Zeitschrift: Archives des sciences [1948-1980]

Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève

Band: 1 (1948)

Heft: 1

Artikel: Quelques observations et expériences nouvelles : et leurs conséquences pour les théories de la physique

Autor: Prunier, F.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-739256

QUELQUES OBSERVATIONS ET EXPÉRIENCES NOUVELLES

et leurs conséquences pour les théories de la physique

PAR

F. PRUNIER

(Avec 2 fig.)

DEUXIÈME PARTIE[1]

RELATIONS NOUVELLES
PREMIER ESSAI D'INTERPRÉTATION
INTERPRÉTATION HYDRODYNAMIQUE

Introduction

Des expériences, des observations et des remarques nouvelles peuvent remettre en question, sinon à proprement parler les récentes théories physiques, du moins quelques-unes de leurs bases essentielles.

Le présent travail a pour but d'en présenter d'abord un exposé d'ensemble, et d'en déduire ensuite les conséquences.

La première partie a déjà été publiée ici même[2]. Elle était consacrée à l'exposé de faits nouveaux; elle conduit directement

[1] La première partie a paru dans les *Archives des sciences physiques et naturelles*, fascicules IV et V, 1946.

[2] *Archives*, 5e période, vol. 28, fasc. 4 et 5.

à une discussion, basée sur l'expérience, de l'utilité d'un retour à l'hypothèse de l'éther, sans qu'il puisse s'agir encore d'en préciser les propriétés éventuelles. A cette première discussion, s'en ajoute une autre, théorique celle-là, dans la présente deuxième partie. A partir de la théorie des ondes et des équations de la relativité, qui, en tout état de cause, doivent être, *dans l'ensemble*, conservées, surtout en électromagnétisme, on montre l'existence de relations nouvelles en électromagnétisme, et la possibilité de construire une hydrodynamique qui semble ne pas pouvoir être autre que celle de l'hypothétique éther. Cette seconde discussion est indépendante de la première, et ses conclusions renforcent encore celles qu'il a paru nécessaire de tirer de la première partie.

Il y aura alors à formuler, dans une troisième partie, une interprétation nouvelle de la dynamique de la relativité et de la mécanique ondulatoire, en conservant le plus possible de l'appareil mathématique de ces théories, trop bien vérifié quantitativement pour qu'on puisse penser à l'abandonner dans *son ensemble.* Chemin faisant, nous suggérerons des idées d'expériences capables de renseigner de façon plus certaine sur le bien-fondé des théories et des interprétations proposées. On retrouvera dans la troisième partie des idées qui se rapprochent beaucoup de celles que M. Varcollier [1] a données sous forme d'une théorie générale de l'aberration des ondes, des vitesses et des forces, ainsi que des idées et remarques si profondes de M. G. Tiercy [2], directeur de l'Observatoire de Genève. On y utilisera aussi au chapitre X certaine idée mise en avant par M. Sivadjian [3]; les remarques de M. Croze [4] sur la valeur probante des observations et expériences concernant la dynamique de la relativité nous ont été également très utiles.

[1] *Propagation ellipsoidale, Relativité, Quanta*, Presses Universitaires, Paris, 1942.

[2] G. Tiercy, « La théorie de la relativité dite générale et les observations astronomiques », *Arch. des Sciences physiques et naturelles*, Genève, 1939.

[3] J. Sivadjian, *Revue gén. des Sciences*, *57*, 1946, 1.

[4] F. Croze, « Les preuves expérimentales des théories de la relativité », *Revue gén. des Sciences*, *37*, 1926, 394.

L'ouvrage se termine par une étude des conditions que doivent remplir une expérience ou une observation pour qu'on puisse les considérer comme mettant en cause les principes mêmes d'une mécanique quelle qu'elle soit [1].

Chapitre IV.

ETABLISSEMENT DE RELATIONS NOUVELLES EN ÉLECTROMAGNÉTISME

I. — Etude du champ d'une charge électrique à l'aide des formules de transformation de la relativité. Cas du mouvement rectiligne, accéléré ou non, d'une seule charge ou du mouvement de plusieurs charges suivant des trajectoires rectilignes parallèles.

Considérons un système d'axes $O\,x\,y\,z$ dans lequel ne règne aucun champ de force d'inertie. Supposons qu'on observe dans ce système le champ électromagnétique d'une charge électrique en mouvement quelconque uniforme ou accéléré, rectiligne ou non, par rapport à ce système. Les équations de l'électromagnétisme sont, par rapport à ce système d'axes:

$$\begin{aligned} L &= \frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z} \\ M &= \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x} \\ N &= \frac{\partial G_3}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \end{aligned} \tag{1}$$

[1] Dans notre étude du passage d'un rayon lumineux à travers la surface de séparation d'un volume d'éther supposé entraîné par la Terre et du reste de l'éther non entraîné (*Archives*, 5e période, vol. 28, fascicules 4 et 5, 1946, même titre que la présente étude, nous avions pour objet de concilier la théorie de l'entraînement de Stokes avec plusieurs autres théories, à l'aide des phénomènes pouvant se passer dans la couche de séparation. Il est donc à peine besoin de faire remarquer que l'obtention de la formule de M. Varcollier, que nous retrouvons ainsi, suppose que le rayon lumineux franchisse la couche de séparation. Nous ne retrouverions pas cette formule si le rayon était parallèle aux génératrices de la couche supposée cylindrique. D'un autre côté, après franchissement de cette couche, la vitesse du rayon pourrait redevenir c, la valeur c' n'étant nécessaire que pendant ce franchissement.

$$X = -\frac{\partial G_1}{\partial t} - \frac{\partial H}{\partial x}$$

$$Y = -\frac{\partial G_2}{\partial t} - \frac{\partial H}{\partial y} \qquad (2)$$

$$Z = -\frac{\partial G_2}{\partial t} - \frac{\partial H}{\partial z}$$

en désignant par L, M, N les composantes du vecteur magnétique, par X, Y, Z les composantes du produit par c du vecteur électrique, par G_1, G_2, G_3 les composantes du potentiel vecteur, par H le produit par c du potentiel scalaire. On peut choisir comme système cohérent d'unités, celui où G_1, G_2, G_3 serait de la dimension d'une vitesse, H, du carré d'une vitesse, L, M, N, d'un tourbillon, X, Y, Z, d'une accélération.

Nous nous proposons d'abord de montrer qu'il existe dans le champ envisagé d'autres relations, en outre, bien entendu, de l'équation dite complémentaire. Voici comment nous y parviendrons.

Etudions d'abord le cas du mouvement accéléré ou non, mais rectiligne, d'une seule charge. Supposons d'abord que l'axe $O\,x$ coïncide avec la vitesse de la charge. Dans le système où la charge part du repos à cet instant, système lui-même dénué de champ de force d'inertie, existe seulement à cet instant, et pour un temps infiniment court, un pur champ électrique.

Les formules de transformation de la relativité montrent que dans le système $O\,x\,y\,z$ existe un champ électromagnétique complet dont le potentiel vecteur G_1 est dirigé suivant $O\,x$ et dont le vecteur magnétique est situé dans le plan $z\,O\,y$.

Si, au lieu de la disposition spéciale qu'on vient d'envisager des axes du système $O\,x\,y\,z$, nous revenons à une disposition quelconque, mais invariablement liée à cette disposition spéciale, la perpendicularité du vecteur magnétique et du potentiel vecteur demeure évidemment exacte, et elle s'exprime par la formule:

$$LG_1 + MG_2 + NG_3 = 0 \ .$$

Supposons maintenant un second système $O'\,x'\,y'\,z'$ animé par rapport au système $O\,x\,y\,z$ d'une vitesse uniforme v, les axes $O\,x$ et $O'\,x'$ coïncidant. L'observateur O' voit aussi le mouvement de la charge comme un mouvement accéléré ou uniforme, mais rectiligne.

On montrerait d'une manière tout à fait analogue à celle qui vient d'être employée que, dans son système, existe la relation:

$$L'G'_1 + M'G'_2 + N'G'_3 = 0$$

entre le vecteur magnétique et le potentiel vecteur.

Cette loi se conserve donc lors du passage du système $O\,x\,y\,z$ au système $O'\,x'\,y'\,z'$ en translation uniforme de vitesse v par rapport à lui conformément d'ailleurs au principe de la relativité.

Effectuons maintenant le passage direct du premier système au second, à l'aide des formules de transformation de la relativité pour le vecteur magnétique et pour le potentiel vecteur.

Dans le second système la relation s'écrit, α désignant le facteur de Lorentz

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,,$$

$$\frac{1}{\alpha} L' \left(G'_1 - \frac{v}{c}\frac{H'}{c}\right) + \frac{1}{\alpha}\left(M' + \frac{v}{c}\frac{Z'}{c}\right) G'_2$$
$$+ \frac{1}{\alpha}\left(N' - \frac{v}{c}\frac{Y'}{c}\right) G'_3 = 0\,,$$

ou

$$L'G'_1 + M'G'_2 + N'G'_3 - \frac{v}{c^2}\left(L'H' - Z'G'_2 + Y'G'_3\right) = 0\,.$$

La relation envisagée ne peut conserver sa forme que si l'on a:

$$L'H' - Z'G'_2 + Y'G'_3 = 0\,.$$

Et inversement, en repassant au premier système, le maintien de la relation nécessitera:

$$LH = ZG_2 - YG_2\,. \tag{3}$$

Il y aura, bien entendu, deux autres relations analogues qu'on mettra en évidence de la même façon:

$$\left.\begin{aligned} MH &= XG_3 - ZG_1 \\ NH &= YG_1 - XG_2 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Ces relations se maintiennent évidemment si l'on introduit à la place de H, X, Y, Z, le potentiel scalaire lui-même et les composantes du vecteur électrique.

Ceci montre d'abord qu'il existe dans le champ électromagnétique de la charge en mouvement rectiligne, accéléré ou non, des relations très générales en outre de celles qu'on donne ordinairement, et ce point nous paraît, à lui seul, très important. C'est une réponse à une question que se posait Bjerkness qui se demandait s'il n'existait pas dans le champ électromagnétique une relation vectorielle nouvelle: cette relation lui manquait pour identifier les grandeurs électro-magnétiques avec des grandeurs hydro-dynamiques.

La transformation opérée, pour passer du système O, x, y, z au système O$'$, x', y', z' n'a eu pour but que de permettre la mise en évidence de relations existant dans chacun de ces systèmes sans inertie, mais l'un et l'autre quelconques par rapport au mouvement considéré de la charge.

D'ailleurs cette opération est basée seulement sur l'existence dans chacun de ces systèmes de la relation de perpendicularité du potentiel vecteur et du vecteur magnétique. Les relations supplémentaires trouvées ont donc lieu pour les systèmes sans champ de force d'inertie, non seulement dans le cas du champ produit par un mouvement rectiligne accéléré d'une charge électrique, mais aussi dans le cas de tout champ admettant la relation de perpendicularité en question, notamment dans le cas de plusieurs charges décrivant des trajectoires rectilignes parallèles.

Dans un système où règnerait un champ de force d'inertie ou de gravitation, il existerait évidemment d'autres relations dont les relations (3) qui viennent d'être indiquées sont une forme dégénérée.

Si l'on décompose en chaque point le vecteur X Y Z en deux parties dont l'une X_1 Y_1 Z_1 sera parallèle au potentiel vecteur, c'est-à-dire dirigée suivant le mouvement de la charge, et dont l'autre $X - X_1$, $Y - Y_1$, $Z - Z_1$ sera perpendiculaire à ce potentiel vecteur on trouvera les trois autres relations suivantes:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{V^2}(X - X_1)\,H = M\,G_3 - N\,G_2\\
&\frac{1}{V^2}(Y - Y_1)\,H = N\,G_1 - L\,G_3 \qquad\qquad (3\ bis)\\
&\frac{1}{V^2}(Z - Z_1)\,H = L\,G_2 - M\,G_1
\end{aligned}
$$

avec $V = \frac{c^2}{v_0}$, v_0 désignant la vitesse de la charge dans le système d'observation.

Si l'on emploie le potentiel scalaire et le vecteur électrique et non plus leur produit par c, le facteur $\frac{1}{V^2}$ est remplacé par $\frac{c^2}{V^2}$.

On vérifie en effet facilement tout d'abord que, si l'on prend comme axe des x la direction du mouvement, on a les deux relations:

$$
\begin{aligned}
&\frac{v_0^2}{c^4}(Y - Y_1)\,H = N\,G_1\,,\\
&\frac{v_0^2}{c^4}(Z - Z_1)\,H = M\,G_1\,.
\end{aligned}
$$

(Y_1 et Z_1 sont d'ailleurs ici nuls.)

Car il suffit de repasser au système dans lequel la charge est au repos pour trouver des identités. Dès lors, avec une disposition quelconque des axes on a bien les formules (3 *bis*). Mais en général, comme elles font intervenir v_0, elles ne s'appliqueront qu'au mouvement d'une seule charge.

II. Obtention d'équations nouvelles.

Nous nous proposons maintenant d'écrire sous une nouvelle forme les équations (3), dans le cas du mouvement rectiligne accéléré d'une seule charge. A cet effet, nous allons d'abord chercher à déterminer deux fonctions U (x, y, z, t) et φ (x, y, z, t) telles que l'on ait:

$$
\left.
\begin{aligned}
LU &= G_2\frac{\partial\varphi}{\partial z} - G_3\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,,\\
MU &= G_3\frac{\partial\varphi}{\partial x} - G_1\frac{\partial\varphi}{\partial z}\,,\\
NU &= G_1\frac{\partial\varphi}{\partial y} - G_2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,.
\end{aligned}
\right\} \qquad (3')
$$

Ces équations ne sont pas indépendantes, car on vérifie l'identité

$$L\,G_1 + M\,G_2 + N\,G_2 = 0\ .$$

Choisissons à nouveau, pour simplifier le calcul, un système d'axes rectangulaires dans lequel l'axe des x coïncidera avec la vitesse de la charge en mouvement. La première équation (3) sera vérifiée identiquement , les deux membres étant nuls. On aura en effet:

$$L = G^2 = G_3 = 0\ .$$

Les deux autres équations s'écriront:

$$\begin{aligned} M\,H &= -Z\,G_1\ , \\ N\,H &= Y\,G_1\ . \end{aligned}$$

Les deux fonctions U (x, y, z, t) et $\varphi\ (x, y, z, t)$ seront telles que l'on ait:

$$\left.\begin{aligned} M\,U &= -\,G_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ N\,U &= G_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{aligned}\right\} \qquad (3'')$$

On peut substituer au système (3″) le système constitué par l'une des équations (3″) et par l'équation suivante qui se déduit également de (3″):

$$M \frac{\partial \varphi}{\partial y} + M \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0\ .$$

Cette équation donne une fonction $\varphi\ (x, y, z, t)$ dépendant d'une fonction arbitraire d'une variable, cette fonction arbitraire pouvant contenir aussi la variable x, qui joue ici le rôle d'une constante, et aussi le temps. L'une ou l'autre des équations (3″) donne alors une valeur de U dépendant aussi d'une fonction arbitraire d'une variable, cette fonction pouvant contenir x et t.

Quelle est la variable autre que x entrant ainsi dans la fonction arbitraire ? Par raison de symétrie, on peut prendre pour cette variable dans le cas de la charge unique considérée, comme d'ailleurs en tout cas où existerait cette symétrie, la distance:

$$r = \sqrt{y^2 + z^2}$$

d'un point à l'axe des x coïncidant avec le vecteur vitesse de la charge.

Pour la même raison de symétrie, le potentiel scalaire dépendra de x et r et sera H (x, r, t); le potentiel vecteur sera G_1 (x, r, t).

La fonction U étant, d'après ce qui vient d'être dit, frappée d'une certaine indétermination, on pourra pour la déterminer chercher à lui imposer, en outre, de satisfaire à la relation supplémentaire:

$$H(x, r, t) = [G_1(x, r, t)]^2 - U . \qquad (4')$$

D'après cela U ne devrait dépendre, en plus de x et de t, que de r. On peut voir sur les équations (3″) que ceci est possible,

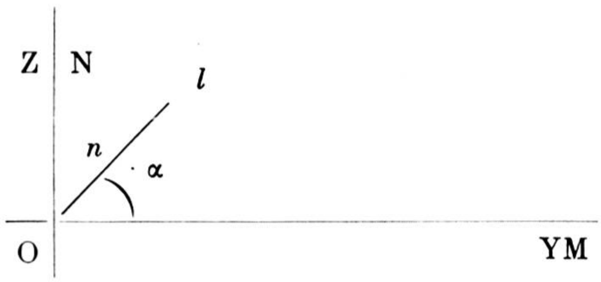

Fig. 1.
Force magnétique au point de coordonnées (r, a).

et que φ peut lui-même ne dépendre que de r (en plus de x et de t).

Supposons, en effet, qu'il en soit ainsi, et considérons l'équation:

$$M \frac{\partial \varphi}{\partial y} + N \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 .$$

Si l est le vecteur magnétique au point de coordonnées (r, α) (fig. 1), on a:

$$M = l \sin \alpha$$

$$N = -l \cos \alpha .$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial r}\frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cos \alpha$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial z}\frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \sin \alpha$$

d'où résulte que l'équation en question est identiquement vérifiée quelle que soit la fonction $\varphi\ (r, x)$.

Alors l'une ou l'autre des deux équations (3″) donne une valeur de dépendant de la fonction U (x, r, t) qui peut être complètement arbitraire en x, r et t.

Il est donc possible d'imposer à la fonction U la condition supplémentaire (4′).

Revenons à notre système d'axes quelconques invariablement lié au système qui vient de servir au calcul. Bien entendu, nous retrouverons les équations (3′) et l'équation (4′) s'écrira:

$$\begin{aligned} H\ (x, y, z, t) &= G_1^2\ (x, y, z, t) + G_2^2\ (x, y, z, t) + G_3^2\ (x, y, z, t) \\ &\quad - U\ (x, y, z, t)\ , \end{aligned} \tag{4}$$

ou, avec une nouvelle fonction V_1:

$$H = \frac{1}{2}\left(G_1^2 + G^2_{.} + G_3^3\right) + V_1 .$$

Tenons compte de cette équation (4) et ajoutons membre à membre chacune des équations (3′) à l'équation correspondante (3). Nous trouvons:

$$L\ \left(G_1^2 + G_2^2 + G_3^2\right) = G_2\left(Z + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) - G_3\left(Y + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)$$

$$M\ \left(G_1^2 + G_2^2 + G_3^2\right) = G_3\left(X + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) - G_1\left(Z + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)$$

$$N\ \left(G_1^2 + G_2^2 + G_3^2\right) = G_1\left(Y + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) - G_2\left(X + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)$$

Si nous résolvons ces trois équations en X, Y, Z, en tenant compte de la condition de perpendicularité du potentiel vecteur et du vecteur magnétique, ce qui permet, par exemple, à la fois $G_1 = G_2 = N = 0$, nous trouvons:

$$\begin{aligned} X &= M\,G_3 - N\,G_2 - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ Y &= N\,G_1 - L\,G_3 - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ Z &= L\,G_2 - M\,G_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{aligned} \tag{5}$$

III. — Autre méthode plus directe d'obtenir les équations (5), valable aussi dans le cas de plusieurs charges décrivant des trajectoires rectilignes parallèles. — Passage à des équations de type hydrodynamique. — On peut noter à titre de vérification, que si on applique ces équations au cas d'un mouvement rectiligne, accéléré ou non, de la charge, l'axe des x étant dirigé suivant la vitesse, on peut retrouver à partir d'elles l'une des équations de Maxwell. On a en effet:

$$Y = N G_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \qquad Z = - M G_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

d'où

$$\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = N \frac{\partial G_1}{\partial z} + M \frac{\partial G_1}{\partial y} + G_1 \frac{\partial M}{\partial y} + G_1 \frac{\partial N}{\partial z}$$
$$= NM - NM = 0 ,$$

puisque

$$\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0$$

(divergence nulle du vecteur magnétique).

