	Electron	Positron
Probabilité	$\psi_k^* \psi_i$	$\varphi_k^* \varphi_i$	$\varphi_k^* \varphi_i$	$\psi_k^* \psi_i$
Courant de probabilité	$-\psi_k^* c \vec{\alpha} \psi_i$	$-\varphi_k^* c \vec{\alpha} \varphi_i$	$-\varphi_k^* c \alpha \varphi_i$	$-\psi_k^* c \alpha \psi_i$
Charge électrique	$-e \psi_k^* \psi_i$	$+e \varphi_k^* \varphi_i$	$-e \varphi_k^* \varphi_i$	$+e \psi_k^* \psi_i$
Courant électrique	$+e \psi_k^* \vec{\alpha} \psi_i$	$-e \varphi_k^* \vec{\alpha} \varphi_i$	$+e \varphi_k^* \vec{\alpha} \varphi_i$	$-e \psi_k^* \vec{\alpha} \psi_i$
Moment magnétique	$+ \mu \psi_k^* \vec{\sigma} \beta \psi_i$	$- \mu \varphi_k^* \vec{\sigma} \beta \varphi_i$	$+ \mu \varphi_k^* \vec{\sigma} \beta \varphi_i$	$- \mu \psi_k^* \vec{\sigma} \beta \psi_i$
Moment électrique	$- \mu \psi_k^* i \vec{\alpha} \beta \psi_i$	$+ \mu \varphi_k^* i \alpha \beta \varphi_i$	$- \mu \varphi_k^* i \vec{\alpha} \beta \varphi_i$	$+ \mu \psi_k^* i \vec{\alpha} \beta \psi_i$

Cette relation permet de définir les opérateurs relatifs aux états d'énergie négative à partir de ceux qui ont été adoptés pour les états d'énergie positive. Les résultats de cette transformation, inscrits dans le tableau ci-après, sont en parfait accord avec la théorie des lacunes, ainsi qu'on peut le vérifier.

De plus les éléments de matrice de  $F$  et de  $G$  sont conjugués complexes l'un de l'autre.  $F_{ki} = G_{ki}^* = G_{ik}$ . Par conséquent si l'on appliquait aux états d'énergie négative le même langage que pour les états d'énergie positive, ainsi que le fait la théorie des lacunes, on trouverait qu'à une transition ( $i \rightarrow k$ ) entre états d'énergie positive, correspond une transition inverse ( $k \rightarrow i$ ) entre états d'énergie négative. Cette conclusion correspond au fait que si un électron d'énergie négative fait une transition ( $k \rightarrow i$ ), la lacune, c'est-à-dire le positron, effectue la transition ( $i \rightarrow k$ ).

La transformation  $C$  permet donc d'éviter le paradoxe des énergies négatives sans avoir recours à la théorie des lacunes. D'ailleurs l'utilisation de l'opérateur  $cp_0$  montre que l'énergie de ces états est en réalité une quantité positive.

L'emploi des spineurs conjugués permet ainsi de représenter l'électron et le positron par des ondes à énergies de même signe. Cette représentation aura le grand avantage de nous permettre d'étudier, en première approximation, le système formé par un électron et un positron comme un problème de Schrödinger (ou de Pauli).

Cependant il n'est pas possible, dans un même problème, de faire correspondre deux opérateurs différents à une seule grandeur physique. Cette éventualité ne se présentera jamais tant que l'on pourra représenter l'électron (ou le positron) soit par le spineur  $\psi$ , soit par le spineur  $\varphi$ . Au contraire, il semblerait qu'on ne puisse l'éviter si l'on est obligé de considérer des transitions entre états d'énergies positive et négative. Toutefois, comme il y a alors création ou annihilation de paires, on n'a plus affaire au problème d'un seul corps. Ce cas sera étudié ultérieurement.

Il est important de remarquer que l'ensemble des fonctions propres  $\psi$  (resp.  $\varphi$ ) à énergies positive et négative, forment un

système orthogonal complet. Par suite les fonctions d'ondes  $\psi$  à énergie positive ne forment pas à elles seules un tel système.

### 3. *L'emploi de l'électrodynamique classique en mécanique ondulatoire.*

En principe, la description du mouvement d'un système de particules est intimement liée à celle de son champ. Toutefois, il est généralement possible, en raison de la petitesse de la force de freinage due au rayonnement vis-à-vis de la force d'inertie, de considérer comme indépendants les deux problèmes suivants :

- 1° Rechercher l'influence d'un champ extérieur sur le mouvement d'une particule.
- 2° Déterminer le champ produit par une particule en mouvement.

