Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles

Band: 29 (1947)

Artikel: Un théorème concernant les suites infinies de fonctions qui deviennent nulles en moyenne sur tout intervalle

Autor: Ammann, André

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-742274

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Siehe Rechtliche Hinweise.

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. Voir Informations légales.

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. See Legal notice.

Download PDF: 04.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Séance du 19 juin 1947.

André Ammann. — *Un théorème concernant les suites infinies de fonctions qui deviennent nulles en moyenne sur tout intervalle.*

On peut dire qu'une suite infinie $F_i(x)$ de fonctions réelles devient nulle en moyenne sur l'intervalle $\alpha\beta$ si l'intégrale

$$\int_\alpha^\beta F_i(x)\,dx$$

tend vers zéro avec $\frac{1}{i}$.

Une suite de fonctions réelles mesurables qui devient nulle en moyenne sur tout intervalle ne converge pas nécessairement vers zéro. Par exemple les fonctions de la suite

$$F_i(x) = (-1)^h \quad \text{pour} \quad \frac{h-1}{i} \leqslant x < \frac{h}{i}\,, \quad h = 1 \ldots i\,,$$

qui présente cette propriété sur l'intervalle 01, restent égales à l'unité en valeur absolue. Cependant l'on a ce théorème:

Une suite infinie de fonctions mesurables réelles $F_i(x)$ *qui jouit sur le segment* $\alpha\beta$ *des propriétés suivantes:*

1° *Les fonctions* $F_i(x)$ *sont bornées dans leur ensemble.*

2° *Pour chaque* x *du segment* $\alpha\beta$ *on a*

$$\lim_{i\to\infty} (F_{i+1} - F_i) = 0\,. \tag{1}$$

3° *Pour tout segment* $\alpha'\beta'$ *intérieur à* $\alpha\beta$ *on a*

$$\lim_{i\to\infty} \int_{\alpha'}^{\beta'} F_i(x)\,dx = 0\,, \quad \text{où} \quad \alpha \leqslant \alpha' < \beta' \leqslant \beta\,, \tag{2}$$

est telle qu'on puisse associer à chaque valeur x *n'appartenant pas à un certain ensemble exceptionnel de mesure nulle une suite infinie* i_r *pour laquelle*

$$\lim_{r\to\infty} F_{i_r}(x) = 0\,.$$

La suite $F_i(x)$ en d'autres termes admet le point d'accumulation zéro pour presque tous les x de $\alpha\beta$.

Remarque: Il suffirait que l'égalité (2) fût établie pour tous les segments $\alpha'\beta'$ dont les extrémités appartiennent à un ensemble partout dense sur $\alpha\beta$.

Démonstration du théorème: Si la suite F_i n'admet pas le point d'accumulation zéro, il existe un entier n tel qu'il n'y ait sur le segment $\left(-\frac{1}{n}, +\frac{1}{n}\right)$ qu'un nombre fini de points F_i. Il existe alors un entier i_0 assez grand pour que ce segment ne contienne aucune F_i d'indice plus grand que i_0, et que pour tout $i > i_0$ on ait

$$\left| F_{i+1} - F_i \right| < \frac{1}{n} .$$

Il en résulte que la suite des points F_i, pour les valeurs de i qui dépassent i_0, reste toujours d'un même côté du segment $\left(-\frac{1}{n}, +\frac{1}{n}\right)$.

L'ensemble des x pour lesquels la suite $F_i(x)$ n'admet pas le point d'accumulation zéro peut être considéré comme la réunion d'une collection dénombrable d'ensembles, ceux qui correspondent à des valeurs fixes de i_0 et de n. Il nous suffira de démontrer que chacun de ces ensembles est de mesure nulle. Nous pourrons même nous limiter au cas où l'on a pour tous les i qui dépassent i_0:

$$F_i(x) > \frac{1}{n} .$$

En effet, les valeurs de x qui donneraient lieu à l'inégalité $F_i(x) < -\frac{1}{n}$ sont aussi celles qui pour la suite $-F_i(x)$ donneraient $-F_i(x) > \frac{1}{n}$. Comme la suite $-F_i(x)$ vérifie toutes les hypothèses faites sur F_i, nous n'aurions encore qu'à faire la réunion de deux ensembles de mesure nulle. Nous désignerons par $E(i_0, n)$, ou plus simplement par E, l'ensemble des x tels qu'on ait $F_i(x) > \frac{1}{n}$ pour tous les $i > i_0$. Cet ensemble est mesurable, puisqu'il résulte de l'intersection d'une collection dénombrable d'ensembles mesurables. Il reste à montrer que sa mesure est nulle. On peut procéder ainsi:

Une certaine proportion seulement, $\theta\,(\beta - \alpha)$, de l'intervalle $\alpha\beta$ peut présenter la circonstance qui caractérise les points de E. Cette portion est un ensemble mesurable qu'on peut enfermer « presque entièrement » dans un système fini d'intervalles. En appliquant à chacun de ceux-ci le même raisonnement, on réduit encore l'ensemble des valeurs exceptionnelles possibles de x à être au plus une partie $\theta^2\,(\beta - \alpha)$ de l'intervalle entier. On peut répéter ce raisonnement indéfiniment, ce qui conduit à enfermer les points de l'ensemble E dans un système d'intervalles dont la longueur totale est moindre que ε. Il est alors démontré que cet ensemble est de mesure nulle.

Une démonstration plus élégante de cette dernière partie nous a été très obligeamment communiquée par un mathématicien étranger à qui M. le professeur R. Wavre a eu la bonté de soumettre cet essai. Nous espérons la publier prochainement dans un travail plus étendu sur ce sujet.

Pour terminer nous voudrions encore faire remarquer que le fait de pouvoir extraire pour chaque x (hors d'un ensemble de mesure nulle) une suite F_{i_r} qui converge en ce point vers zéro, ne nous assure pas de l'existence d'une suite extraite unique prise dans la suite des fonctions F_i qui aurait zéro pour limite presque partout. Bien au contraire nous avons pu construire une suite de fonctions, à laquelle s'applique le théorème, et telle qu'il soit nécessaire d'extraire une suite F_{i_r} différente pour chaque valeur de x. C'est-à-dire que dans cet exemple aucune suite extraite ne converge vers zéro en deux points distincts.

Dans une note ultérieure nous montrerons l'application du théorème précédent à l'étude des répartitions module un.