Inversement, si nous posons $Y = N G_1 - \frac{\partial \varphi}{y \partial}$ et $Z = - M G_1 - \frac{\partial \psi}{\partial z}$, φ et ψ étant déterminés par ces égalités mêmes, l'équation de Maxwell montre que l'on a: $\varphi = \psi$ à une constante près [1].

[1] Voici le détail du calcul. On doit avoir $\frac{\partial^2 (\varphi - \psi)}{\partial y \partial z} = 0$, c'est-à-dire: $\varphi = \varphi + f_1(y) + f_2(z)$. Mais si l'on fait une rotation des axes oy et oz dans leur plan, on trouvera de nouvelles fonctions φ' et φ' telles que:

$$\varphi' = \psi' + g_1(y') + g_2(z') .$$

L'expression $f_1(y) + f_2(z)$ deviendra dans cette transformation linéaire $g_1(y') + g_2(z')$. Cela n'est possible que si $f_1(y) + f_2(z)$ est de la forme: $ay + bz + c$, a, b, c étant des constantes.

Dès lors:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y} + a , \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial z} + b .$$

Les équations initiales sont alors par exemple: $Y = - NG_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ $z = MG_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial z} + b$. Par raison de symétrie, il faut $b = 0$. De même $a = 0$. On pourra également opérer ainsi dans l'onde sinusoïdale simple.

L'équation vectorielle dont les deux composantes sont les deux équations donnant Y et Z donne, avec une disposition quelconque des axes, les équations (5).

Si nous combinons maintenant ces équations (5) et les équations (2), nous obtenons, en posant $H_1 = H - \varphi$:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial G_1}{\partial t} + M G_3 - N G_2 + \frac{\partial H_1}{\partial x} = 0 , \\ &\frac{\partial G_2}{t} + N G_1 - L G_3 + \frac{\partial H_1}{\partial y} = 0 \\ &\frac{\partial G_3}{\partial t} + L G_2 - M G_1 + \frac{\partial H_1}{\partial z} = 0 . \end{aligned} \tag{6}$$

Ces équations (6) sont exactement, avec les équations (1), les équations de l'hydrodynamique d'un fluide dont la vitesse en chaque point serait G_1, G_2, G_3, le double du tourbillon L, M, N, la charge hydraulique H_1, quand il y a potentiel des forces appliquées. La vitesse de ce fluide serait, en tous ses points, parallèle à une même direction, celle du mouvement rectiligne des charges.

Les équations (3 *bis*) nous auraient conduit d'ailleurs immédiatement à 3 équations de la forme:

$$\frac{\partial G_1}{\partial t} + M G_3 - N G_2 + \frac{H X_1}{V^2} + \frac{\partial H}{\partial x} + \left(1 - \frac{H}{V^2}\right) X = 0 .$$

Ce seraient là des équations hydrodynamiques aussi, mais l'existence d'un potentiel des forces appliquées n'y est plus mise en évidence.

Les résultats exprimés par les formules 3, 3 *bis*, 5, 6, s'appliquent à des cas déjà assez généraux. Nous allons maintenant montrer comment on peut, en utilisant l'équation des ondes, leur donner une très grande généralité.

IV. — Obtention des équations (3) et (3 *bis*) au moyen de la théorie des ondes. Résultats généraux.

Il est possible, grâce à l'équation des ondes, d'établir directement les équations (3) et (3 *bis*) sans autre hypothèse. Soit:

$$\Phi\,(x, y, z, t) = 0 ,$$

l'équation du front de l'onde, de vitesse c, par exemple, supposée écrite de manière que les dérivées partielles:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

soient, au point considéré, des cosinus directeurs α, β, γ de la normale à cette surface; la vitesse de propagation c de l'onde pourra alors être représentée par $-\frac{\partial \Phi}{\partial t}$.

C'est un résultat classique de la théorie des ondes que les quantités X, Y, Z, L, M, N, G_1, G_2, G_3, H, satisfaisant à l'équation des ondes, ont pour partie principale, à un instant infiniment peu postérieur au passage de l'onde, respectivement:

$$\frac{1}{2} X_0 \Phi^2, \quad \frac{1}{2} Y_0 \Phi^2, \text{ etc. };$$

X_0, Y_0, etc., étant des vecteurs déterminés, et Φ représentant la valeur prise, au point et à l'instant considérés, par la fonction figurant au premier membre de l'équation du front de l'onde. Les parties principales des dérivées sont de la forme suivante:

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \alpha \Phi X_0, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \gamma \Phi Y_0, \quad \frac{\partial G_1}{\partial y} = \beta \Phi G_0, \quad \frac{\partial M}{\partial t} = -c \Phi M_0, \text{etc.}$$

Si l'on porte les valeurs ci-dessus de la force magnétique et du potentiel vecteur dans les équations (1) de définition de cette force en fonction de ce potentiel, on trouve:

$$\frac{1}{2} L_0 \Phi = \beta G_{03} - G_{02}, \quad \frac{1}{2} M_0 \Phi = \gamma G_{01} - \alpha G_{02},$$
$$\frac{1}{2} N_0 \Phi = \alpha G_{02} - \beta G_{01}.$$

On en déduit facilement que le vecteur magnétique est tangent au front de l'onde; mais on en déduit aussi la perpendicularité du vecteur magnétique et du potentiel vecteur. Dès lors on peut, comme plus haut, retrouver les équations (3). D'ailleurs, Φ étant très petit, le vecteur g_0 (G_{01}, G_{02}, G_{03}) est très près d'être normal au front de l'onde.

Nous allons voir qu'on peut aussi, d'une autre manière, retrouver les équations (3) et (3 *bis*) par l'intermédiaire des équations de Maxwell [1]. En effet, si l'on porte dans celles-ci, supposées écrites pour l'espace vide, par exemple, les valeurs trouvées plus haut des dérivées des vecteurs électrique et magnétique, on obtient, après division par Φ, les deux groupes d'équations suivants:

$$\begin{aligned} c\,L_0 &= \beta Z_0 - \gamma Y_0 & \qquad \frac{1}{c} X_0 &= \gamma M_0 - \beta N_0 \\ c\,M_0 &= \gamma X_0 - \alpha Z_0 & \qquad \frac{1}{c} Y_0 &= \alpha N_0 - \gamma L_0 \\ c\,N_0 &= \alpha Y_0 - \beta X_0 & \qquad \frac{1}{c} Z_0 &= \beta L_0 - \alpha M_0 . \end{aligned}$$

Et d'autre part, en opérant de la même manière sur les équations (2) de définition de la force électrique en fonction du potentiel vecteur et du potentiel scalaire, nous trouvons:

$$\frac{1}{2} X_0 \Phi = c\,G_{01} - \alpha H_0$$

et deux équations analogues.

Nous en tirons, Φ étant extrêmement petit:

$$c = \frac{\alpha H_0}{G_{01}} = \frac{\beta H_0}{G_{02}} = \frac{\gamma H_0}{G_{03}} = \frac{H_0}{g_0} .$$

L'équation complémentaire:

$$\frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y} + \frac{\partial G_3}{\partial z} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial H}{\partial t}$$

donnerait aussi le même résultat:

$$\frac{H_0}{c} = \alpha G_{01} + \beta G_{02} + \gamma G_{02}$$

[1] F. Prunier, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 3 avril, 1933.

Et cette valeur de c étant reportée dans les équations ci-dessus, nous trouvons les deux groupes suivants:

$$L_0 H_0 = G_{02} Z_0 - G_{03} Y_0$$
$$\frac{1}{c^2} X_0 H_0 = M_0 G_{03} - N_0 G_{02}\ , \quad \text{etc.}$$

Si maintenant on remarque que, dans les conditions envisagées, ces équations demeurent valables, même écrites avec des lettres sans l'indice $_0$, comme on le voit en multipliant toutes les quantités qui y figurent par $\frac{1}{2}\Phi^2$ on trouve d'une part les équations (3) et, d'autre part un groupe d'équations qu'on peut écrire:

$$X = MG_3 - NG_2 + \left(1 - \frac{H}{c^2}\right) X = O\ ,$$

identifiable avec celui des équations (3 *bis*) pour $X_1 = Y_1 = Z_1 = 0$, mais plus général et, qui par report de X Y Z dans les équations (2), conduit à des équations de la forme:

$$\frac{\partial G_1}{\partial t} + MG_3 - NG_2 + \frac{\partial H}{\partial x} + \left(1 - \frac{H}{c^2}\right) X = 0\ , \qquad (7)$$

équation de l'hydrodynamique, mais où il n'y a pas en général potentiel des forces appliquées.

Nous prenons dans ce qui précède le mot onde [1] au sens de front de l'onde d'Hugoniot et les équations obtenues sont valables sur le front de l'onde. Mais on sait que c'est aussi un résultat classique que les ondes, au sens optique du mot, par exemple des ondes sinusoidales, donnent des phénomènes équivalents dès que la fréquence est assez grande. Tout se passe comme si l'on avait affaire à une suite très dense d'ondes au premier sens du mot. Et les relations ci-dessus, ainsi que les équations (7), apparaissent ainsi comme valables non seulement au voisinage du front de l'onde, mais dans tout l'espace avec une erreur insignifiante quand la fréquence est élevée. C'est là

[1] Comme nous l'avons trouvé au § I, il faudrait s'il s'agissait non d'une onde électromagnétique de vitesse c, mais d'une onde de vitesse $V = \frac{c^2}{v}$, remplacer c par V.

le résultat général que nous avions en vue. On retrouverait ces relations directement en substituant dans les équations de Maxwell, sous quelques conditions, des expressions de la forme:

$$X' = X_0 \sin \nu \Phi \ , \quad \text{etc.} \ , \qquad G_1 = G_0 \cos \nu \Phi \ , \quad \text{etc.}$$

ν désignant une fréquence supposée très grande [1].

C'est ce que nous allons vérifier plus loin (paragraphe VIII pour le cas de l'onde sinusoïdale simple).

[1] Si l'on élimine X, Y, Z entre les deux groupes donnant L H, X H, etc., on trouve trois équations de la forme:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial G_1}{\partial t} + \frac{c^2}{H} (M G_3 - N G^2) + \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \ .$$

Supposons que, dans une certaine région, H puisse être considérée comme indépendante du temps. Le groupe de trois équations dont nous venons d'écrire l'une prendrait l'aspect suivant:

$$\frac{\partial c \dfrac{G_1}{H}}{\partial t} + \frac{c M}{H} \frac{c G_3}{H} - \frac{c N}{H} \frac{c G_2}{H} - \frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \qquad (1)$$

et deux équations analogues.

Les équations de définition du vecteur magnétique en fonction du potentiel vecteur s'écriraient:

$$\frac{c}{H} (L, M, N) = \text{rot} \frac{c}{H} (G_1, G_2, G_3) \qquad (2)$$

Enfin l'équation complémentaire s'écrirait:

$$\text{div} \frac{c}{H} (G_1, G_2, G_3) = 0 \ . \qquad (3)$$

Les équations (1), (2), (3) sont exactement de la forme des équations de l'hydrodynamique d'un fluide de vitesse:

$$\frac{c G_{1, 2, 3}}{H} \ .$$

On pourrait même compléter les équations (1) par l'adjonction d'un terme grad. θ, tenant compte du fait que X Y Z ne représente pas la force électrique totale, mais seulement celle qui est située dans le front d'onde. On sait que la partie normale au front de l'onde de la

Des résultats en tous points analogues peuvent être obtenus dans le cas d'un milieu homogène et isotrope dont les propriétés électriques et magnétiques sont définies par les deux coefficients $K\mu$, constante diélectrique et perméabilité magnétique. Les calculs sont seulement un peu plus compliqués que ceux qui viennent d'être exposés par suite de la présence de $K\mu$ et de la vitesse:

$$v = \frac{c}{\sqrt{K\mu}}$$

remplaçant la vitesse c.

Mais il est encore possible d'arriver à mettre les équations de l'électro-magnétisme sous la forme (1) et (6), le potentiel vecteur représentant toujours une vitesse et le tourbillon étant représenté non plus par la force magnétique elle-même, mais par son produit par un coefficient constant.

Nous verrons plus loin une autre raison conduisant à généraliser ce résultat au cas de mouvements quelconques d'un nombre quelconque de charges.

V. — *Electro-magnétisme et hydrodynamique.* Ces équations ne seraient pas valables telles quelles dans des systèmes où règneraient des champs de force d'inertie. Elles prendraient dans ces systèmes des formes dont les cas ci-dessous sont des formes dégénérées.

Mais les équations d'hydrodynamique prendraient aussi des formes dont celle que nous avons écrite est une forme dégénérée et il est vraisemblable que la même identité se continuerait. En tout cas, nous n'avons, dans la pratique de l'électromagnétisme, affaire qu'à des systèmes qu'on peut considérer

force électrique ne se propage pas et, dans le vide, est de la forme grad. θ.

Dans ce cas, le groupe prendrait l'aspect de trois équations de la forme:

$$X = \frac{c^2}{H}(M\,G_3 - N\,G_2) + \frac{\partial(\theta + H)}{\partial x}$$

rappelant la formule de la force de Lorentz pour une charge dont la vitesse serait:

$$\frac{c\,G_{1,2,3}}{H}.$$

comme sans inertie. Nous pouvons alors, d'après ce qui vient d'être dit, énoncer pour le moment que, sinon peut-être dans le cas le plus général, tout au moins dans des cas déjà extrêmement généraux, les équations de l'électro magnétisme peuvent se présenter sous la même forme que celles de l'hydrodynamique.

De plus, l'équation complémentaire de l'électro magnétisme rappelle par sa forme l'équation complémentaire de l'hydrodynamique dite équation de continuité.

On peut se demander s'il n'y aurait pas là le moyen de réaliser, d'une manière évidemment inattendue, la fusion de l'électro magnétisme et de la gravitation (ou de la dynamique) en une même doctrine, fusion que chercherait la relativité. On pourrait peut-être dire que ce sont justement les équations (5) qui ont manqué à la relativité pour réaliser simplement cette fusion.

De nombreuses tentatives avaient été faites par Lord Kelvin et ses successeurs, en vue d'une identification hydrodynamique de l'électro magnétisme. Elles n'avaient pas conduit au but, et nous voyons maintenant pourquoi. C'est que l'identification de la vitesse avait été recherchée sur les équations de Maxwell mêmes. On obtenait alors l'identification de l'un ou l'autre des deux groupes de Maxwell à volonté, mais non pas celle de tous les deux à la fois. Et, comme le constatait Bjerkness, il manquait une relation.

VI. — *Nouvelle expression du théorème de Poynting* [1]. Considérons un phénomène électro magnétique se propageant par ondes. Nous venons de montrer qu'il existe, soit au voisinage du front de l'onde d'une manière rigoureuse, soit dans tout l'espace d'une manière très approchée, s'il s'agit d'ondes sinusoïdales de grande fréquence, deux groupes de trois relations de la forme:

$$X = \frac{1}{H}(M\,G_3 - N\,G_2)$$

$$L = \frac{1}{H}(Z\,G_2 - Y\,G_3)$$

[1] F. PRUNIER, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 10 juillet, 1933.

en changeant la notation jusqu'ici employée, et en désignant par H, X, Y, Z le potentiel scalaire et le vecteur électrique, et non plus leur produit par c. Si nous multiplions les deux premières équations du premier groupe respectivement par M et L, et que nous les retranchions membre à membre, nous trouvons facilement :

$$MX - LY = (L^2 + M^2 + N^2)\frac{G_3}{H}.$$

Nous aurions de même deux autres équations analogues.

En opérant de même sur les équations du second groupe, nous trouverions trois équations de la forme :

$$MX - LY = (X^2 + Y^2 + Z^2)\frac{G_3}{H}.$$

Ces deux groupes d'équations sont évidemment compatibles d'après ce qu'on sait des vecteurs électriques et magnétiques, situés ici dans le plan de l'onde.

On peut en déduire le groupe suivant de trois équations de la forme :

$$c(MX - LY) = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2 + Z^2 + L^2 + M^2 + N^2)\frac{cG_3}{H}.$$

Les premiers membres représentent les composantes du vecteur de Poynting, dont on obtient ainsi une expression qui paraît intéressante. Dans les seconds membres, le premier facteur $\frac{1}{2}(X^2 + \ldots + N^2)$ représente la densité de l'énergie ; le second facteur $\frac{cG_{1,2,3}}{H}$ se transforme d'un système à un autre de la relativité restreinte suivant des formules en tous points identiques aux formules de composition des vitesses. Si l'on pouvait le considérer comme représentant une vitesse (nous reviendrons sur ce point, chap. V, paragr. V), on serait bien d'accord avec la signification du vecteur radiant mesurant la quantité de mouvement produite par l'écoulement de l'énergie dans le champ électro magnétique. Un calcul analogue aurait pu être fait en employant les formules (3 *bis*) dans le cas où la force électrique n'aurait pas été perpendiculaire au potentiel vecteur. On aurait obtenu, en se bornant au cas où $V = c$, trois équations de la forme :

$$c(MX - LY) = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2 + Z^2 + L^2 + M^2 + N^2 - \\ - X_1^2 - Y_2^2 - Z_1^2)\frac{cG_3}{H}.$$

L'énergie provenant de la partie de la force électrique dirigée suivant le potentiel vecteur ne se propagerait pas ; le reste de l'énergie se propagerait avec la vitesse $\frac{cG_{1,2,3}}{H}$.

VII. — *Résumé des principaux résultats.* Dans le cas du champ électro-magnétique créé par le mouvement d'une ou plusieurs charges électriques suivant une trajectoire rectiligne, ou suivant plusieurs trajectoires rectilignes parallèles, avec la vitesse v par rapport à un certain système d'axes rectangulaires, nous avons montré qu'il existe, entre les vecteurs électrique X, Y, Z, magnétique L, M, N, le potentiel scalaire H et le potentiel vecteur G_1, G_2, G_3, les relations [1] :

$$\begin{aligned} LH &= ZG_2 - YG_3 \\ MH &= XG_3 - ZG_1 \\ NH &= YG_1 - XG_2 \\ LG_1 &+ MG_2 + NG_3 = 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

dont la dernière peut d'ailleurs se déduire des trois premières, ou, inversement, y conduire.

Les équations (3) sont valables, quelle que soit la vitesse de la charge. On en déduit, dans des cas déjà nombreux, les équations (5) et (6).

Si l'on suppose que la charge est animée d'un mouvement rectiligne uniforme de vitesse voisine de c, on peut leur adjoindre un autre groupe d'équations toutes analogues. Dans ce cas, en effet, le vecteur électrique est, comme il est bien connu et comme cela résulte en particulier très simplement des équations

[1] Nous appelons X, Y, Z et H le vecteur électrique et le potentiel scalaire, et non plus leur produit par c.

de la relativité, normal au potentiel vecteur, dirigé lui-même suivant la trajectoire rectiligne de la charge. Ce groupe d'équations est le suivant:

$$\begin{aligned} XH &= MG_3 - NG_2 \\ YH &= NH_1 - LG_3 \\ ZH &= LG_2 - MG_1 \\ XG_1 &= YG_2 + ZG_3 = 0\,. \end{aligned} \qquad (3\ ter)$$

Si la charge était animée d'un mouvement rectiligne uniforme de vitesse v, différente de c, il faudrait substituer au groupe ($3ter$) un groupe plus compliqué où interviendraient, au lieu de X, Y, Z, les projections de la composante de ce vecteur normale au potentiel vecteur, et que nous écrirons seulement pour une disposition des axes dans laquelle l'axe des x serait dirigé suivant la trajectoire de la charge; alors G_2 et G_3 sont nuls, ainsi que L, et Y et Z sont les projections de la composante du vecteur électrique normale au potentiel vecteur. Il est facile de voir que l'on a:

$$\begin{aligned} \frac{v^2}{c^2} YH &= \quad NG_1 \\ \frac{v^2}{c^2} ZH &= -MG_1 \end{aligned} \qquad (3\ bis)$$

Il suffit, en effet, de faire les transformations nécessaires pour passer au système dans lequel la charge est au repos pour trouver des identités.

Deux autres équations existeraient dans ce système, qui, avec le choix des axes ainsi convenu, se réduisent à des identités.