Le premier problème repose essentiellement sur le choix des termes d'interaction introduits dans l'hamiltonien pour tenir compte de l'action d'un champ extérieur sur une particule. Dans les théories de Schrödinger, de Pauli et de Dirac, ainsi qu'en électrodynamique quantique, ceux-ci sont tirés directement de la dynamique classique, les grandeurs cinématiques classiques ayant été remplacées par des opérateurs. Ceci peut être considéré comme une première application du principe de correspondance de Bohr. Ainsi le terme d'interaction de Dirac

$$e \left\{ A_0(\vec{r}_1) + \vec{\alpha} \cdot \vec{A}(\vec{r}_1) \right\}$$

correspond au terme classique

$$e \left\{ A_0(\vec{r}_1) - \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{A}(\vec{r}_1) \right\}$$

intervenant dans l'expression suivante de l'énergie

$$c p_0 = e A_0 + \vec{v} \cdot \left( \vec{p} - e \frac{\vec{A}}{c} \right) + \sqrt{1 - \beta^2} m c^2 .$$

En effet l'opérateur  $c\alpha$  représente la vitesse de l'électron. Celle-ci constitue toutefois une notion plus complexe que celle de la mécanique classique. En effet, si l'on représente le mouvement d'un électron en translation uniforme par celui d'un paquet d'ondes, on trouve que ce dernier est animé d'une vitesse de translation égale à la vitesse classique  $cp/p_0$  de la particule et d'une vitesse de rotation en rapport étroit avec le magnétisme propre de l'électron <sup>1</sup>.

La solution du second problème est fournie par l'électrodynamique quantique, grâce à l'emploi judicieux des termes d'interaction introduits à l'occasion du premier problème (cf. électrodynamique classique, § 1, 5). Mais avant que cette théorie ne fut développée, on avait déjà pu le résoudre jusqu'à un certain point en appliquant l'électrodynamique classique et en faisant un nouvel appel au principe de correspondance. Pour ce faire, on suppose que le champ moyen <sup>2</sup> produit par l'électron obéit aux équations de Maxwell dans lesquelles on remplace les densités de charge et de courant électrique par leurs valeurs probables. Ceci permet de calculer le champ statique moyen produit par un électron dans un état stationnaire. D'autre part les probabilités de transition entre deux états  $i$  et  $k$  et la nature du rayonnement émis peuvent être obtenus en considérant les densités de charge et de courant de transition,  $-e\psi_k^*\psi_i$  et  $e\psi_k^*\vec{\alpha}\psi_i$ , et en admettant que l'intensité et la polarisation de la radiation déterminées classiquement sont égales aux valeurs probables des grandeurs quantiques correspondantes <sup>3</sup>. Montrons maintenant quelle est, suivant les considérations précédentes, la structure du champ propre de l'électron de Dirac. A cette fin, il est utile de décomposer de la façon suivante les densités de charge et de courant électriques relatives à une transition  $i \rightarrow k$  :

<sup>1</sup> L. DE BROGLIE, *L'électron magnétique*.

<sup>2</sup> La moyenne se rapporte ici aux différentes positions de la particule. Elle n'a aucun rapport avec celle envisagée plus loin (Cf. fin du I, § 4, 2) qui a trait aux fluctuations essentielles du champ.

<sup>3</sup> O. KLEIN, *Zeit für Physik*, 41, 407 (1929).

$$\begin{aligned}
-e\psi_k^*\psi_i &= -e\frac{1}{2}\left(\psi_i\beta\frac{p_0}{mc}\psi_k^* - \psi_k^*\beta\frac{p_0}{mc}\psi_i\right) + \frac{eA_0}{mc}e(\psi_k^*\beta\psi_i) \\
&\quad + \operatorname{div}\mu(\psi_k^*i\vec{\alpha}\beta\psi_i) \\
e\psi_k^*\vec{\alpha}\psi_i &= -e\frac{1}{2}\left(\psi_i\beta\frac{\vec{p}}{mc}\psi_k^* - \psi_k^*\beta\frac{\vec{p}}{mc}\psi_i\right) + \frac{e\vec{A}}{mc}e(\psi_k^*\beta\psi_i) + \\
&\quad + \operatorname{rot}\mu(\psi_k^*\vec{\sigma}\beta\psi_i) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mu(\psi_k^*i\vec{\alpha}\beta\psi_i)
\end{aligned} \tag{8}$$