VIII. — *Calcul relatif à l'onde sinusoïdale simple.* Nous avons montré aussi que ces relations ont lieu sur un front d'onde, La démonstration donnée est générale, puisqu'elle ne fait appel qu'aux équations de Maxwell et aux équations de propagation de l'onde électro-magnétique.

Ces relations sont valables aussi pour une onde sinusoïdale et dans tout l'espace-temps. Cependant, elles ne sont alors qu'approchées, avec une erreur insignifiante pour une fréquence un peu élevée.

Nous n'avons fait au paragraphe IV qu'indiquer le calcul à faire en ce cas. Faisons-le de façon détaillée pour l'onde électromagnétique sinusoïdale simple de vitesse c. Si α, β, γ désignent les cosinus directeurs de la direction de propagation, les équations de cette onde sont:

$$X = X_0 \sin \nu \left(\frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{c} - t\right)$$

$$Y = Y_0 \sin \nu \left(\frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{c} - t\right)$$

. . . .

$$N = N_0 \sin \nu \left(\frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{c} - t\right)$$

$$G_1 = G_{01} \cos \nu \left(\frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{c} - t\right)$$

. . . .

$$H = H_0 \cos \nu \left(\frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{c} - t\right)$$

les lettres à indices $_0$ étant des constantes et la fréquence étant $\frac{\nu}{2\pi}$. Disons, de plus, que cette fréquence sera supposée assez grande et que H_0 sera supposé différent de zéro.

Si nous substituons dans l'une des équations du premier groupe de Maxwell:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y},$$

par exemple nous trouvons:

$$L_0 = \beta Z_0 - \gamma Y_0 .$$

Subtituons maintenant dans l'équation:

$$X = -\frac{1}{c}\frac{\partial G_1}{\partial t} - \frac{\partial H}{\partial x},$$

nous trouvons:

$$-\frac{c X_0}{\nu} = G_{01} - \alpha H_0 ,$$

d'où nous tirons:

$$\alpha = \frac{G_{01}}{H_0} + \frac{c}{\nu}\frac{X_0}{H_0} .$$

On aurait de même:

$$\beta = \frac{G_{02}}{H_0} + \frac{c}{\nu}\frac{Y_0}{H_0}$$

$$\gamma = \frac{G_{03}}{H_0} + \frac{c}{\nu}\frac{Z_0}{H_0}.$$

En reportant ces valeurs de β et γ dans les équations, nous trouvons:

$$L_0 H_0 = Z_0 G_{02} - Y_0 G_{03} + \frac{c}{\nu}(Z_0 Y_0 - Z_0 Y_0)$$

et, par suite:

$$L H = Z G_2 - Y G_3 .$$

Le groupe des équations (1) se trouve donc ainsi établi d'une façon rigoureuse dans le cas de l'onde sinusoïdale simple, quelle que soit la fréquence. Cela suffit pour qu'on en déduise comme aux paragraphes II et III ci-dessus les équations (5) et les équations hydrodynamiques (6).

Considérons maintenant le second groupe de Maxwell, et substituons-y les valeurs de X, ... N.

En opérant, par exemple, sur l'équation:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z},$$

nous trouvons:

$$X_0 = \gamma M_0 - \beta N_0 ,$$

et, en remplaçant γ et β:

$$X_0 H_0 = M_0 G_{03} - N_0 G_{02} + \frac{c}{\nu}(M_0 Z_0 - N_0 Y_0) .$$

Or, ν étant supposé assez grand, le terme ayant $\frac{c}{\nu}$ en facteur est négligeable, et l'on est bien conduit au groupe des équations (2).

Un raisonnement tout analogue convient au cas où il ne s'agit plus seulement d'ondes sinusoïdales simples, mais d'ondes sinusoïdales quelconques :

$$X = X_0 \sin \nu\Phi$$

. . . .

$$G_1 = G_{01} \cos \nu\Phi$$

. . . .

$$H = H_0 \cos \nu\Phi$$

X_0 ... H_0 désignant des fonctions quelconques, ainsi que Φ, sous la condition que X_0 ... H_0 ne soient pas très grandes non plus que leurs dérivées.

IX. — *Cas d'exception.* Les équations:

$$\alpha = \frac{G_{01}}{H_0} + \frac{c}{\nu}\frac{X_0}{H_0},$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

montrent que pour ν très grand, le potentiel vecteur est très près d'être dirigé suivant la direction de propagation de l'onde. Il peut cependant y avoir un cas d'exception; c'est le cas où H_0

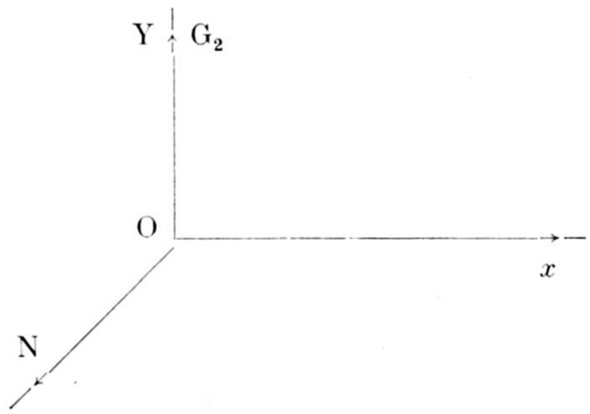

Fig. 2.
Propagation d'une onde sinusoïdale simple suivant la direction Ox, le vecteur électrique étant Y et le vecteur magnétique, N.

serait nul, parce que l'on n'aurait pas alors le droit d'effectuer la division par H_0. Ce cas se produit en effet, et quel que soit ν, quand le potentiel vecteur est parallèle au vecteur électrique.

Supposons une onde sinusoïdale simple se propageant dans la direction Ox (fig. 2), le vecteur électrique étant Y, le vecteur magnétique N, le potentiel vecteur:

$$G_2 = G_{02} \cos \nu \left(\frac{x}{c} - t\right).$$

L'équation:

$$X = -\frac{1}{c}\frac{\partial G_1}{\partial t} - \frac{\partial H}{\partial x} = 0$$

montre tout de suite que H ne dépend pas de x.

L'équation complémentaire:

$$\frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y} + \frac{\partial G_3}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t}$$

montre aussi, le prəmier membre étant nul, que H ne dépend pas de t.

Or, H étant de la forme:

$$H_0 \cos \nu \left(\frac{x}{c} - t\right),$$

il faut, soit que le cosinus ne dépende ni de x, ni de t, et alors il n'y a pas d'onde, soit que H_0 soit nul.

Les équations:

$$Y = -\frac{1}{c}\frac{\partial G_2}{\partial t} \qquad \text{et} \qquad N = \frac{\partial G_2}{\partial x}$$

donnent alors:

$$-\frac{cY_0}{\nu} = G_{02}, \qquad -\frac{cN_0}{\nu} = G_{02}.$$

Même dans ce cas, on voit que les équations (3) sont encore vérifiées, les deuxième et troisième équations (3 *ter*) le sont aussi; les termes de la première et de la quatrième équation (3 *ter*) se réduisent respectivement à NG_2 et YG_2, c'est-à-dire à:

$$\frac{c}{\nu} N_0^3 \,.\, \sin \nu \left(\frac{x}{c} - t\right) \cos \nu \left(\frac{x}{c} - t\right)$$

et

$$\frac{c}{\nu} Y_0^2 \,.\, \sin \nu \left(\frac{x}{c} - t\right) \cos \nu \left(\frac{x}{c} - t\right).$$

Pour ν très grand, ils sont très petits, et les équations en question sont encore vérifiées d'une façon très approchée [1].

[1] Il faut bien remarquer encore que les équations (5) et, par conséquent les équations (6) peuvent aussi dans l'onde sinusoïdale simple se déduire de la substitution dans l'équation de Maxwell

$$\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = 0,$$

écrite pour l'axe des x dirigé suivant la direction de propagation, des expressions:

$$Y = NG_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \qquad \text{et} \qquad Z = -MG_1 - \frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

(§ III).

X. — Convergence des résultats tirés du mouvement des charges et de ceux *tirés de la propagation des ondes.* — Nous venons donc de voir que, d'une part, l'étude du mouvement rectiligne d'une charge avec la vitesse c conduit aux équations (1) et (2); que, d'autre part, l'étude de l'onde conduit à ces mêmes équations rigoureusement sur le front de l'onde; rigoureusement encore, en ce qui concerne le groupe (3), d'une façon très approchée pour les fréquences élevées en ce qui concerne le groupe (3 *bis*) s'il s'agit d'ondes sinusoïdales simples; enfin de façon très approchée pour les grandes fréquences en ce qui concerne les deux groupes s'il s'agit d'ondes sinusoïdales quelconques. Cette concordance des deux méthodes est bien d'accord avec les idées nouvelles sur la liaison des ondes et du mouvement des corpuscules. Cependant, l'attention est attirée sur le fait que pour réaliser une concordance absolument complète, il faut que les fréquences des ondes soient très grandes, théoriquement même, infinies. C'est là une remarque qui mériterait réflexion.

Peut-être cette remarque a-t-elle quelque rapport avec le fait bien connu que si ν_0 est la fréquence propre d'un corpuscule animé par rapport à un système de la vitesse v, la fréquence dans ce système est:

$$\nu = \frac{\nu_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{\nu^2}}}$$

et que, par suite, si v s'approche de c, peut devenir tout de suite très grand. On sait d'ailleurs, par l'expérience, que les fréquences de toutes les radiations connues sont très grandes.

XI. — *Application de la transformation d'opérateurs de Schrödinger.* Quoi qu'il en soit, si nous considérons seulement le cas du mouvement rectiligne avec une vitesse voisine de c, d'une ou plusieurs charges, les relations (3) et (3 *ter*) sont vérifiées, qu'on les considère comme liées au mouvement des charges ou comme liées à l'onde associée à ce mouvement, puisque, dans cette onde, le potentiel vecteur est dirigé suivant la direction de propagation, normalement aux deux vecteurs électrique et magnétique.

L'équation:

$$XH = MG_3 - NG_2 ,$$

par exemple, peut s'écrire:

$$X = \frac{1}{c}\left(M\frac{cG_3}{H} - N\frac{cG_2}{H}\right) .$$

Avec les deux équations analogues donnant Y et Z, elle se présente sous la forme de relations de Lorentz donnant la force électro dynamique agissant sur une charge égale à l'unité et animée d'une vitesse $\frac{cG_{1,2,3}}{H}$, c'est-à-dire, de la vitesse c, de composantes $c\alpha$, $c\beta$, $c\gamma$.

On remarque que, de plus, dans tous les cas, et même s'il s'agit du mouvement d'une charge avec une vitesse v différente de c, ou même encore plus généralement s'il s'agit d'un champ absolument quelconque, les composantes $\frac{cG_{1,2,3}}{H}$ se transforment d'un système à un autre de la relativité restreinte par des formules en tous points identiques aux formules de composition des vitesses [1]. Ceci suggère de chercher à considérer ces grandeurs comme représentant effectivement les composantes d'une vitesse et également d'accord avec le fait que la quantité de mouvement d'un mobile dans un champ électromagnétique et son énergie sont proportionnelles respectivement à $G_{1,2,3}$ et H.

Remplaçons dans les groupes (3) et (3 *ter*) $\frac{G_{1,2,3}}{H}$ respectivement par $\frac{p_1}{p_0}$, $\frac{p_2}{p_0}$, $\frac{p_3}{p_0}$, les $p_{0,1,2,3}$, représentant les composantes d'un certain quadrivecteur impulsion. Les deux groupes s'écrivent:

$$\begin{aligned}
p_0 M &= p_3 X - p_1 Z ,\\
p_0 N &= p_1 Y - p_2 X ,\\
p_1 L + p_0 M + p_3 N &= 0 ,\\
p_0 X &= p_3 M - p_2 N ,\\
p_0 Y &= p_1 N - p_3 L ,\\
p_0 Z &= p_2 L - p_1 M ,\\
p_1 X + p_2 Y + p_3 Z &= 0 .
\end{aligned}$$

[1] Chap. V, § V.

Effectuons sur ces équations la transformation d'opérateurs de Schrödinger, qui consiste à remplacer, dans une équation mécanique :

$$p_0 \text{ par } -\frac{1}{c}\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t},$$

$$p_{1,2,3} \text{ par } \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x \text{ ou } \partial y \text{ ou } \partial z}$$

pour obtenir une équation ondulatoire.

Nous trouvons, le facteur $\frac{h}{2\pi i}$ étant commun,

$$\frac{1}{c}\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \quad \text{et deux équations analogues:}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \quad \text{et deux équations analogues:}$$

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0.$$

Ce sont là les deux groupes d'équations de Maxwell. De plus, des relations (3) et (3 *ter*) ou des relations :

$$\alpha = \frac{G_1}{H}, \qquad \beta = \frac{G_2}{H}, \qquad \gamma = \frac{G_3}{H},$$

vérifiées dans le mouvement rectiligne uniforme d'une charge de vitesse voisine de c, on déduit :

$$G_1^2 + G_2^2 + G_3^2 = H^2.$$

En introduisant $p_{0,1,2,3}$, cette relation devient :

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - p_0^2 = 0,$$

d'où, par transformation :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = 0,$$

qui est l'équation de la propagation.

Si l'on avait remplacé une fois seulement H et $G_{1,2,3}$ par $p_{0,1,2,3}$, on aurait trouvé:

$$p_1 G_1 + p_2 G_2 + p_3 G_3 = p_0 H$$

et la transformation aurait donné:

$$\frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y} + \frac{\partial G_3}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t} ,$$

ce qui est l'équation complémentaire de la théorie électromagnétique.

Des relations $\alpha = \frac{G_1}{H}$, etc., on tire:

$$a G_1 + \beta G_2 + \gamma G_3 = H .$$

Or, s'il s'agit d'un mouvement de charges de densité P (unités électro statiques) donnant une densité de courant de composantes u_1, u_2, u_3 (unités électro magnétiques), on a:

$$\frac{u_1}{p} = \alpha , \quad \text{etc.} ,$$

d'où

$$G_1 u_1 + G_2 u_2 + G_3 u_3 - PH = 0 .$$

Le premier membre est, au coefficient $-\frac{1}{c}$ près, le terme d'action de substance de l'électricité. En tout cas où il est nul, et notamment dans le cas envisagé, la transformation donne:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial P}{\partial t} = 0 ,$$

ce qui est l'équation de la conservation de l'électricité.

Si l'on passe maintenant au cas où la vitesse v des charges serait différente de c, on déduit des équations (3 *bis*):

$$G_1^2 = \frac{v^2}{c^2} H^2 ,$$

ou, avec une disposition quelconque des axes:

$$G_1^2 + G_2^2 + G_2^3 = \frac{v^2}{c^2} H^2 .$$

Après multiplication par une fonction d'onde, la transformation donnerait:

$$\Delta \psi - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2},$$

avec $V = \frac{c^2}{v}$, ce qui est l'équation d'une onde de phase. Il est difficile de ne voir dans ce qui vient d'être dit que des coïncidences. Peut-être, au contraire, pourra-t-on y trouver un moyen de déterminer le sens profond de la transformation d'opérateurs. Pour le moment, cela renforce encore l'idée que le vecteur $G_{1,2,3}$ peut représenter une vitesse.

Si l'on considère les expressions que nous avons données plus haut de composantes du vecteur de Poynting, on trouve, en faisant le même remplacement, par exemple:

$$p_0 (LY - MX) = \frac{1}{2} p_3 (X^2 + \ldots + N^2)$$

et ensuite:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (LY - MX) = - \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{2} (X^2 + \ldots + N^2) .$$

Ceci n'est pas autre chose que l'une des équations canoniques d'Hamilton en mécanique, $\frac{1}{c}(LY - MX)$ étant une composante de la quantité de mouvement, et $\frac{1}{2}(X^2 + \ldots + N^2)$ l'énergie.

On citerait encore d'autres cas où la même correspondance a lieu.

XII. — *Vue d'ensemble sur les résultats obtenus.* — Le résultat essentiel que nous avons obtenu dans ce chapitre est le suivant: Soit G_1 le potentiel vecteur d'un champ électro magnétique en un point O, origine du trièdre trirectangle de référence $O\,x\,y\,z$; G_1 est supposé dirigé suivant Ox; le vecteur magnétique a pour composantes M et N situées dans le plan $y\,o\,z$; le vecteur électrique a pour composantes X, Y, Z, n'étant pas, en général, perpendiculaire au potentiel vecteur.

Dans ces conditions, on peut toujours définir deux fonctions φ et ψ par les relations:

$$Y = \quad NG_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$Z = -MG_1 - \frac{\partial \psi}{\partial z} .$$

A l'aide de l'équation de Maxwell:

$$\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = 0 ,$$

on peut établir que $\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$.

Avec une disposition quelconque des axes, ces relations deviennent alors, si X_1, Y_1, Z_1 désignent les composantes de la projection du vecteur électrique sur la direction du potentiel vecteur:

$$X = X_1 + MG_3 - NG_2 - \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$Y = Y_1 + NG_1 - LG_3 - \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$Z = Z_1 + LG_2 - MG_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial z} .$$

X_1, Y_1, Z_1 sont d'ailleurs nulles dans des cas assez généraux; elles ne se propagent pas dans l'onde électro magnétique.

D'autre part, on a toujours:

$$X = -\frac{1}{c} \frac{\partial G_1}{\partial t} - \frac{\partial H}{\partial x}$$

$$Y = -\frac{1}{c} \frac{\partial G_2}{\partial t} - \frac{\partial H}{\partial y}$$

$$Z = -\frac{1}{c} \frac{\partial G_3}{\partial t} - \frac{\partial H}{\partial z} .$$

En éliminant X Y Z entre les deux derniers groupes d'équations, on trouve:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial G_1}{\partial t} + MG_3 - NG_2 + \frac{\partial (H - \varphi)}{\partial x} + X_1 = 0$$

et deux équations analogues.

Ces équations sont, avec celles qui définissent le vecteur magnétique comme rotationnel du potentiel vecteur, de la même forme que les équations d'Helmholtz en hydrodynamique. L'équation dite complémentaire:

$$\frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y} + \frac{\partial G_3}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

joue, de plus, le rôle de l'équation de continuité de l'hydrodynamique, qui est de la même forme. Cela amène à considérer le potentiel vecteur en un point comme la vitesse en ce point d'un certain fluide réel ou fictif. Nous donnons aussi d'autres raisons de penser qu'il puisse en être ainsi. En particulier, nous montrons que la force électrique peut s'écrire sous une forme analogue à celle de la force électro dynamique de Lorentz, le potentiel vecteur $\left(\text{ou plutôt son produit par } \frac{c}{H}\right)$ jouant le rôle de la vitesse de la charge dans la formule de Lorentz.

Nous montrons aussi l'existence de deux groupes de relations de la forme:

$$LH = ZG_2 - YG_3$$

$$\frac{XH}{V^2} = MG_3 - NG_2 \ .$$

d'où l'on déduit une expression du théorème de Poynting qui conduit aussi à donner à $G_{1,2,3}$ un certain caractère de vitesse. Enfin nous renforçons encore l'idée de considérer $G_{1,2,3}$ comme une vitesse en montrant que si l'on effectue sur lui une transformation d'opérateurs comme celle de Schrödinger, on obtient une correspondance entre deux groupes nombreux d'équations, parmi lesquelles se trouvent celles qui expriment le théorème de Poynting et celles d'Hamilton en mécanique.

Chapitre V

Brève esquisse d'une première interprétation

I. — *Essai d'interprétation des résultats obtenus.* — Les analogies constatées dans le chapitre précédent appellent presque inévitablement, pour prendre tout leur sens, l'idée d'un retour à l'hypothèse de l'éther, le potentiel vecteur devant être identifié avec la vitesse de l'éther.

Essayons néanmoins d'esquisser une autre interprétation, *pour ne recourir à l'éther qu'en tout dernier lieu.* On est conduit, en mécanique ondulatoire, à imaginer un fluide fictif dit fluide de probabilité, et à envisager un mouvement des éléments de ce fluide, dits éléments de probabilité. Les vitesses qu'on envisage en mécanique ondulatoire sont les dérivées partielles d'une même fonction S; il y a fonction des vitesses. Mais il n'est pas impossible d'envisager un fluide de probabilité avec tourbillons qui, lorsque le tourbillon serait nul, deviendrait identique au fluide de probabilité de la mécanique ondulatoire. Il jouerait par rapport aux mouvements hydrodynamiques, avec tourbillons, le même rôle que joue le fluide de probabilité ordinaire par rapport aux mouvements qui présentent une fonction des vitesses.

Ceci dit, revenons à l'électro magnétisme. Considérons toujours le potentiel vecteur comme une vitesse. Ecrivons à nouveau l'équation (4) du chapitre IV et écrivons l'équation complémentaire:

$$H = \frac{1}{2}(G_1^2 + G_2^2 + G_3^2) + V = H_1 + \varphi . \qquad (4)$$

$$\frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y} + \frac{\partial G_3}{\partial z} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial H}{\partial t} . \qquad (c_1)$$

Considérons pour commencer, le cas où il y a fonction — S des vitesses G. Ces équations s'écrivent, en tenant compte de ce que, comme on le verra tout à l'heure, on a:

$$H_1 = \frac{\partial S}{\partial t} ,$$

à une fonction près ne dépendant que de t:

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right] + V - \varphi = \frac{\partial S}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial H}{\partial t} .$$

Comparons ces équations aux équations que vérifieraient en mécanique ondulatoire la phase S et l'amplitude a d'une onde:

$$\psi = a e^{\frac{2\pi i}{h} S} .$$

Ces équations sont:

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right] + F + F_1 = \frac{\partial S}{\partial t}$$

$$\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial S}{\partial y} + \frac{\partial a}{\partial z}\frac{\partial S}{\partial z} + \frac{1}{2} a \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial a}{\partial t} ,$$

F désignant le potentiel ordinaire et F_1 le potentiel quantique de la mécanique ondulatoire.

L'équation de l'amplitude est d'ailleurs, comme on sait, analogue à l'équation de continuité hydrodynamique du fluide de probabilité de densité ρ:

$$\Sigma \frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\partial S}{\partial x} + \rho \Delta S = \frac{\partial \rho}{\partial t} .$$

Nous serions arrivés à une identification complète de nos équations (4) et (C_1) dans le cas particulier envisagé avec les équations ondulatoires, et avec les équations hydrodynamiques du fluide de probabilité, si nous avions pu compléter préalablement le premier membre de l'équation (C_1) par l'adjonction de la somme de termes:

$$\frac{1}{c^2}\left(G_1 \frac{\partial H}{\partial x} + G_2 \frac{\partial H}{\partial y} + G_3 \frac{\partial H}{\partial z}\right) .$$

Alors nous aurions trouvé:

$$H = c^2 \log_e \rho = c^2 \log_e a^2 .$$

Pouvons nous faire cette adjonction ? Ceci revient à nous demander si nous sommes suffisamment autorisés par les coïncidences d'abord exposées à considérer les G comme composantes de la vitesse d'éléments fictifs ou supposés, cela, bien entendu à titre d'hypothèse et sous réserve que les résultats ultérieurs soient d'accord avec cette hypothèse.

Nous devrions pouvoir, en particulier, reprendre, en plusieurs cas, sans difficultés, la forme ordinaire de l'équation complémentaire. On sait que cette forme est équivalente à la condition de divergence nulle du vecteur électrique, dans le diélectrique parfait, moyennant l'équation de propagation des ondes. Cette condition de divergence nulle est dite souvent condition de transversalité.

Sous sa forme ordinaire, c'est-à-dire sous celle qui correspond à

$$G_1 \frac{\partial H}{\partial x} + G_2 \frac{\partial H}{\partial y} + G_3 \frac{\partial H}{\partial z} = 0 , \qquad (C_2)$$

l'équation complémentaire permet de satisfaire aux équations de Maxwell, moyennant les équations des ondes sous leur forme ordinaire. Or les ondes satisfaisant aux équations de Maxwell sont polarisées, c'est-à-dire, en somme, de nature spéciale. D'autre part, il semble bien que les ondes de la mécanique ondulatoire ne se polarisent pas et que même elles peuvent ne pas être transversales. A cause de cela, je proposerai de considérer la condition (C_2) comme une condition de transversalité dans le diélectrique parfait.

En optique, la condition:

$$v_1 \frac{\partial a}{\partial x} + v_2 \frac{\partial a}{\partial y} + v_3 \frac{\partial a}{\partial z} = 0 ,$$

a désignant l'amplitude et v_1, v_2, v_3, les composantes de la vitesse des photons, devrait aussi être considérée comme une condition de transversalité. Si l'on examine le cas d'une onde transversale associée à un mouvement rectiligne de photons, on sait que les surfaces de niveau de l'amplitude sont des cylindres droits ayant pour axe la trajectoire des photons. Or, le vecteur dont les cosinus directeurs sont proportionnels à:

$$\frac{\partial a}{\partial x} , \quad \frac{\partial a}{\partial y} , \quad \frac{\partial a}{\partial z} ,$$

est normal en chaque point à la surface de niveau qui passe par ce point. Il est donc normal à la vitesse des photons, d'où la condition précitée.

Mais cela entraînerait aussi que, quand la condition n'est pas vérifiée, on ne doit pas avoir affaire à une onde transversale, et c'est là un point délicat. Moyennant ces précautions, nous pourrons faire correspondre aux équations (4) et (C_1) une onde qui, dans le cas de la fonction des vitesses, sera:

$$\psi = e^{\frac{H}{2c^2}} \cdot e^{\frac{2\pi i S}{h}}$$

et dans le cas général:

$$\psi = e^{\frac{H}{2c^2}} \cdot e^{\frac{-2\pi i}{h}\int (G_1\,dx + G_2\,dy + G_3\,dz - H\,dt)} ;$$

cette onde n'est pas, évidemment, l'onde électro magnétique ordinaire. C'est une onde microscopique, qui existerait même dans un champ macroscopiquement statique; nous la rencontrerons à nouveau dans le chapitre VI. Sa vitesse de propagation serait:

$$\frac{H}{\sqrt{G_1^2 + G_2^2 + G_3^2}} .$$

L'intégrale qui figure dans l'expression de l'onde est celle que l'on retrouve dans la théorie de Weyl.

Si l'on considère un corpuscule de masse m_0 et de charge électrique ρ en mouvement dans le champ électro magnétique avec la vitesse v, de composantes v_1, v_2, v_3, on sait que la quantité de mouvement de ce corpuscule aurait pour composantes:

$$\frac{m_0 v_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \rho G_1 , \qquad \frac{m_0 v_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \rho G^2 , \qquad \frac{m_0 v_3}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \rho G_3$$

et que l'énergie serait:

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \rho H .$$

Si l'on imagine un corpuscule électrisé, de masse propre nulle, les composantes de la quantité de mouvement, et l'énergie sont alors respectivement proportionnelles à G_1, G_2, G_3 et H.

L'expression ci-dessus de l'onde ψ permet donc de maintenir la relation connue de la mécanique ondulatoire entre la phase de l'onde et les grandeurs mécaniques afférentes à un corpuscule électrisé associé, de masse propre nulle. Le fluide auxiliaire auquel on aurait affaire serait composé de tels corpuscules.

Si l'on tient compte de ce que G_1, G_2, G_3 désignent les composantes de la vitesse de ces corpuscules, on voit que l'intégrale peut s'écrire:

$$\int (G_1^2 + G_2^2 + G_3^2 - H)\, dt \; .$$

Ce serait une autre expression de la phase de l'onde, ou de l'action des éléments du fluide. Si on applique alors le principe de la moindre action, on retrouve les équations de l'électromagnétisme complétées par les équations (5), en tenant compte de l'existence du rotationnel L, M, N.

C'est du symbole que nous venons d'exposer dont nous allons nous servir, en vue de donner d'autres justifications des équations (5) du chapitre IV, fondamentales pour l'interprétation ici exposée. Plusieurs résultats importants de l'électro magnétisme peuvent, en effet, se déduire de ces équations. Il s'agira seulement ici de la formule de la force électro dynamique de Lorentz.

Nous montrerons ensuite qu'on retrouve à partir des équations (4) et (6) l'idée de base de la mécanique ondulatoire.

II. — *Obtention de la formule de la force de Lorentz.* — Puisque X, Y, Z représentent les composantes du produit par c de la force électrique E, on voit que la force mécanique agissant sur la charge e supposée en repos dans le champ est, en notation vectorielle, d'après les équations (5), chapitre IV:

$$f = \mathrm{E}e = e\left(\frac{\vec{l}\,\vec{g}}{c} - \mathrm{grad}\ \varphi_1\right) \qquad (f)$$

l représentant la force magnétique, g, le potentiel vecteur et φ_1 étant égal à $\frac{\varphi}{c}$.

Si nous supposons maintenant la charge e animée d'une vitesse $\vec{v}$, cette vitesse doit se composer avec la vitesse g.

La force f_v agissant sur la charge en mouvement dans le champ est donc:

$$f_v = e\left(\vec{l}\,\frac{\overleftarrow{g} + \vec{v}}{c} - \text{grad}\,\varphi_1\right) = e\left(\frac{\vec{l}\,\overleftarrow{v}}{c}\right) + \text{E}\,.$$

C'est bien la formule de la force de Lorentz.

L'équation vectorielle (f) équivalente aux équations (5) est elle-même une formule de Lorentz, donnant la force mécanique f et la force électrique E agissant sur une charge en repos dans le champ, c'est-à-dire animée de la vitesse g par rapport aux éléments du fluide auxiliaire. Dans le champ d'un nombre quelconque de charges animées de mouvements quelconques, si l'on suppose encore que le potentiel vecteur résultant est une vitesse (la vitesse des éléments d'un certain fluide auxiliaire) et si l'on applique la formule de Lorentz, on retrouve la formule (f) et les équations (5). Comme les équations (1) et (2) sont, bien entendu, valables, on généralise ainsi de nouveau, pour un cas quelconque, la théorie exposée dans les premiers paragraphes du chapitre IV.

III. — La correspondance entre l'équation de Jacobi et l'équation des ondes, base de la mécanique ondulatoire, retrouvée à partir des équations (4) et (6). Nous avons associé aux équations de l'électro magnétisme les équations de l'hydrodynamique, qui, grâce aux équations (5) revêtent exactement la même forme. Il vient à l'idée que cette analogie doit permettre de retrouver les analogies qui sont à la base de la mécanique ondulatoire et qu'on peut considérer comme condensées dans l'analogie de forme de l'équation de Jacobi et de l'équation dite de l'optique géométrique.

C'est bien ce qui a lieu. De l'équation (4), considérée comme hydrodynamique:

$$\text{H} = \frac{1}{2}(\text{G}_1^2 + \text{G}_2^2 + \text{G}_3^2) + \text{V} = \text{T} + \text{V} = \text{H}_1 + \varphi\,.$$

ou encore:

$$\text{H}_1 = \text{T} + \text{V} - \varphi\,,$$

on déduit, en effet, quand le tourbillon est nul, c'est-à-dire quand il existe une fonction des vitesses, l'équation de Jacobi. Si l'on a, en effet:

$$G_1 = -\frac{\partial S}{\partial x}, \qquad G_2 = -\frac{\partial S}{\varrho y}, \qquad G_3 = -\frac{\partial S}{\partial z}$$

les équations (6) prennent la forme:

$$-\frac{\partial^2 S}{\partial x \, \partial t} + \frac{\partial H_1}{\partial x} = 0 \,, \quad \text{etc.}$$

On en déduit, à une fonction près ne dépendant que de t:

$$-\frac{\partial S}{\partial t} + H_1 = 0$$

où

$$H_1 = \frac{1}{2}(\text{grad } S)^2 + V - \varphi = \frac{\partial S}{\partial t}.$$

Mais d'un autre côté, des équations de l'électro magnétisme on aurait déduit l'équation de propagation d'une onde et ensuite l'équation de l'optique géométrique, transcription de l'équation de Jacobi.

Les équations de propagation du potentiel vecteur sont:

$$\Delta G_1 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 G_1}{\partial t^2} = 0 \;;$$

et deux équations analogues.

Comme il y a fonction S du potentiel vecteur, on a, d'après l'équation $H = T + V$ considérée comme équation électromagnétique.

$$\frac{1}{2}(\text{grad } S)^2 + V = H \,.$$

D'autre part, l'équation complémentaire donnerait:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial H}{\partial t} = \Delta S \,.$$

Par comparaison avec l'équation des ondes, que S vérifierait aussi, on voit que l'on aurait :

$$H = \frac{\partial S}{\partial t} + \varphi_1$$

φ_1 désignant une fonction arbitraire de x, y, z. Alors l'équation ci-dessus devient :

$$\frac{1}{2} (\text{grad } S)^2 + V - \varphi_1 = \frac{\partial S}{\partial t} .$$

Cette équation est la même que celle de Jacobi retrouvée dans la première partie du paragraphe comme équation hydrodynamique, au terme $\varphi - \varphi_1$ près.

Le point de vue de la mécanique ondulatoire, où à l'équation de Jacobi est associée l'équation de l'optique géométrique, apparaît ainsi comme un cas particulier d'un point de vue suivant lequel aux équations de l'hydrodynamique pourraient être associées les équations de l'électro magnétisme sous leur forme complétée (6).

IV. — *Rapprochement tiré de la théorie de l'onde plane de Dirac (Sur une interprétation probabiliste du champ électro magnétique).* Dans le présent paragraphe nous allons montrer le parallélisme de la théorie probabiliste de Dirac pour l'onde plane et de la théorie de l'onde électro magnétique classique en utilisant, dans une partie de l'étude, des relations établies précédemment et nous conclurons à la possibilité d'une interprétation probabiliste de l'électro magnétisme, les potentiels vecteur et scalaire ayant un sens de moment de pivotement et de probabilité, ou inversement à une théorie mécanique de l'électro magnétisme.

Considérons, avec les notations habituelles en théorie de Dirac, une onde plane de vitesse c se propageant suivant l'axe OZ. On sait qu'alors les fonctions d'onde ψ_2 et ψ_4 de Dirac sont égales, et que l'on a $\psi_1 = -\psi_3$.

Entre les composantes d'espace σ_1, σ_2, σ_3 du vecteur densité de moment de pivotement σ, sa composante de temps σ_4 et les composantes des vecteurs densités du moment magnétique $\dot{I}$

et du moment électrique J existent les relations que l'on vérifierait facilement à partir des valeurs de ces grandeurs exprimées à l'aide des ψ et de leurs conjuguées ψ^*:

$$\frac{e}{m_0 c}\sigma_1 + \dot{\mathrm{I}}_x = \frac{eh}{2\pi m_0 c}(\psi_1^* \psi_2 + \psi_2^* \psi_1) ,$$

$$\frac{e}{m_0 c}\sigma_2 + \dot{\mathrm{I}}_y = \frac{eh}{2\pi m_0 c} i(\psi_1^* \psi_2 - \psi_2^* \psi_1) ,$$

$$\frac{e}{m_0 c}\sigma_3 + \dot{\mathrm{I}}_z = \frac{eh}{2\pi m_0 c}(\psi_1^* \psi_1 - \psi_1^* \psi_2) .$$

e étant la charge et m_0 la masse du corpuscule auquel l'onde est associée.

Comme σ_4 est égal à $-\frac{h}{2\pi}(\psi_1^* \psi_1 - \psi_2^* \psi_2)$, ces équations s'écrivent aussi, en notation vectorielle:

$$\frac{e}{m_0 c}\overline{(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)} + \dot{\overline{\mathrm{I}}} = -\frac{e}{m_0 c}\overline{(p, q, r)}\,\sigma_4 , \qquad (1)$$

en désignant par p, q, r les paramètres directeurs d'un vecteur de grandeur égale à σ_4:

$$p = \frac{\psi_1^* \psi_2 + \psi_2^* \psi_1}{\psi_1^* \psi_1 - \psi_2^* \psi_2} ,$$

$$q = \frac{i(\psi_1^* \psi_2 - \psi_2^* \psi_1)}{\psi_1^* \psi_1 - \psi_2^* \psi_2} ,$$

$$r = 1 .$$

On vérifie aussi les relations ci-après:

$$p\sigma_1 + q\sigma_2 + r\sigma_3 = -\sigma_4 . \qquad (2)$$

et le produit vectoriel:

$$\frac{e}{m_0 c}\left[\overline{(p, q, r)}\ \overline{(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)}\right] = -\mathrm{J} . \qquad (3)$$

On aurait un autre système de relations tout analogues en employant, au lieu des σ, les composantes de la densité de la probabilité de présence et du courant de probabilité, ρu_x, ρu_y, ρu_z, ρc :

$$\left.\begin{aligned} \frac{h}{4\pi}\frac{e}{m_0 c}\,(\overline{\rho u_x,\ \rho u_y,\ \rho u_z}) + c\overline{\mathrm{J}} &= \frac{h}{4\pi}\frac{e}{m_0 c}\,(\overline{p',\ q',\ r'})\,\rho c \\ p'\,\rho u_x + q'\,\rho u_y + r'\,\rho u_z &= \rho c\ , \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

et le produit vectoriel:

$$\frac{h}{4\pi}\frac{e}{m_0 c}\,(\overline{p',\ q',\ r'})\,(\overline{\rho u_x,\ \rho u_y,\ \rho u_z}) = c\vec{\mathrm{I}}\ .$$

Dans le système où l'axe Oz est dirigé suivant la direction de propagation de l'onde, on a:

$$p' = i\,\frac{\psi_1^*\,\psi_2 - \psi_2^*\,\psi_1}{\psi_1^*\,\psi_1 + \psi_2^*\,\psi_2}\ ,$$

$$q' = -\frac{\psi_1^*\,\psi_2 + \psi_2^*\,\psi_1}{\psi_1^*\,\psi_1 + \psi_2^*\,\psi_2}\ ;$$

$$r' = 1\ .$$

Dans une onde plane électromagnétique classique se propageant dans la direction de cosinus directeurs α, β, γ, existent entre les amplitudes G_{01}, G_{02}, G_{03}, H_0 des potentiels vecteur et scalaire et celles E_0 et M_0 des vecteurs électrique et magnétique les relations, $\frac{\nu}{2\pi}$ désignant la fréquence:

$$(\overline{G_{01},\ G_{02},\ G_{03}}) + \frac{c}{\nu}\,\overline{E}_0 = (\overline{\alpha,\ \beta,\ \gamma})\,H_0\ ,$$

$$a\,G_{01} + \beta\,G_{02} + \gamma\,G_{03} = H_0 \qquad (5)$$

et le produit vectoriel:

$$[(\overline{\alpha,\ \beta,\ \gamma})\,(\overline{G_{01},\ G_{02},\ G_{03}})] = \frac{c}{\nu}\,\overline{M}_0\ .$$

Or, les équations de Maxwell, dans le vide du moins, étant symétriques par rapport aux vecteurs électrique et magnétique, à une question de signes près, on peut suggérer de définir une autre série de potentiels vecteur et scalaire par les relations:

$$\overline{\mathrm{E}} = -\operatorname{rot}(\mathrm{G}'_1, \mathrm{G}'_2, \mathrm{G}'_3) ,$$

$$\overline{\mathrm{M}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathrm{G}'_{1,2,3}}{\partial t} - \operatorname{grad} \mathrm{H}' .$$

On verra alors qu'il existe aussi les relations suivantes entre les amplitudes, dans l'onde sinusoïdale simple:

$$\left.\begin{aligned} &\overline{(\mathrm{G}'_{01}, \mathrm{G}'_{02}, \mathrm{G}'_{03})} + \frac{c}{\nu}\overline{\mathrm{M}}_0 = \overline{(\alpha, \beta, \gamma)}\,\mathrm{H}'_0 \\ &a\mathrm{G}'_{01} + \beta\mathrm{G}'_{02} + \gamma\mathrm{G}'_{03} = \mathrm{H}'_0 \\ &\text{et le produit vectoriel:} \\ &\overline{(\alpha, \beta, \gamma)}\,\overline{(\mathrm{G}'_{01}, \mathrm{G}'_{02}, \mathrm{G}'_{03})} = -\frac{c}{\nu}\overline{\mathrm{E}}_0 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

D'autre part, on sait qu'un corps de moment électrique $\mathcal{E}_{1,2,3}$ et de moment magnétique $\mathfrak{M}_{1,2,3}$ possède dans un champ électro magnétique h_x, h_y, h_z, H_x, H_y, H_z, une énergie potentielle:

$$-\Sigma(\mathcal{E} h_x + \mathfrak{M}\,\mathrm{H}_x) .$$

L'énergie du champ électro-magnétique ayant pour densité moyenne:

$$\frac{1}{8\pi}(\overline{\mathrm{E}}_0^2 + \mathrm{M}_0^2) ,$$

cela suggère de définir dans ce champ un moment électrique moyen et un moment magnétique moyen dont les valeurs seront, k étant une certaine constante:

$$\overline{\mathcal{E}}_0 = -k\overline{\mathrm{E}}_0 , \qquad \overline{\mathfrak{M}} = -k\overline{\mathrm{M}}_0 .$$

Alors les équations (5) et (6) pourront s'écrire:

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{k\nu}{c}\overline{(G_{01}, G_{02}, G_{03})} + \overline{\mathcal{E}}_0 = -\frac{k\nu}{c}\overline{(\alpha, \beta, \gamma)}\, H_0 \,, \\ &-(\alpha G_{01} + \beta G_{02} + \gamma G_{03}) = -H_0 \,, \\ &-\frac{k\nu}{c}\left[\overline{(\alpha, \beta, \gamma)}\,\overline{(G_{01}, G_{02}, G_{03})}\right] = \overline{\mathfrak{M}}_0 \,. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{k\nu}{c}\overline{(G'_{01}, G'_{02}, G'_{03})} + \overline{\mathfrak{M}}_0 = -\frac{k\nu}{c}\overline{(\alpha, \beta, \gamma)}\, H'_0 \,, \\ &-\left(\alpha G'_{01} + \beta G'_{02} + \gamma G'_{03}\right) = -H'_0 \,, \\ &-\frac{k\nu}{c}\left[\overline{(\alpha, \beta, \gamma)}\,\overline{(G'_{01}, G'_{02}, G'_{03})}\right] = -\mathcal{E}_0 \,. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Le groupe (7) ressemble de très près au groupe (4) et la correspondance des signes est assurée; le groupe (8) ressemble de très près au groupe formé par les équations (1), (2), (3) et la correspondance des signes est également assurée.