Ces relations, qui se déduisent directement de l'équation de Dirac, sont à comparer aux formules classiques

$$\begin{aligned}
\rho_{\text{tot}} &= \rho & - \operatorname{div}\vec{\mathcal{E}} \\
\left(\rho\frac{\vec{v}}{c}\right)_{\text{tot}} &= \rho\frac{\vec{v}}{c} + \operatorname{rot}\vec{\mathcal{M}} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{\mathcal{E}}}{\partial t}
\end{aligned} \tag{9}$$

qui indiquent que le champ produit par un milieu présentant des densités de charge  $\rho$ , de courant  $\rho\frac{\vec{v}}{c}$  et de moments magnétique et électrique  $\vec{\mathcal{M}}$  et  $\vec{\mathcal{E}}$  est le même que celui que crée une répartition de charges et de courants totaux équivalents de densités  $\rho_{\text{tot}}$  et  $\left(\rho\frac{\vec{v}}{c}\right)_{\text{tot}}$ .

Supposons que  $\psi_i$  et  $\psi_k$  soient des fonctions propres à énergie positive. On voit alors que le champ moyen produit par l'électron est le même que si ce dernier était doué d'une charge  $-e$  et d'un moment magnétique  $-\mu$  donnant lieu respectivement par suite de la vitesse classique  $c\vec{p}/p_0$  de la particule à un courant de convection et à un moment électrique.

Suivant cette décomposition les densités de charge réelle et de courant de convection sont données par les expressions

$$\begin{aligned}
\rho &= e\frac{1}{2}\left(\psi_k^*\beta\frac{p_0}{mc}\psi_i - \psi_i\beta\frac{p_0}{mc}\psi_k^*\right) + \frac{eA_0}{mc^2}e(\psi_k^*\beta\psi_i) \\
&= e\frac{1}{2}\left\{\psi_k^*\beta\frac{p_0 + e\frac{A_0}{c}}{mc}\psi_i + \psi_i\beta\frac{p_0^* + e\frac{A_0}{c}}{mc}\psi_k^*\right\} \\
\rho\frac{\vec{v}}{c} &= e\frac{1}{2}\left(\psi_k^*\beta\frac{\vec{p}}{mc}\psi_i - \psi_i\beta\frac{\vec{p}}{mc}\psi_k^*\right) + \frac{e\vec{A}}{mc^2}e(\psi_k^*\beta\psi_i) \\
&= e\frac{1}{2}\left\{\psi_k^*\beta\frac{\vec{p} + e\frac{\vec{A}}{c}}{mc}\psi_i + \psi_i\beta\frac{\vec{p}^* + e\frac{\vec{A}}{c}}{mc}\psi_k^*\right\}
\end{aligned} \tag{10}$$



analogues à celles de Gordon dans la théorie relativiste d'une particule à une seule fonction d'onde; les opérateurs

$$g_0 = p_0 + e \frac{A_0}{c} ; \quad \vec{g} = \vec{p} + e \frac{\vec{A}}{c}$$

représentant l'énergie et l'impulsion mécanique (cf. § 1 (26)).

Les densités de moments magnétique et électrique

$$\vec{\mathcal{M}} = \mu (\psi_k^* \vec{\sigma} \beta \psi_i) \quad \vec{\mathcal{I}} = - \mu (\psi_k^* i \vec{\alpha} \beta \psi_i) \quad (11)$$

sont précisément celles qui sont indiquées dans le tableau II (page 267). Si les deux états  $i$  et  $j$  sont non relativistes, la densité de courant  $\text{rot } \vec{\mathcal{M}}$  est du même ordre de grandeur que celle du courant de convection tandis que les densités de charge et de courant  $-\text{div } \vec{\mathcal{I}}$  et  $\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathcal{I}}}{\partial t}$  sont respectivement d'un ordre de grandeur  $\frac{v^2}{c^2}$  fois plus petit que celui de  $\rho$  et  $\rho \frac{v}{c}$ .

Le cas où les énergies des ondes  $\psi_i$  et  $\psi_k$  sont de signes contraires correspond à des transitions d'annihilation ou de création d'une paire. Dans l'hypothèse où les deux états  $i$  et  $j$  sont non relativistes, la presque totalité des densités de charge et de courant ne provient plus des premiers termes, mais bien du dernier. Ceci est en relation avec le fait que de telles transitions correspondent à des variations importantes du moment électrique formé par les deux particules. Toutefois l'application par correspondance de l'électrodynamique classique aux problèmes d'annihilation et de création de paires serait très délicate; nous reprendrons l'étude de ces phénomènes au moyen de l'électrodynamique quantique.

(à suivre)