Ceci suggère d'attribuer aux deux espèces de potentiels scalaires et vecteurs que nous avons considérés dans ce qui précède un sens de probabilité et de moment de pivotement respectivement, si l'on envisage l'analogie dans l'hypothèse probabiliste.

On vérifierait d'ailleurs qu'entre ces deux espèces de potentiels existe dans l'onde électro magnétique sinusoïdale la relation:

$$G_1 G'_1 + G_2 G'_2 + G_3 G'_3 - HH' = 0 \,,$$

entièrement analogue à celle qui, dans l'onde plane de Dirac, exprime l'orthogonalité du quadrivecteur moment de pivotement et du quadrivecteur probabilité.

Il y a cependant une différence. C'est que dans les équations de (1) à (4) figurent deux séries de paramètres directeurs p, q, r et p', q', r', alors que dans les groupes (7) et (8) figure une seule série de cosinus directeurs. Les deux groupes de paramètres se confondent et deviennent des cosinus quand, dans l'onde plane de vitesse c se propageant suivant Oz, on a soit $\psi_1 = -\psi_3 = 0$, soit $\psi_2 = \psi_4 = 0$.

Il ne reste plus qu'une seule fonction ψ.

Alors, tous les moments I et J de Dirac sont nuls, à moins que m_0 ne soit nul aussi. On n'est plus sûr aujourd'hui du fait que le m_0 du photon soit nul. Supposons I et J non pas nuls, mais aussi petits que l'on voudra. Si l'on fait la comparaison des équations (1) à (4) avec (7) et (8) après multiplication des premières par la fréquence ν, supposée très grande, les produits $\nu\dot{J}$ et $\nu\dot{I}$ pourront n'être pas très petits, bien que $\dot{I}$ et $\dot{J}$ doivent l'être.

L'assimilation est donc possible, pourvu que la fréquence de l'onde sinusoïdale électromagnétique soit assez grande.

Dans l'hypothèse déterministe, on est conduit de nouveau à assimiler le potentiel $G_{1,2,3}$ à une vitesse ou plus exactement au produit d'une vitesse par une densité de fluide.

Des équations concernant la théorie de l'onde plane de Dirac données ci-dessus, il est possible de déduire d'autres équations qui permettent de retrouver la même conclusion, en mettant en lumière certains points. On vérifierait d'ailleurs facilement ces équations, de manière directe, pour l'onde plane de vitesse c; ce sont les suivantes:

$$\overline{\dot{I}}\,\sigma_4 = [\overline{J}\,\overline{\sigma}] \,, \qquad (9)$$

$$\overline{\dot{J}}\,\sigma_4 = -[\overline{I}\,\overline{\sigma}] \,, \qquad (18)$$

$$\overline{\dot{I}}\,c\rho = -[\overline{J}\,\rho\overline{u}] \,, \qquad (11)$$

$$\overline{\dot{J}}\,c\rho = [\overline{I}\,\rho\overline{u}] \,. \qquad (12)$$

Certaines des composantes de ces relations seraient même valables dans l'onde plane de Dirac de vitesse non égale à c.

Or nous avons montré qu'existent en électro magnétisme les relations suivantes entre les amplitudes des vecteurs électrique et magnétique et celles des potentiels scalaire et vecteur habituels:

$$\overline{M}_0\,H_0 = -[\overline{E}_0\,\overline{g}_0] \,, \qquad (11')$$

$$\overline{E}_0\,H_0 = [\overline{M}_0\,\overline{g}_0] \,. \qquad (12')$$

Et l'on verrait de même qu'existent aussi les relations:

$$\overline{M}_0\,H_0' = -[\overline{E}_0\,\overline{g}_0'] \,, \qquad (9')$$

$$\overline{E}_0\,H_0' = [\overline{M}_0\,\overline{g}_0'] \,. \qquad (10')$$

Les quatre groupes de relations (9′) à (12′) sont rigoureusement exacts sur un front d'onde; dans l'onde sinusoïdale simple électromagnétique, les groupes (10′) et (11′) sont encore rigoureusement exacts; les groupes (9′) et (12′) sont seulement approchés avec une erreur égale à $\frac{c}{\nu}\overline{E}_0\overline{M}_0$, insignifiante pour une fréquence assez élevée, ou pour des champs assez petits.

La comparaison des équations (9) à (12) avec les équations (9′) à (12′) montre, elle aussi, que l'on peut attribuer aux deux espèces de potentiels le sens de quadrivecteur moment de pivotement et de quadrivecteur probabilité, en doctrine probabiliste. En doctrine déterministe, la conclusion confirme que le potentiel vecteur peut apparaître comme une vitesse.

On peut remarquer que, des équations (11) et (12), on déduirait 3 équations de la forme suivante:

$$c\left(\dot{I}_x \dot{J}_y - \dot{I}_y \dot{J}_x\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\dot{I}^2 + \dot{J}^2\right) u_z$$

qui traduisent l'équivalent du théorème de Poynting.

Aux 16 densités de Dirac, nous voyons qu'on peut, dans l'onde électro magnétique, faire correspondre d'abord 14 grandeurs. Il en reste deux, les invariants Ω_1 et Ω_2. Le premier paraît lié à la masse propre des corpuscules du champ; quant au second, on peut être amené à penser qu'il doit être en liaison avec la force mécanique, seizième grandeur qui intervient dans la théorie de Maxwell-Lorentz. Effectivement nous l'avons vérifié, mais seulement dans des cas particuliers assez étroits.

Bien entendu, on déduirait, si les $G_{1,2,3}$ et H étaient connus, ainsi que les G′ et H′, les fonctions ψ qui satisferaient à des équations de Dirac. Dans le cas de l'électron les fonctions et équations de Dirac nous paraîtraient régler les mouvements d'un corpuscule non éther plongé dans les mouvements hydrodynamique de l'éther.

V. — *Le Potentiel vecteur et la formule de composition de vitesses.* Nous avons considéré le potentiel vecteur G_1, G_2, G_3 comme une vitesse. Or, les formules de transformation du potentiel vecteur d'un système dans un autre ne coïncident pas avec les formules de composition des vitesses de la relativité.

Par contre, les formules de transformation des quantités $\frac{c^2 G_1}{H}$, $\frac{c^2 G_2}{H}$, $\frac{c^2 G_3}{H}$, qui, avec notre système d'unités, sont de la dimension d'une vitesse, coïncident avec les formules de composition des vitesses.

Si ces quantités ont les valeurs qu'on vient d'écrire dans un certain système d'axes galiléens, et les valeurs $\frac{c^2 G_1'}{H'}$, etc., dans un second système animé par rapport au premier de la vitesse uniforme v suivant les axes Ox et $O'x'$ supposés en coïncidence, on a, α étant le facteur de contraction de Lorentz:

$$\frac{c^2 G_1'}{H'} = c^2 \frac{\frac{1}{\alpha}\left(G_1 - \frac{v}{c}\frac{H}{c}\right)}{\frac{1}{\alpha}(H - v G_1)} = \frac{c^2 G_1 - v H}{H - v G_1} = \frac{\frac{c^2 G_1}{H} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{c^2 G_1}{H}},$$

$$\frac{c^2 G_2'}{H'} = \frac{c^2 G_2}{\frac{1}{\alpha}(H - v G_1)} = \frac{\alpha \frac{c^2 G^2}{H}}{1 - \frac{v c^2 G_1}{c^2 H}} \ldots$$

Ce sont bien les formules de composition des vitesses. On verrait de même que H se transforme comme la densité électrique. Signalons aussi que, dans une nouvelle théorie de la lumière, M. L. de Broglie écrit l'un des groupes de Maxwell de la façon suivante, pour l'espace vide:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial (XYZ)}{\partial t} = \text{rot}\,(LMN) - k \, . \, \bar{g}$$

$$\text{div}\,(XYZ) = KH \;, \quad (K \text{ const}) \, .$$

Il y a deux termes supplémentaires contenant les potentiels vecteur et scalaire g et H et ces termes jouent le même rôle que ceux qui, dans les équations pour le courant de convection, contiennent la vitesse et la densité de charge.

On peut encore dire que le potentiel vecteur satisfait à la formule de composition des vitesses, pourvu qu'en changeant de système d'axes on change en même temps d'unités. L'unité de mesure du potentiel vecteur serait, en chaque point du premier système, proportionnelle à la valeur en ce point de $\frac{H}{c^2}$;

en chaque point du second, elle serait proportionnelle à la valeur en ce point de $\frac{H'}{c^2}$. Lors du passage d'un système à un autre, elle varierait dans la proportion de H à H'.

Je laisse à penser quel rapport cela peut avoir avec les idées de Weyl.

Le potentiel vecteur apparaît ainsi comme étant la vitesse de groupe des ondes ψ. On montre en mécanique ondulatoire que les vitesses de groupe satisfont aux équations de la mécanique. Et c'est peut être là qu'il faudrait voir, à défaut de la théorie de l'éther, la raison profonde pour laquelle ce potentiel vecteur satisfait aux équations de l'hydrodynamique.

Conclusion. — Cette interprétation n'est certainement pas complètement satisfaisante, notamment en ce qui concerne l'usage que nous avons fait de l'équation complémentaire, bien que nos hypothèses au sujet de celle-ci sont sans influence sur une partie du chapitre.

Nous voilà donc de nouveau rejetés vers l'hypothèse de l'éther, comme nous l'avions été par les expériences relatées dans la première partie et qui concernaient un tout autre ordre d'idées.

Chapitre VI.

Essai d'une théorie hydrodynamique de l'éther. Electro-magnétisme, lumière, gravitation.

I. — *Etablissement des équations de Maxwell comme équations les plus générales des mouvements de l'éther.*

Nous ne nous préoccuperons nullement de définir des propriétés de l'éther. Nous supposerons simplement qu'il se compose de parties pouvant être suivies dans le temps, et qu'on peut lui attribuer une densité et une pression.

Soient G_1, G_2, G_3 les composantes suivant trois axes de coordonnées rectangulaires $O\,x\,y\,z$ de la vitesse d'un élément de ce milieu, ou si l'on veut, de la quantité de mouvement d'une masse prise pour unité, ρ la densité du milieu et p la pression que l'élément considéré supporte de la part des autres éléments, et T la demi-force vive.

Nous allons montrer qu'à partir de l'hypothèse de l'éther on retrouve les équations nouvelles qu'au chapitre IV nous avons déduites des résultats classiques de l'électro magnétisme, et les équations donnant les vecteurs électrique et magnétique en fonction des potentiels vecteur et scalaire.

Appelons L M N le double des composantes de la ro tation instantanée:

$$\left.\begin{aligned} L &= \frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z} \\ M &= \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x} \\ N &= \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \,. \end{aligned}\right. \qquad (1)$$

Admettons l'existence d'une relation $f(p, \rho) = 0$ entre la densité et la pression; supposons qu'il existe un potentiel U de la force appliquée. Posons alors:

$$\left.\begin{aligned} H &= \int \frac{dp}{\rho} + T + U + \varphi \\ X &= MG_3 - NG_2 - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ Y &= NG_1 - LG_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ Z &= LG_2 - MG_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \,. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Les équations de l'hydrodynamique pour ce milieu peuvent être écrites alors sous la forme:

$$\left.\begin{aligned} X &= -\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial t} \\ Y &= -\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial t} \\ Z &= -\frac{\partial H}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial t} \,. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

La fonction φ sera à déterminer. Ceci n'est valable que quand il existe un potentiel U des forces appliquées. Sinon, il faut poser:

$$X = MG_3 - NG_2 - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}$$

$$Y = NG_1 - LG_3 - \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}$$

$$Z = LG_2 - MG_1 - \frac{\partial \varphi_3}{\partial z}.$$

Les six relations (1) et (3) sont de la même forme que celles qui existent en électro magnétisme entre les forces magnétiques L, M, N, le produit par c des forces électriques X, Y, Z, le potentiel vecteur G_1, G_2, G_3 et le produit par c du potentiel scalaire H.

Dans son ouvrage « Hydrodynamique physique », Bjerkness dit que les analogies hydrodynamiques de l'électromagnétisme ne permettent pas l'identification des grandeurs parce qu'il manque une relation vectorielle entre elles. C'est bien ce que nous constatons et nous voyons quelle est la relation qui manquait à Bjerkness.

Ainsi, en établissant les équations les plus générales possibles des mouvements de l'éther nous trouvons des équations qui sont précisément de la forme des équations générales de l'électromagnétisme. Cela nous suggère de conclure à une interprétation hydrodynamique de l'électromagnétisme, et d'identifier les dix quantités qui figurent dans ces équations avec les dix qui figurent dans celles de l'électromagnétisme.

Les forces électriques ou magnétiques n'ont évidemment pas, dans nos résultats, les mêmes dimensions que dans les systèmes électrostatique ou électromagnétique, non plus que dans la théorie de Larmor. La force magnétique est de la nature d'une vitesse angulaire ou d'un tourbillon; le produit par c de la force électrique est de la nature d'une accélération. C'est l'accélération complémentaire de Coriolis produite par un mouvement d'entraînement dont la rotation est $\frac{L}{2}$, $\frac{M}{2}$, $\frac{N}{2}$ et un mouvement relatif G_1, G_2, G_3; le potentiel vecteur est une vitesse. Le produit par c du potentiel scalaire, le carré d'une vitesse.

Eliminons par dérivation et soustraction la fonction H dans le groupe (3). Nous trouvons des équations qui ne peuvent être autres que celles d'un groupe d'équations de Maxwell:

$$\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial t}\,, \quad \text{etc.}$$

Les premiers membres des équations du second groupe s'obtiendront par dérivation à partir des équations (1).

C'est ainsi qu'on a, en opérant sur les deux premières équations de ce groupe:

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial^2 G_3}{\partial^2 x^2} + \frac{\partial^2 G_3}{\partial^2 y^2} + \frac{\partial^2 G_3}{\partial^2 z^2} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y} + \frac{\partial G_3}{\partial z}\right).$$

Moyennant l'équation des ondes:

$$\frac{\partial^2 G_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G_3}{\partial y^2} + \frac{\lambda^2 G_3}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 G_3}{\partial t^2} = 0$$

et l'équation complémentaire, qui, avec nos notations, s'écrit:

$$\frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y} + \frac{\partial G_3}{\partial z} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial H}{\partial t} = 0\,,$$

le second membre prend la forme:

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2 G_3}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z\, \partial t}\right)$$

ce qui, d'après les équations (3) est $-\frac{1}{c^2}\frac{\partial Z}{\partial t}$, c'est-à-dire, avec nos notations, le troisième terme de l'équation du second groupe de Maxwell.

Comme nous l'avons montré au chapitre IV, paragraphe III, les équations (2) ci-dessus conduisent directement aussi au premier groupe de Maxwell.

Enfin, l'équation complémentaire, que nous proposons de compléter comme suit:

$$\Sigma \frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\Sigma G_1 \frac{\partial H}{\partial x} = 0\,,$$

les termes supplémentaires devant être nuls pour les ondes transversales, joue le rôle d'équation de continuité. D'après cette équation la divergence de la vitesse de l'éther ne serait pas forcément nulle, et par conséquent l'éther serait compressible.

C'est sur les équations (2) que repose, pour une part, la possibilité de la théorie que nous exposons. Les précédents chapitres les justifient déjà, d'une manière assez sérieuse. Nous allons néanmoins montrer de nouveau qu'elles sont en accord avec quelques résultats essentiels de l'électromagnétisme.

II. — *Accord avec l'expérience. Formule de la force de Lorentz.* Supposons qu'en une région de l'éther existe d'abord une force électrique h_1, de composantes $-\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $-\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $-\frac{\partial \varphi}{\partial z}$, puis qu'on arrive à provoquer en cette région un mouvement de l'éther avec la vitesse g de composantes G_1, G_2, G_3, par rapport aux conducteurs qui créent le champ. Ce mouvement, dans nos idées, donnera naissance au champ magnétique l (L, M, N). La force mécanique f (eX, eY, eZ), agissant sur la charge e restant au repos dans la région, sera, d'après les relations (2), et en notation vectorielle:

$$f = e\,(\vec{h} + \vec{g}\,\vec{l}) \qquad (h = h_1)$$

ou, si l'on emploie les unités ordinairement choisies en électromagnétisme:

$$f = e\left(\vec{h} + \frac{\vec{g}\,\vec{l}}{c}\right).$$

Elle se confond donc en ce cas particulier avec l'expression, sous la forme donnée par Lorentz, de la force mécanique.

Serait-il sage de ne voir là qu'une simple coïncidence ?

Il est d'ailleurs possible de déduire des formules (2) les formules de la force électrodynamique telles que les a écrites Lorentz. Dans une portion d'éther, la force étant d'abord:

$$f = e\left(\vec{h} + \frac{\vec{g}\,\vec{l}}{c}\right),$$

d'après les formules (2), si l'on vient à mettre un corps électrisé, portant la charge e, en mouvement par rapport aux conducteurs qui créent le champ avec la vitesse v, ce corps entraîne l'éther avec la vitesse v, s'il est d'indice très grand.

Dans cet éther entraîné ont toujours lieu, au moins en première approximation les mouvements g.

La force devient:

$$f_v = e\left[\left(\vec{h} + \frac{\vec{g} + \vec{v}}{c}\right)\right] = f + e\frac{\vec{v}}{c}\vec{l}$$

C'est la formule de la force donnée par Lorentz. La formule donnant f en est bien, comme nous l'avons dit, un cas particulier où $\vec{h}$ et $\vec{g}$ ne sont pas connus séparément.

Notons aussi que les mêmes relations (2) résolues par rapport à la force magnétique rendraient compte d'une force mécanique agissant sur un pôle magnétique.

III. — *Champs électriques et Champs magnétiques.* — Poursuivons notre confrontation de la théorie hydrodynamique de l'éther représentée par les équations (1), (2), (3) avec les résultats expérimentaux.

Il nous faut d'abord rendre compte de la possibilité de l'existence d'un champ électro-statique ou d'un champ magnétique pur.

D'après les formules (2), il est possible d'avoir un champ électrostatique pur. En effet, pour $L = M = N = 0$, on a:

$$X = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

La fonction φ représente alors le potentiel électrostatique. Elle a, nous le verrons, pour expression $c^2 \log \rho$, si ρ désigne la densité de l'éther au point considéré.

Dans un champ magnétique pur, les équations (2) s'écrivent:

$$MG_3 - NG_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$NG_1 - LG_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$LG_2 - MG_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

On peut, en général, en tirer des valeurs de G_1, G_2, G_3 qui, transportées dans les formules (1), donneront trois équations aux dérivées partielles entre L, M, N et φ. Ces trois équations ne sont pas indépendantes car, d'après les équations (1) existe la relation:

$$\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0$$

entre les quantités L, M, N.

Si la fonction φ est donnée, on en déduira une infinité de systèmes possibles de valeurs de L, M, N qui satisferont au problème, montrant ainsi qu'il est possible, d'une infinité de manières, d'avoir un champ magnétique en l'absence de tout champ électrostatique. Inversement, un champ magnétique quelconque étant donné, il faudra qu'on puisse trouver une valeur de φ qui permette d'annuler X, Y, Z pour qu'il n'y ait aucun champ électrostatique.

Prenons un exemple. Supposons le champ donné par $L = M = 0$, $N \neq 0$.

On tire des équations (2):

$$N = -\frac{1}{G_2}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{G_1}\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

d'où G_1 et G_2 en fonction de N. La troisième équation (1) s'écrit alors:

$$\begin{aligned} N &= -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{N}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{N}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) \\ &= -\frac{1}{N}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{N^2}\left(\frac{\partial N}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right). \end{aligned}$$

Cette équation aux dérivées partielles donne une fonction φ dépendant de fonctions arbitraires, qui permet d'avoir le champ magnétique N sans champ électrostatique. Comme on a $\frac{\partial N}{\partial z} = 0$, la fonction peut ne pas dépendre de z; et c'est bien ce qu'il faut, puisque d'après la troisième équation (2) on doit avoir $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$.

Dans tout champ magnétique où la force magnétique ne varie pas rapidement de direction au passage d'un point à un autre point voisin, on pourra décomposer l'espace en régions assez petites pour que, dans chacune d'elles, le calcul précédent soit applicable et substituer ainsi au champ réel un champ fictif permettant le calcul ci-dessus. Ainsi pourra-t-on déterminer en chaque point de l'espace la fonction φ et, par suite, les fonctions G_1, G_2, par les équations donnant N et tirées de (2); quant à la fonction G_3, elle sera donnée par l'une ou l'autre des deux premières équations (1) qui ne sont pas distinctes l'une de l'autre, en raison de la troisième et de la condition $\frac{\partial N}{\partial z} = 0$.

Notons qu'un calcul semblablement dirigé pourrait servir à trouver les fonctions φ, G_1, G_2, G_3 dans le cas où X, Y, Z ne seraient pas nulles.

Une autre condition à laquelle il nous faut satisfaire est la suivante: on sait qu'on établit en hydrodynamique un théorème (théorème d'Helmholtz-Lagrange), d'après lequel quand, dans un fluide, les tourbillons sont nuls en un point à un instant, ils sont nuls, à tout instant ultérieur, sous quelques conditions, et notamment sous la condition que la fonction H ne subisse aucune discontinuité.

Cela impose que, dans le passage d'un système de l'état électrostatique à l'état électrodynamique, la fonction H subisse une discontinuité.

Et cela aussi est d'accord avec l'expérience. En effet, soit un système de corps électrisés au repos dans une région de l'éther, par exemple au repos dans un laboratoire. Il existe une force électrique en chaque point de cette région. Si les corps viennent à être mis en mouvement avec une vitesse v dans cette région, la force électrique change de valeur. C'est ainsi que nous interpréterons plus loin les relations que la relativité établit entre les forces électriques de deux systèmes de coordonnées en mouvement l'un par rapport à l'autre, et qui sont dans le mouvement uniforme par exemple:

$$X = X'$$

$$Y = \frac{1}{\alpha} Y'$$

$$Z = \frac{1}{\alpha} Z'$$

avec $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.

Les conclusions de la théorie hydrodynamique sont donc conformes à celles de l'expérience: sans variation de la force électrique d'un système primitivement électrostatique, il n'y a pas apparition de magnétisme.

Mais, dira-t-on, si les corps sont mis en mouvement avec une vitesse assez faible et assez lentement croissante, pour que v et par suite Y, Z et H puissent être considérées comme ne subissant pas de discontinuités, on ne devra, d'après la théorie hydrodynamique, constater aucune production de magnétisme. En effet, mais cela est encore bien d'accord avec l'expérience.

Pour que les tourbillons ou le magnétisme apparaissent, il faut que la fonction H varie assez rapidement pour pouvoir être considérée comme subissant une discontinuité.

Il faut aussi que nous attirions l'attention sur un point. En posant $H = \int \frac{dp}{\rho} + T + U + \varphi$, nous admettons que la force totale dérive d'un potentiel, c'est-à-dire en somme que l'éther est un fluide parfait. En réalité, cette hypothèse ne serait pas indispensable. Et quand elle n'est pas vérifiée, on doit avoir au lieu de $\frac{\partial \varphi}{\partial x, y, z}$, des composantes $h_{1,2,3}$. Or, elle intervient dans l'établissement du théorème de Lagrange-Helmholtz. C'est une raison de plus de ne pas voir de difficultés dans les conséquences de ce théorème relativement au passage du champ électrostatique au champ électrodynamique. Récapitulons donc que les phénomènes généraux et les lois principales de l'électrodynamique et de l'électrostatique s'obtiennent par la théorie hydrodynamique de l'électricité que nous avons tentée. Il faut en conclure notamment que, du moment que les lois principales de l'électrodynamique et de l'électromagnétisme ont pu être obtenues par nous au moyen de la dynamique rationnelle des fluides, avec évidemment toutes leurs conséquences, quant à la propagation des ondes notamment, il ne paraît pas possible de soutenir l'affirmation, souvent rencontrée dans les traités sur la relativité, qu'il y a opposition entre la mécanique rationnelle et l'électromagnétisme.

IV. — *Courant de déplacement.* — A l'état de l'éther qui constituerait l'électricité (voir paragraphe XII) serait applicable aussi la notion de mouvement. Les idées exposées ici sont donc qualitativement d'accord avec le phénomène que Maxwell nomme courant de déplacement. Pour qu'elles soient acceptables, il faut aussi que nous puissions rendre compte quantitativement de la théorie que Maxwell en donne. Un volume ε d'éther étant constitué par une densité électrique σ, si la vitesse est g, son énergie cinétique est $\frac{1}{2}\varepsilon\sigma g^2$.

Considérons à nouveau les équations (2). Posons $X_1 = X + \frac{d\varphi}{\partial x}$, etc... On vérifie facilement que l'on a:

$$G_1^2 + G_2^2 + G_3^2 = \frac{X_1^2 + Y_2^2 + Z_3^2}{L^2 + M^2 + N^2}$$

ou, en désignant par g le potentiel vecteur, par E_1 le vecteur $X_1 Y_1 Z_1$, et par l la force magnétique: $E_1^2 = g^2 l^2$.

Désignons par σ la densité électrique correspondant à XYZ c'est-à-dire la divergence de X Y Z et par σ_1 celle qui correspond aux mêmes lettres avec indice. Formons la divergence de $X_1 Y_1 Z_1$. On trouve, si l désigne la force magnétique:

$$l^2 - \Sigma \frac{1}{c^2} G_1 \frac{\partial X}{\partial t} = -4\pi\sigma_1 = -4\pi\sigma - \Delta\varphi$$

en tenant compte de la définition de la force magnétique d'après le potentiel vecteur, et du second groupe des équations de Maxwell. Dans tous les cas où la quantité figurant sous le signe Σ est nulle, il reste, si l'on tient compte aussi de la relation trouvée entre la force électrique E_1, la force magnétique l et la vitesse g:

$$\varepsilon E_1^2 = -4\pi\varepsilon\sigma_1 g^2 \ .$$

L'énergie $\frac{1}{2}\varepsilon\sigma_1 g^2$ représente donc bien au signe près la valeur $\frac{1}{8\pi}\varepsilon E_1^2$ de l'énergie électrostatique du champ, sur quoi peut être fondée la théorie du courant de déplacement. On établirait dès lors que la somme des énergies élémentaires en question représenterait le travail de courants d'intensité $i = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$, Φ désignant le flux de force électrique du champ.

Grâce au signe de cette intensité, le courant de déplacement irait en sens contraire de la force électrique du champ (du conducteur du potentiel le moins élevé à celui qui serait au potentiel le plus élevé s'il s'agit d'un courant de conduction ouvert entre deux conducteurs). Il fermerait bien ainsi le courant ouvert.

Il aurait évidemment mieux valu pouvoir obtenir la relation ci-dessus entre les lettres sans indices. Telle quelle, elle paraît intéressante.

V. — *Conclusions à tirer des coïncidences précédemment exposées.* — C'est sur l'analogie entre les équations de l'hydrodynamique et celles de l'électro-magnétisme que repose essentiellement la théorie hydrodynamique ci-dessus, de même par exemple que c'est sur l'analogie entre l'équation de l'optique géométrique et l'équation de Jacobi que repose la mécanique ondulatoire.

Il est certain qu'il faut être prudent vis-à-vis des analogies de forme. Cependant, l'analogie entre l'hydrodynamique et l'électrodynamique a lieu dans les six équations donnant X, Y, Z, L, M, N en fonction des potentiels vecteur et scalaire; elle a lieu, en outre, dans l'équation complémentaire, analogue à l'équation de continuité; elle a lieu entre l'expression de Lorentz de la force mécanique et nos équations (2).

Quand de telles analogies se maintiennent de la sorte, je pense qu'il faut y voir, *à moins d'autre explication positive* et en dépit *des causes purement géométriques d'analogie*, non pas une *coïncidence formelle*, mais l'indice *d'une cause physique profonde et cachée*. Le cas est le même que celui de l'analogie entre l'équation de Jacobi et l'équation de l'optique géométrique, analogie qui conduit à la mécanique de Schrödinger [1].

[1] Cette thèse est encore renforcée par le fait que l'identité de l'équation de Jacobi et de l'équation des ondes, sur quoi est fondée la mécanique ondulatoire, peut apparaître comme un cas limite de l'identité qui existerait d'après nous entre les équations hydrodynamiques et électromagnétiques.

Certes, il peut y avoir bien des manières, comme on sait, d'obtenir des explications mécaniques, mathématiquement valables, d'une théorie physique. Mais, ce qu'il y a de frappant ici, c'est que toutes les

VI. — *Figuration des phénomènes magnétiques.* — Dans un milieu où existent des forces magnétiques, l'éther serait donc animé de vitesses angulaires et, par suite, de vitesses linéaires. La connaissance de la nature des forces du magnétisme doit nous permettre d'en prévoir ou d'en expliquer les effets.

Au voisinage d'un aimant existent des courants d'éther dont les vitesses ont pour composantes G_1, G_2, G_3. Ces courants se continuent à l'intérieur de l'aimant; et si l'on vient à briser l'aimant, comme on ne brise point pour cela le courant, on s'explique que chacun des morceaux obtenus soit à son tour un aimant. Ceci nous conduit à considérer un aimant comme un corps qui présente, dans un sens déterminé, une grande perméabilité au passage de l'éther et qui est, dans ce sens, parcouru par des courants d'éther.

On s'explique que, si un corps présente au passage de l'éther une perméabilité plus grande que celle du milieu ambiant, le flux magnétique se concentre sur lui, on s'explique que des petits barreaux de fer placés dans le champ d'un aimant, ou d'un courant, ou qu'une boussole, s'orientent sous l'action de ce champ; ils tendent à se placer dans le sens du déplacement de l'éther qui les traverse; on s'explique l'aimantation induite.

L'éther qui entoure la terre et qui, au voisinage de la surface, est près de participer intégralement au mouvement de translation de la terre, mais pas beaucoup à sa rotation sur elle-même (expérience de Michelson et Galle de 1926), est soumis du fait de cette rotation, à un vent relatif et à des forces qui y font naître une tendance à prendre un mouvement tangentiellement au parallèle terrestre. Il ne le prend peut-être que partiellement par suite des obstacles susceptibles de l'entraîner plus ou moins dans le mouvement. Mais il n'en est pas moins placé dans un certain état de tension qui peut suffire pour diriger dans une direction sud-nord sensiblement, un barreau aimanté qui présenterait dans un sens transversal de plus grandes facilités au passage d'un courant d'éther. Ce serait là l'explication du magnétisme terrestre. La direction du courant d'éther autour

équations se présentent d'elle-mêmes sous la forme la plus favorable à leur identification, ainsi qu'à la généralisation des identités admises par la mécanique ondulatoire.

de la Terre aurait dû faire dès l'abord corriger la théorie de Larmor qui admettait que la direction de la force magnétique était la même que celle de ce courant. Celui-ci devant être dirigé suivant un parallèle, c'est bien plutôt au potentiel vecteur qu'il fallait penser à l'assimiler.

D'autre part, dans la translation de la Terre, la courbe de contact de la Terre avec un cylindre de génératrices parallèles à la vitesse de translation se déplace chaque jour sur la surface entière de la terre, pouvant entraîner des variations du champ magnétique s'il est dû au mouvement de la Terre dans l'éther.

Rappelons qu'au chapitre I, paragraphe XVIII, nous avons montré un rapprochement numérique entre la rotation de la Terre et son moment magnétique d'une part, et la gravitation d'autre part.

Ce gravomagnétisme, qui peut exister indépendamment d'un ferromagnétisme de surface, s'exprime quantitativement par la formule suivante: $g \cdot \frac{\mathfrak{M} c}{M} = \sqrt{K}$, M étant le moment magnétique de l'astre, M son moment de rotation propre, g un facteur numérique que nous avons suggéré de comparer avec le facteur de Landé. La question du gravomagnétisme a, sous des formes diverses, préoccupé beaucoup de savants; et M. Blackett donne à ce sujet, dans le numéro 159 de *Nature*, 17 mai 1947, de nombreuses références. Mais la formule ci-dessus elle-même, avec le sens que nous lui donnons, nous paraît bien avoir été donnée pour la première fois par nous-mêmes dans notre Ire partie [1]. M. Blackett la redonne avec le même sens, un peu moins de précision sur le facteur g, mais davantage de vérification expérimentales. Remarquons que, dans nos idées, de même qu'on peut avoir du magnétisme sans électricité préalable, par mouvements de l'éther dont la vitesse serait le potentiel vecteur, on pourra avoir aussi de l'électricité dynamique sans magnétisme préalable, chose qui ne nous paraît pas encore avoir été prévue et qui n'a pas été jusqu'ici vérifiée, ni même recherchée. Remarquons aussi qu'avec l'idée concernant l'interprétation du potentiel vecteur, ce n'est pas seulement la rotation propre qui produirait du magnétisme. Du fait du

[1] *Archives*, vol. 28, fascicule 4, juillet 1946.

mouvement de révolution de la Terre autour du Soleil, et du fait de son mouvement que nous appellerions absolu dans l'éther, chaque point de la surface de la Terre se trouve passer [1] deux fois par jour dans certaines régions où existerait un mouvement relatif de l'éther et de l'astre autre que celui de la rotation propre. D'où peut-être les variations diurnes, annuelles, séculaires du magnétisme terrestre en grandeur et en direction. Si l'on parvenait à éliminer les causes dues à la rotation propre et à la révolution annuelle, le résidu de magnétisme, s'il existait, pourrait, théoriquement, servir à la recherche du mouvement dans l'éther; tout cela serait à comparer avec les conclusions de notre Ire partie.

Revenons un instant au système de l'atome; nous pouvons remarquer que le rapport de la charge électrique élémentaire, soit $4{,}765.10^{-10}$ *u . e . s* à une masse qui serait 1847.10^{-9} *c. g. s.* aurait pour valeur:

$$\rho = \frac{4{,}765.10^{-10}}{1847.10^{-9}} = 2{,}58.10^{-4} = \sqrt{k}\,.$$

Or, le nombre 1847 est le rapport de la masse du proton ou du neutron à celle de l'électron; 1847.10^{-9} *c . g . s* est donc une masse formée avec l'unité 10^{-9} comme celle du proton l'est avec celle de l'électron. Ceci dit, considérons le moment magnétique du neutron, μ_g, ou plutôt sa valeur absolue $|\mu_g|$, égale à $1{,}935\,\frac{eh}{4\pi \mathrm{M}c}$, M étant ici la masse du neutron. Prenons pour h la valeur $6{,}50.10^{-27}$ *c . g . s.* On constate que $\frac{h}{4\pi}$ est justement égal à $\frac{1}{1{,}935}\,10^{-27}$ *c . g . s.*

On peut donc écrire, en désignant par 1 l'unité de moment de quantité de mouvement:

$$\left|\frac{\mu_g \cdot c}{1}\right| = \frac{e}{1847}\cdot\frac{10^{-27}}{0{,}9.10^{-27}} = \frac{10^{-9}\,\sigma}{0{,}9} = \frac{1}{3^2}\cdot 10^{-10}\sqrt{k}\,.$$

[1] *Archives*, vol. 28, fascicule 5, août 1946.

Le moment magnétique du proton diffère de celui du neutron, étant:

$$\mu_p = 2{,}795 \frac{eh}{4 \pi Mc} .$$

Il diffère de $|\mu_g|$ par un terme égal à $0{,}860 \frac{eh}{4 \pi Mc}$ que nous allons appeler μ_e. Or, 0,860 est exactement égal à $\left(\frac{2}{3}\right)^2 . 1{,}935$, de sorte que:

On peut considérer que le moment magnétique total du proton provient de la superposition de deux moments, l'un μ_g d'origine gravomagnétique, l'autre μ_e d'origine électro-magnétique.

Et ces deux moments, tous les deux liés à $\sqrt{k}$, ont des coefficients numériques assez curieux pour être signalés [1].

[1] Donnons ici quelques compléments sur les rapports numériques des distances a elles-mêmes des planètes du Soleil, à la distance de Mercure. Ces rapports sont les suivants:

$$1 \;;\; \left(\frac{15}{11}\right)^2 ;\; \left(\frac{8}{5}\right)^2 ;\; 2^2 ;\; \left(\frac{8}{3}\right)^2 ;\; \left(\frac{11}{3}\right)^2 ; 5^2 ;\; 7^2 ;\; 9^2 ;\; 10^2 ,$$

le cinquième rang étant relatif au groupe principal des petites planètes. M. Coliac a d'ailleurs étendu la loi aux autres groupes de ces petites planètes. Aux § VI et XII du chap. I de notre I^re^ partie (*Archives*, vol. 28, fascicules 4 et 5, juillet et août 1946), nous ne faisions que des allusions à ces résultats.

Comme les a et les $\frac{m}{a}$ sont ainsi, pour les planètes, avec beaucoup de précision pour les $\frac{m}{a}$ et un peu moins pour les a, dans des rapports de carrés entiers, il en résulte qu'il en est ainsi pour les masses m aussi, ce qu'on vérifie directement. C'est une chose dont les théories cosmogoniques ne tiennent pas compte et dont elles doivent tenir compte.

Pensons maintenant au système de l'atome, conformément à nos idées de base. La masse du proton vaut 1847 fois celle de l'électron, soit à très peu près 43^2; celle du méson valant environ 205 fois celle de l'électron, d'après les mesures les plus récentes, on voit que celle du proton vaut 3^2 celle du méson. Isolés, ces résultats n'auraient guère de sens; insérés dans notre ensemble, peut-être en prennent-ils un. Enfin, pour les planètes, les énergies de l'unité de masse étant dans les rapports des a, et les moments des quantités de mouvement de l'unité de masse dans les rapports des $\sqrt{a}$, on voit que ces énergies et ces moments dépendent des rapports de carrés donnés ci-dessus

En tout état de cause, entre μ_g et $|\mu_p|$ existe la relation curieuse et très bien vérifiée:

$$\mu_p = \frac{2^2 + 3^2}{3^2} |\mu_g| .$$

Le phénomène de la polarisation rotatoire magnétique, où le plan de polarisation de la lumière tourne d'un angle proportionnel à l'intensité du champ et à la distance parcourue par le rayon lumineux dans le sens des lignes de force du champ, permet de préciser que, dans certains corps, les filets composant les courants d'éther sont en forme d'hélices. La rotation de la direction des vibrations apparaît alors comme due à la composition de la vitesse de l'éther suivant ces filets avec la vitesse imprimée à chaque point par la vibration même. On sait enfin que des expérimentateurs, Macaluzo et Corbino, et récemment (1934) un expérimentateur anglais dont je m'excuse de n'avoir pu retrouver le nom ni la référence, ont découvert qu'un rayon de lumière polarisée placé dans un champ magnétique subit des modifications au point de vue de la vitesse de propagation, même dans le vide, d'après les expériences de 1934. Cela se conçoit, en effet; l'éther dans lequel se propage ce rayon étant en déplacement et la vitesse de propagation par rapport à l'éther étant supposée rester la même, la vitesse résultante par rapport à l'observateur peut varier, en plus ou en moins, selon le sens de la propagation. Ces expériences sont, à ce point de vue, à rapprocher de celle de Fizeau sur l'entraînement de l'éther. Il serait très intéressant de vérifier de nouveau ces résultats de l'expérience, en particulier dans le cas du vide; car s'ils se confirment, ils fourniront une autre base expérimentale sérieuse pour rejeter la proposition de la constance de la vitesse de la lumière et son caractère de vitesse limite qui selon la relativité, sont vrais dans un champ électromagnétique, du moins dans un champ faible et quel que soit, dans ce champ, le potentiel

de la même façon que les grandeurs correspondantes dans l'atome dépendent de rapports de carrés entiers. Ajoutons que la masse du neutrino serait $\frac{1}{4^2}$ de celle de l'électron.

vecteur. Il faudrait vérifier aussi que l'effet est maximum dans la direction du potentiel vecteur; l'expérience de Michelson et Galle rend la chose vraisemblable. Chemin faisant nous avons trouvé une raison de croire à la compressibilité de l'éther. Et dès lors la question pourra se poser de revoir s'il ne lui serait pas possible de propager des vibrations non seulement transversales, mais aussi longitudinales. Enfin, le mouvement d'un corps, même non électrisé, devrait créer un champ magnétique de potentiel vecteur parallèle à la vitesse; la chose serait seulement plus sensible si le corps en mouvement est électrisé.

VII. — *Vibrations lumineuses.* — La théorie des vibrations uniquement transversales rend un compte exact des phénomènes des interférences et de la diffraction; mais une théorie où la lumière serait constituée par des vibrations longitudinales et la lumière polarisée par des vibrations transversales en rendrait aussi bien compte, et par les mêmes moyens.

C'est l'expérience de la non-interférence des rayons polarisées dans des plans rectangulaires qui conduit à admettre que les vibrations de la lumière polarisée sont transversales et, d'ailleurs, perpendiculaires ou parallèles au plan de polarisation. Mais, ceci n'entraîne pas forcément que la lumière naturelle soit aussi faite de vibrations transversales.

Il est à remarquer d'ailleurs qu'un mouvement vibratoire longitudinal d'une tranche d'éther doit être accompagné d'un mouvement transversal, la condensation dans la direction de la propagation devant vraisemblablement entraîner une certaine dilatation perpendiculairement et inversement.

Nous disons ailleurs qu'une vibration longitudinale du grain d'éther serait accompagnée d'une oscillation transversale des grandeurs électromagnétiques qui lui sont liées.

Les vibrations longitudinales de la lumière naturelle permettent de donner un commencement d'explication du phénomène de la polarisation par réflexion et de la loi de Brewster, d'après laquelle le maximum de la polarisation est obtenu quand le rayon incident fait avec la normale au miroir un angle d'incidence i tel que $tg\ i = n$, n étant l'indice de la substance du miroir.

Cette relation entraîne, en effet, la perpendicularité du rayon réfléchi et du rayon réfracté dans la substance du miroir. L'éther de la vibration longitudinale pénètre suivant ce dernier rayon dans la substance et ne pouvant s'y déplacer en longueur, s'y étale dans le sens perpendiculaire au plan du rayon incident et du rayon réfracté, donnant ainsi une vibration transversale perpendiculaire au plan de polarisation qui est ici le plan d'incidence, et qui serait celle que transmet le rayon réfléchi.

On pourrait d'une façon analogue montrer que la réfraction polarise les vibrations longitudinales dans un plan perpendiculaire au plan d'incidence et qu'une loi, semblable à celle de Brewster, s'y applique. Il serait intéressant aussi de vérifier que le phénomène de Macalozo et Corbino ne se produit qu'avec de la lumière polarisée, car ce serait un indice de différence plus profonde que ne le disait Fresnel qui existerait entre la lumière naturelle et la lumière polarisée dont, d'un autre côté, il n'est pas établi expérimentalement qu'elles se propagent avec la même vitesse exactement. Il serait très intéressant de l'établir. A cet effet des dispositifs expérimentaux simples, d'ordre interférentiel, peuvent être imaginés.

Je ne sache pas que, jusqu'ici d'ailleurs il ait été fourni d'explications satisfaisantes de l'extinction par un miroir, sous une incidence convenable, d'un rayon polarisé rectilignement. Un tel rayon, polarisé par réflexion sur un miroir M dans le plan d'incidence RMM′, étant reçu par un second miroir M′, le rayon réfléchi une seconde fois a son intensité minimum quand les deux plans d'incidence RMM′ et MM′ R′ sont rectangulaires, et il s'éteint quand l'incidence sur le second miroir est de 55°.

Le rayon réfléchi par le premier miroir MM′ est alors perpendiculaire à la trace M′ A′ du premier plan d'incidence sur le second miroir. En effet, le plan RMM′ étant perpendiculaire à MM′ R′ contient la perpendiculaire à ce plan en M′ laquelle est aussi perpendiculaire à la normale M′ N′ au miroir. Elle est donc contenue dans le miroir. Et elle est aussi perpendiculaire à MM′. Les vibrations transversales qui sont contenues dans le plan d'incidence sur le second miroir rencontrent donc parallèlement la droite en question du second miroir. Si un fil conducteur est disposé suivant cette droite, elles pourront donner dans ce fil des émissions électriques, comme les vibrations longitudinales ont pu en donner elles aussi sur le miroir M pendant leur polarisation. L'énergie lumineuse ne doit donc pas apparaître comme détruite pendant la polarisation, ni pendant l'extinction du rayon polarisé. Elle doit apparaître comme transformée en énergie électrique ou calorifique.

Et si l'on arrivait par quelque redresseur à éliminer l'une des demi-vibrations se propageant dans le conducteur, peut-être pourrait-on effectivement recueillir l'énergie mise en jeu dans les phénomènes de polarisation et d'extinction.

VIII. — *Figuration des phénomènes électrostatiques.* — S'il est susceptible de compressions et de dilatations et s'il peut transmettre des vibrations longitudinales lumineuses, l'éther, peut être considéré comme susceptible de transmettre des vibrations longitudinales dont la partie compression, par exemple, développe une force plus intense que la partie dilatation, ou inversement.

Imaginons un corps dont la surface est en vibration normalement à elle-même et qui soit tel que la résistance à la partie extérieure, par exemple, de la vibration soit moindre que la résistance à la partie intérieure. Les vibrations de cette surface créeront dans l'éther environnant un train de vibrations longitudinales dans lesquelles la demi-vibration comprimant l'éther jusqu'ici immobile y développera une force plus grande que celle que restituera l'éther dans la dilatation qui suivra. Appelons ces vibrations du nom de positives et le corps émetteur du nom de corps vibrant positivement; on imaginerait de même ce que peuvent être des corps vibrant négativement et des vibrations négatives.

L'équation donnant le déplacement ψ d'un élément serait:

$$\psi = \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix} \left\{ \cos 2 \pi \Phi \right\}$$

le coefficient a_1 s'appliquerait à l'une des demi-vibrations; le coefficient a_2 à l'autre; du moment que les forces développées à chaque demi-vibration positive ou négative de la vibration longitudinale complète sont inégales, il est vraisemblable que les amplitudes a_1 et a_2 ne seront pas égales en chaque point. Il est possible d'établir qu'en première approximation, la force macroscopique résultante est proportionnelle à la différence $a_1 - a_2$. J'appellerai cette différence la « caractéristique première de force du champ ». Voici comment on peut se rendre compte de la propriété en question. Si les dimensions du corpuscule sont petites relativement à la longueur d'onde, la force agissant sur lui peut être considérée comme une fonction sinusoïdale du temps ainsi que l'onde elle-même. Dans une période $\frac{1}{\nu}$, la valeur moyenne de la force est donc proportionnelle à :

$$2\nu \int_0^{\frac{1}{2\nu}} a_1 \sin 2\pi\nu t \, dt + 2\nu \int_{\frac{1}{2\nu}}^{\frac{1}{\nu}} a_2 \sin 2\pi\nu t \, dt ,$$

c'est-à-dire :

$$\frac{2}{\pi}(a_1 - a_2) .$$

Elle est d'autre part proportionnelle à la fréquence. En définitive elle est donc proportionnelle à $\nu(a_1 - a_2)$. Du moins il en serait ainsi si les amplitudes a_1 et a_2 étaient afférentes chacune à une demi-période exactement. Or, il n'en est certainement pas ainsi. Il faut évidemment tenir compte des vitesses différentes avec lesquelles sont décrites les amplitudes a_1 et a_2, et la valeur ci-dessus de la caractéristique de force du champ doit sans doute être tenue pour proportionnelle à :

$$\nu\left(\frac{a_1}{\tau_1} - \frac{a_2}{\tau_2}\right)$$

τ_1 et τ_2 étant les deux parties de la période. Cette valeur s'écrit aussi :

$$4\nu^3(a_1\tau_2 - a_2\tau_1) = \nu^2(b_1 - b_2) ,$$

b_1 et b_2 désignant deux nouvelles grandeurs voisines de a_1 et a_2.

Si le mobile n'est pas de dimensions très petites, la valeur moyenne de cette expression dans le volume du mobile doit être proportionnelle au potentiel macroscopique du champ.

On appelle longueur d'onde la longueur dont il faut se déplacer à temps constant dans la direction de propagation de l'onde (l'axe de x, par exemple) pour faire varier la phase Φ de l'unité.

Soit λ_1, la longueur dont il faut se déplacer à temps constant pour faire varier Φ de $+1$; soit λ_2 la longueur correspondante à une variation de Φ de -1. En général Φ étant fonction non linéaire de x, les deux nombres λ_1, λ_2, ne seront pas égaux.

Chacune des deux fonctions a_1 et a_2 qui ne sont pas simultanées, mais s'appliquent respectivement à chacune des demi-vibrations, vérifie l'équation de propagation de l'onde. La fonction a qu'elles composent à elles deux la vérifie donc. En somme a est une fonction de x, y, z ou de x, y, z, t qui est discontinue pour les valeurs du temps correspondant au passage de la grandeur oscillante par sa position d'équilibre, c'est-à-dire pour les valeurs $\left(\frac{2k+1}{4}\right)$ de la phase, k étant un nombre entier.

Supposons que dans le champ d'un corps à vibrations positives, par exemple se trouve un autre corps perméable à ces vibrations. Comme tout se passe comme si chaque point du champ était sollicité successivement, à chaque demi-période, par deux forces de sens différent et inégales, on comprend que la face du second corps tournée vers le premier va être animée de vibrations dont la demi-vibration dirigée vers l'intérieur du corps sera la plus intense, c'est-à-dire de vibrations négatives, tandis que l'autre face sera animée de vibrations positives représentant une énergie égale à celles des vibrations négatives [1]. Il y aura une ligne neutre qui, si le premier corps est un point, sera la courbe de contact du cône circonscrit de ce point au second corps.

On reconnaît là la figure de l'influence électrique et l'on peut voir dans les vibrations inégales une figure de l'électricité statique, qui n'est d'ailleurs point contraire à l'existence des électrons.

[1] Il est possible que le mouvement du corps influencent dans l'éther fasse subir à l'onde, si elle existe, une modification. Aussi se pourrait-il que, faisant passer des électrons dans un cylindre de Faraday très long et sans fond, on constatat que les charges induites dépendent des vitesses.

On peut également voir dans ces vibrations la cause des tensions et des compressions de Maxwell. Il en résulte évidemment une sorte de pression de radiation.

J'appellerai ces ondes du nom d'ondes de force électrostatique. Ce sont peut-être les mêmes que celles que nous avons rencontrées au chapitre III.

IX. — *Figuration des ondes électromagnétiques.* — Ces ondes sont toujours polarisées. Elles transmettent une force électrique et une force magnétique perpendiculaire entre elles et à la direction de propagation. A un instant donné, sur la surface d'une telle onde ont donc lieu d'autres ondes du type électrique positif ou négatif, ou des mouvements du type magnétique; ces ondes secondaires se propagent, de même que les mouvements ont lieu, normalement à la direction de l'onde électromagnétique.

X. — *Figuration des phénomènes de la gravitation.* Les corps matériels, tels que les astres, tendant à perdre continuellement de leur énergie interne, de leur chaleur en particulier, tendent à se contracter. Par suite de leur élasticité, il est à croire que cette contraction s'effectue par vibration du type négatif que transmet ensuite l'éther par vibrations longitudinales négatives. On peut voir là une figuration de la gravitation. On s'explique l'attraction, la loi de l'inverse du carré des distances. On conçoit la possibilité de la non-application intégrale de la force suivant le mouvement du corps qui y est soumis, fait important qui servira dans les chapitres suivants. Le frottement de l'éther contre les corps célestes devrait ralentir leur mouvement; mais ce frottement, transformé en énergie calorifique ou autre, augmenterait l'énergie interne, l'intensité des vibrations et l'attraction, de telle sorte qu'à chaque instant il y aurait compensation presque exacte entre le ralentissement dû au frottement et l'accélération due à l'augmentation de l'attraction. Par suite de la tension ou de la compression de l'éther réalisée par le genre de vibrations électriques ou gravifiques que nous sommes ainsi conduits à envisager, l'éther apparaît dans son aspect macroscopique comme recélant des pressions ou des tensions, ou si l'on veut encore, comme présentant entre ces divers éléments des forces de cohésion.

J'appellerai ces ondes du nom d'ondes de forces gravifiques.

La considération des ondulations longitudinales, concuremment avec celles des ondulations transversales, permet ainsi l'explication, en principe, *des chocs*, au sens étendu du mot, et, plus généralement *des interactions*. On sait d'ailleurs que la mécanique quantique est arrivée elle aussi à la considération de telles ondes longitudinales et transversales, aussi bien pour les corpuscules chargés que pour les corpuscules neutres. La seule différence, là encore, sera que, dans notre idée, l'onde sera liée au champ et non pas au corpuscule, comme nous l'avons exposé plusieurs fois, notamment dans notre 1re partie. Au lieu de dire que, par exemple, dans l'interaction électro-statique coulombienne, deux particules électrisées n'agiraient pas directement l'une sur l'autre, mais que chacune d'elles interagirait avec le champ électromagnétique ambiant, par émission et absorption de photons, nous dirions que ces particules interagiraient avec le milieu ambiant, composé aussi de corpuscules. La différence serait assez près de n'être plus qu'une question de mots, non négligeable d'ailleurs. D'une autre manière, nous pouvons dire qu'en quelque sorte, en repeuplant l'espace d'un nombre immense de corpuscules de toute sorte (peut-être réductibles à un plus petit nombre de types), électrons, protons, photons, mésons, gravitons, etc... on a créé un substratum nouveau, différent de l'éther géométrique d'Einstein, mais assez peu différent du nôtre, à qui nous ne demandons que d'être composé de parties pouvant être suivies dans le temps.

Le photon, dont on a pu calculer, de façon approchée, la masse, extrêmement petite par rapport à celle de l'électron, serait en quelque sorte le grain ultime d'éther. On objecte à cela que la vitesse des astres ou des électrons atomiques serait freinée par ces grains d'éther. Mais le frottement se traduirait par un gain d'énergie de l'astre, et pas forcément par une augmentation de la masse pesante, de sorte qu'il pourrait y avoir une compensation au freinage. D'une autre façon, compte tenu des formules du potentiel et de la force que nous établirons au chapitre VII, on peut voir que chocs ou frottements, agissant sur la vitesse de l'astre ou de l'électron, agissent par le fait même sur la force, et par suite peuvent avoir sur la vitesse un effet compensateur. Seules seraient stables les trajectoires pour lesquelles cette compensation aurait lieu. Et cela serait de nature à faire entrevoir comment il peut y avoir des trajectoires sur lesquelles l'électron ne rayonne pas, contrairement aux lois de l'électrodynamique. Car enfin les théories mêmes les plus modernes admettent ce fait mais ne l'expliquent pas; et il faudrait l'expliquer. Seul M. Varcollier y a tâché, à notre connaissance. Resterait à montrer que les trajectoires stables par suite de compensation sont les mêmes que celles que donne la théorie de la résonance en mécanique ondulatoire.

La force à laquelle donne lieu les ondes gravifiques serait elle aussi proportionnelle à $\nu^2(b_1 - b_2)$. Or, la fréquence ν, d'après ce que nous avons dit au paragraphe XI de notre chapitre I aurait pour valeur $\frac{k}{2\pi}\sqrt{\frac{KM}{r^3}}$, k étant un nombre entier, K la constante de la gravitation, r la distance au centre de la masse M qui crée le champ. La force serait donc proportionnelle à

$$\frac{M}{r^3}(b_1 - b_2) .$$

Quant à $b_1 - b_2$, ce serait, si le mobile envisagé est supposé soumis à la même force que s'il était sans vitesse dans le champ, une fonction de r. Supposons-la développable suivant les puissances de r en la bornant à la cinquième:

$$b_1 - b_2 = \alpha + \beta_1 r + \beta_2 r^2 + \beta_3 r^3 + \beta_4 r^4 + \beta_5 r^5 .$$

Pour r extrêmement petit, nous trouvons une formule de la force en $\frac{1}{r^3}$, comme cela semble exister dans la région centrale de l'atome. Pour r plus grand, le terme en $\beta_4 r^4$ commence à l'emporter; la force prend alors la forme de celle de la théorie newtonienne; pour r encore plus grand, nous avons une force en $\frac{1}{r}$, puis une constante sensiblement dans un domaine pas trop étendu; r croissant encore, le terme en $\beta^4 r_4$ donne la prépondérance à une formule de force de la forme A . Mr. Il y correspond, par l'équation:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \mathrm{A.M}r$$

une vitesse qui, avec la condition théorique de s'annuler pour $r = 0$, est proportionnelle à r; on reconnaît là une propriété de la zone d'expansion de l'univers de Lemaître, avec une possibilité d'interprétation de la constante dite cosmique.

Mais, au delà, tout pourrait encore changer de nouveau.

XI. — *Masse de l'électricité.* — La force électrique étant de la nature d'une accélération, et son produit par une quantité d'électricité étant de la nature d'une force, la quantité d'électricité apparaît comme de la nature d'une masse mécanique. L'électricité et la matière seraient alors des condensations de l'éther à des degrés divers ou sous des forces diverses, la première étant intermédiaire entre la matière et l'éther, et pouvant exister sans support matériel. La masse d'un corps matériel varierait, mais très peu, selon la quantité d'électricité qu'il supporterait.

XIII. — *Attractions et répulsions en électrostatique et magnétisme. Potentiel électrique.* — Les considérations qui précèdent permettent d'élucider le fait, bien connu ,mais très peu clair, d'après lequel une même charge électrostatique attire ou repousse une charge de signe contraire à elle ou de même signe qu'elle. Il existe des explications de la loi du carré des distances, mais, à ma connaissance, il n'existe pas d'explication de ce fait du renversement du signe de la force suivant le signe de la charge. On comprendrait qu'une même charge attirât ou repoussât toujours; on ne distingue pas pourquoi tantôt elle attire et tantôt elle repousse. Mais, puisque l'électrodynamique nous apparaît comme une hydrodynamique de l'éther, l'idée vient que l'électrostatique pourrait apparaître comme une hydrostatique de cet éther.

Soit un corps électrisé positivement par exemple. Il émet des ondes de force électrostatique, à demi-vibrations inégales, d'où résulte dans l'éther une tension macroscopique et, en définitive, la force électrique du champ qui, par exemple, agit dans le sens de la répulsion. Soit d la densité de l'ensemble de l'éther où règne le champ. Soit d' la densité d'une portion de cet éther. Soit f la force avec laquelle le champ repousse l'unité de masse de l'éther. La masse d' d'éther sera repoussée avec la force fd'; mais d'après le principe d'Archimède, une force fd agira en sens inverse. La force résultante sera $f(d' - d)$; elle sera attirante si d' est inférieur à d; l'éther de densité d' sera dit alors être de l'électricité négative; la force sera repoussante si d' est supérieur à d, et l'éther de densité d' sera dit être de l'électricité positive. L'électricité statique peut donc être considérée comme un agrégat d'éther, de densité supérieure ou inférieure à celle de l'éther ambiant. Si le centre électrostatique était électrisé négativement, la force f serait attirante; une portion d'éther de densité $d' < d$, c'est-à-dire de l'électricité négative sera repoussée; une portion de densité $d' > d$, c'est-à-dire de l'électricité positive, sera attirée. C'est bien ce qu'il faut pour que la figuration ainsi donnée puisse être soutenue.

La quantité d'électricité apparaît ainsi comme proportionnelle, à la différence $d' - d$ entre la densité de l'éther du milieu électrisé et celle de l'éther ambiant. Plus exactement, ce serait le potentiel électrique qui serait proportionnel à cette différence. Toutefois cela ne serait exact que pour les différences $d' - d$ relativement petites par rapport à chacun des termes de la différence. Reprenons le calcul fait au paragraphe I pour l'obtention du second groupe des équations de Maxwell. Avec le système d'unités choisi, l'une des équations de ce groupe serait:

$$\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial Z}{\partial t}$$

c étant la vitesse de la lumière.

Pour que l'équation trouvée au paragraphe I puisse se mettre sous cette forme, il faut que soit vérifiée la condition suivante, dite équation complémentaire qui, dans nos idées, est la transcription de l'équation de la continuité de l'hydrodynamique:

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y} + \frac{\partial G_3}{\partial z}$$

La quantité $\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$ s'introduit aussi dans le second groupe des équations de Maxwell. On a, d'après les équations (3):

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = -\Delta H - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y} + \frac{\partial G_3}{\partial z}\right) = -\Delta H + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}.$$

En tout point où la fonction H permet d'annuler le second membre, on a:

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0 .$$

Quand la fonction H donne, au contraire, au second membre la valeur P, on reconnaît que P désigne la densité de charge électrique de la théorie classique.

Le potentiel vecteur représentant une vitesse, si ω est le volume d'un élément d'éther, on sait que la divergence de ce vecteur représente la vitesse de variation du volume divisée par ce volume; elle a donc la valeur $\frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{dt}$.

Supposons de plus que la composante G_3 du potentiel vecteur ne dépende pas du temps, de sorte que $Z = -\frac{\partial H}{\partial z}$. L'équation complémentaire donne alors (dans certains cas):

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{1}{\omega}\frac{\partial \omega}{\partial t},$$

d'où:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\omega}\frac{\partial \omega}{\partial t}\right) = \frac{\partial^2 \log e\,\omega}{\partial z\,\partial t}.$$

Par suite:

$$Z = \frac{c^2}{\omega}\frac{\partial \omega}{\partial z}$$

à une constante près.

La force électrique sera proportionnelle à la compression. La fonction potentielle sera $-c^2 \log e\,\omega$.

La masse ne variant pas, le volume de l'élément est inversement proportionnel à sa densité d'. La fonction potentielle peut donc être prise égale à $c^2 \log_e d'$, en désignant par d' une densité supérieure ou inférieure à la densité d de l'éther homogène ou, si l'on veut, à $c^2 \log \frac{d'}{d}$. Si d' est voisin de d, cette expression est peu différente de $c^2 \frac{d' - d}{d}$. Le potentiel est donc bien alors sensiblement proportionnel à la différence $d - d'$.

Par contre si, par exemple, d' est nul, le potentiel est infiniment grand et négatif. C'est bien ce qu'il faut. Il est assez curieux de remarquer que nous arrivons ainsi à la conception de ce que peut être le vide d'éther. Dans une partie de l'espace où ce vide serait assez poussé, par suite de la présence d'un potentiel très grand et négatif, la lumière si elle est bien une ondulation de cet éther, ne devrait pas se propager, ou ne devrait se propager que difficilement. Il serait donc intéressant de faire passer un rayon lumineux dans une telle portion d'éther pour en observer les effets sur ce rayon. Une telle portion d'éther serait aussi un écran électrique ou gravifique.

XIII. — *Interprétation de la théorie de Weyl.* — Dans la géométrie de Weyl on est amené à considérer l'intégrale :

$$\int G_1 \, dx + G_2 \, dy + G_3 \, dz = H \, dt$$

où les G et H sont les composantes d'un quadrivecteur qu'on cherche à identifier avec les potentiels scalaire et vecteur de l'électromagnétisme.

Cette intégrale est le logarithme de la variation de ce qu'on appelle la longueur généralisée d'une règle quand on déplace cette règle d'un point A à un point B. On recherche les conditions pour que la longueur généralisée soit intégrable. Il faut et il suffit que, quand on passe du point A au point B, l'intégrale ne dépende pas du chemin suivi, c'est-à-dire que l'élément différentiel soit une différentielle exacte. Ceci conduit aux conditions :

$$\frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z} = 0 \,, \qquad \text{etc., } \ldots$$

$$\frac{\partial G_1}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \,, \qquad \text{etc., } \ldots$$

Ce sont les équations du champ électromagnétique quand les forces électrique et magnétique sont nulles. La longueur est intégrable quand, dans l'intégration, on ne rencontre pas de champ électromagnétique. Si on en traverse, les équations ci-dessus se complètent par des seconds membres (forces électrique et magnétique) et la longueur n'est pas intégrable.

Dans nos idées, l'intégrale peut s'écrire, appliquée à l'élément d'éther de vitesse $G_1 = \frac{dx}{dt}$, etc...:

$$\int (G_1^2 + G_2^2 + G_3^2 - H)\, dt \, .$$

Remplaçons H par sa valeur $T + U + \varphi$ avec les notations du paragraphe I, en comprenant dans U la valeur $\int \frac{dp}{\rho}$. Supposons vérifiées les conditions ci-dessus de Weyl et cherchons à les interpréter. D'après nos équations (2) φ est alors le même en tout point de l'espace; on peut donc dans les conditions trouvées, ainsi que dans les intégrales ci-dessus, remplacer H par $H - \varphi = T + U$. Or: $G_1^2 + G_2^2 + G_3^2 = 2\,T$.

L'intégrale s'écrit finalement: $\int (T - U)\, dt$. Les conditions trouvées équivalent alors à l'application du principe de la moindre action et à grad. $\varphi = 0$; le second groupe de trois conditions notamment n'exprime pas autre chose que les équations fondamentales de la dynamique.

On verrait que, dans le cas général, la géométrie de Weyl est encore équivalente à l'application du principe newtonien de la moindre action, avec grad. $\varphi \neq 0$. Cela n'est pas pour nous surprendre; nous avons reconnu que les équations électromagnétiques n'étaient autre chose que des équations hydrodynamiques; nous ne doutions par conséquent pas de pouvoir les déduire des principes généraux de la dynamique.

XIV. — *Autre manière de présenter la théorie précédente.* On peut essayer de voir à quelles conditions on réussirait à exposer les résultats précédents sans employer le mot d'éther.

Tant qu'on emploierait les relations (2) sous forme de relations entre le potentiel vecteur et les forces électrique et magnétique, il ne serait pas impossible d'y arriver. En fait, comme les équations électromagnétiques coïncideraient avec les équations hydrodynamiques, on peut penser qu'on ne ferait ainsi que sous-entendre le mot d'éther.

Mais dans certains des résultats obtenus, il a été nécessaire de remplacer explicitement G_1 par $\frac{dx}{dt}$. Si l'on admet ces résultats, il serait nécessaire, pour continuer à se passer du mot d'éther, d'introduire un déplacement électromagnétique dx, dy, dz, distinct évidemment du déplacement électrique de Maxwell.

Il y a enfin à observer de nouveau en cette fin de chapitre que, puisque nous admettons un éther hydrodynamique, nous ne pourrons pas conserver dans son essence la doctrine relativiste et que, par suite, nous devrons pouvoir rendre compte autrement des faits expliqués par elle.

Or, cette doctrine a connu de tels succès quantitatifs, et si nombreux, qu'il faut, à priori, penser qu'on n'expliquera tous ces faits qu'en conservant, dans un autre langage, l'appareil mathématique de la relativité. C'est ce que nous nous efforcerons de faire [1].

[1] Remarques complémentaires au sujet de la note [2], § VI du présent chapitre, p. 107. — La loi suivant laquelle les distances moyennes des planètes au Soleil sont avec celle de Mercure dans des rapports simples de carrés parfaits a été mise pour la première fois par M. H. Coliac sous la forme de loi récurrente dans laquelle les distances sont représentées par des carrés de nombres entiers *successifs* de 3^2 à 11^2, c'est-à-dire de Mercure à Jupiter inclus, les petites planètes étant représentées, groupées en quatre anneaux, par 7^2; 8^2; 9^2; 10^2. Cette forme de loi est très intéressante. Elle a été obtenue par M. Coliac suivant une méthode bien meilleure que l'artifice que nous avons employé pour cela, à savoir la simple multiplication par 3^2 des rapports de carrés. Au delà de Jupiter, les nombres entiers élevés du carré ne sont plus successifs. Si on les considère vraiment comme des niveaux, il y aurait des niveaux inoccupés, ce qui n'est pas étonnant. La loi présente deux écarts sensibles pour Vénus et la Terre et un écart important pour Neptune. Mais si, toujours par analogie avec l'atome, on admet l'existence de « demi-quanta », avec nombres quantiques demi-entiers, on fait disparaître l'écart en prenant le n de Neptune égal à $26 + \frac{1}{2}$, le nombre exact pour Neptune étant $(26, 49)^2$. Les deux autres écarts, plus petits pourraient disparaître pour raisons de « structure fine ». La loi étant alors bien acceptable sous cette forme, on pourrait, à l'aide de ces valeurs de n, calculer l'ordre de grandeur de la valeur de notre h_0 du § XII de notre chap. I, I[re] partie (*Archives*, fascicule 4, 1946).

En ce qui concerne les satellites, on trouve, pour les quatre pla-

TROISIÈME PARTIE

REVISION DES THÉORIES FONDAMENTALES DE LA PHYSIQUE CONTEMPORAINE DISCUSSIONS ET CONCLUSIONS

Chapitre VII.

Interprétation de la dynamique de la relativité.

I. — *Essai d'une dynamique newtonienne des champs de forces naturels.* Il est presque évident que dans tout champ de forces qui agit par actions de milieu, l'action du champ sur un point matériel ne doit pas être la même suivant que ce point matériel est au repos en un point du champ ou, au contraire, qu'il se trouve passer en ce point avec une certaine vitesse dirigée suivant une certaine direction. Simplement pour faire comprendre ce que l'on veut dire, on peut pour le champ électromagnétique, par exemple, donner de cet effet la figuration suivante, où entrent en jeu les tensions de Maxwell. Dans le champ d'une charge électrique ou d'une masse magnétique, supposée immobile en un point d'une portion d'éther, imaginons que soit d'abord au repos une autre charge électrique ou une

nètes qui en ont plusieurs, que la loi des rapports de carrés demeure assez bien vérifiée, quoique avec des rapports qui ne sont pas toujours très simples dans les systèmes de Jupiter et de Saturne. On peut essayer de mettre cette loi sous la forme récurrente trouvée pour les planètes par M. Coliac. Pour les deux satellites de Mars, on voit que leurs distances 2,77 et 6,95 sont entre elles, à peu près, comme 5^2 et 8^2. Dans le système d'Uranus, les quatre satellites ont pour distances: 7,71; 10,75; 17,63; 23,57. Ces distances sont entre elles comme 16; 22,30; 36,58; 48,91, c'est-à-dire à peu de chose près comme les carrés des nombres entiers *successifs* 4, 5, 6, 7, avec une réserve (disons de « structure fine ») pour le second. La loi de M. Coliac trouve ainsi dans ce système une confirmation intéressante.

autre masse magnétique. Entre ces deux charges ou ces deux masses existe une certaine force représentée par des tensions et compressions qui s'exercent par l'intermédiaire du milieu. Admettons, sans penser que cela se passe ainsi en réalité, que la tension puisse être comparée à un ressort tendu entre les deux points où se trouvent les charges et dont l'extrémité se contracte avec une certaine vitesse, que nous désignerons par c. Ces deux charges étant en repos dans l'éther, la tension s'applique intégralement. Quand la charge secondaire vient à passer au point du champ envisagé avec une certaine vitesse, la tension ressort ne s'applique plus intégralement ; si, par exemple, la charge est animée précisément de la vitesse c avec laquelle se contracte le ressort, il est bien évident que l'action du ressort et, par suite, celle du champ, sera nulle sur la charge. Cette vitesse c prend ainsi figure de vitesse limite que le corps ne peut dépasser dans le champ en l'absence d'autres forces.

Il n'y a rien là qui soit contraire au second principe de la dynamique newtonienne. Ce principe énonce deux Lois distinctes. D'une part, l'effet d'une force sur ce point matériel est le même quelle que soit la vitesse du point ; d'autre part, il n'est pas modifié par la présence d'autres forces. Mais il est bien évident que la première partie de cet énoncé suppose que la même force puisse s'appliquer quelle que soit la vitesse du point. Le principe n'intervient qu'au moment où on a la certitude que la même force est appliquée ; et la discussion nécessaire pour arriver à cette certitude est du domaine de la physique, en ce qui concerne les champs de forces naturels.

Examinons les choses de plus près. Soit un champ de force quelconque, occupant une partie de l'espace. La force que ce champ exercerait sur un point matériel, immobile en un point déterminé de ce champ est, par exemple, F, dont les composantes suivant trois axes rectangulaires fixes sont X, Y, Z, fonctions de diverses variables, en particulier des coordonnées x, y, z du point. Si le point matériel est en mouvement et passe avec la vitesse V (u, v, w) au point du champ en question, il se pourra que la force soit la même, mais il se pourra aussi, suivant la structure du champ, que la force qui agit véritablement sur le corps ne soit pas F, mais une force F′ dont les composantes

X′ Y′, Z′ seront liées aux composantes X, Y, Z par des relations de la forme:

$$X' = X \times f_1(u, v, w)$$

$$Y' = Y \times f_2(u, v, w)$$

$$Z' = Z \times f_3(u, v, w)$$

ou par des relations plus compliquées encore.

Pour qu'on puisse considérer un champ de forces naturel, c'est-à-dire physique, comme défini, il faudra donc pouvoir énoncer deux lois:

1° *La loi qui définit la force X Y Z agissant sur un point au repos au point x, y, z du champ.*

2° Celle qui permet de passer de la force X Y Z à la force X′ Y′ Z′ qui s'exerce sur le même point matériel lorsqu'il passe en x, y, z avec la vitesse u, v, w.

La seconde de ces lois n'avait été donnée jusqu'ici pour aucun des deux principaux champs naturels, ni pour le champ gravifique, ni pour le champ électromagnétique. C'était là une lacune grave dans l'édifice de la science.

La théorie de la relativité s'est trouvé conduite à combler cette lacune, non point par hasard d'ailleurs, mais pour des raisons profondes qui sont des raisons de similitude, similitude de principe, similitude de démarche.

C'est à montrer les possibilités d'explication d'une telle remarque qu'est consacré le présent exposé. Il y s'agit surtout de montrer que le principe *lui-même* de relativité (qui constitue sinon la plus importante, du moins la partie essentielle de cette théorie) n'est nullement indispensable pour rendre compte des phénomènes expérimentaux où l'on en voit des vérifications. Et, d'abord, de montrer que tous les phénomènes d'ordre dynamique dont fait état la relativité sont parfaitement compatibles avec la mécanique newtonienne, compte tenu du fait que la force réellement appliquée peut varier avec la vitesse du corps sur lequel agit le champ. On reconnaît là des idées qui sont proches parentes de celles qu'a exposées M. Varcollier sous le nom général d'aberration des champs [1], et qui elles-mêmes se rapprochent d'idées de Painlevé [2]. La théorie de M. Varcollier est très élaborée. D'autres tentatives, qui ont aussi un fonds commun avec la nôtre, mais qui nous paraissent moins au point que celle de M. Varcollier ont été émises à plusieurs reprises, notamment par Milne. Nous préférons la théorie de M. Varcollier à celle de Milne, encore un peu trop métaphysique à notre gré, à cause de l'introduction de son temps cinématique et de son temps dynamique [3].

Ces phénomènes dynamiques dont fait état la relativité sont: le mouvement séculaire du périhélie des planètes, la déviation des rayons lumineux par le soleil, le déplacement des raies du spectre solaire, la variation de la masse, le spectre des rayons X, la structure des raies de l'hydrogène.

Si, dans le champ de gravitation d'un centre unique, de masse newtonienne M, l'action du champ sur un corps de masse unité dépend de la vitesse de ce point dans le champ, il n'y a plus de potentiel. Faisons cependant l'hypothèse, pour serrer du plus près qu'il est possible, la théorie newtonienne, que le travail dépensé sur le corps par le champ, lors du passage du corps d'un point A à un point B du champ par des trajectoires différentes pour suivre ensuite, à partir du point B, la même trajectoire, est indépendant du chemin suivi. Si la force était fonction de point, cela veut dire qu'il y aurait potentiel, mais ce n'est pas le cas.

1° — Supposons, toujours dans le cas du point attirant unique, un mobile situé d'abord à l'infini, et possédant une certaine énergie totale W et une énergie cinétique T. Définissons l'énergie que nous appellerons potentielle par:

$$T + U = W\ .$$

Si la force était fonction de point, la fonction potentielle serait aussi fonction de point. Ici, la fonction U, que nous continuerons d'appeler fonction potentielle dépendra des coor-

[1] VARCOLLIER, *op. cit.*
[2] PAINLEVÉ, *Comptes rendus*, *174*, 1922, 1143.
[3] *Relativity, Gravitation and World—Structure*, Oxford, 1935.

données du point du champ où se trouve le mobile et de la vitesse u, v, w avec laquelle le mobile y passe. Elle se réduira à la fonction potentielle de point quand on y fera $u = v = w = 0$. Elle sera de la forme $U = f(x, y, z, u, v, w)$. Supposons-la développable en série de Mac-Laurin par rapport à u, v, w. Si u, v, w ont des valeurs relativement petites, on pourra, dans le développement s'en tenir aux termes du second degré en u, v, w, c'est-à-dire écrire:

$$U = f(x, y, z, O, O, O) + \Sigma_{uvw}\, u f'(x\, y\, z\, O\, O\, O)$$
$$+ \frac{1}{2} \Sigma_{uvw}\, u^2 f''_u (x\, y\, z\, O\, O\, O) \; .$$

D'autre part, si l'on considère, non plus le potentiel en un même point du champ sur des mobiles animés de diverses vitesses, mais le mouvement continu d'un même mobile dans le champ sous l'action du champ, il existe dans ce mouvement des relations entre les coordonnées du mobile et les composantes de sa vitesse. Il existe donc une fonction $a_1(x\, y\, z)$ telle que: $f'_u(x\, y\, z\, O\, O\, O) = u \,.\, a_1(x\, y\, z)$ et deux autres fonctions a_2 et a_3 jouant des rôles analogues. De sorte que U peut encore s'écrire:

$$U = f(x\, y\, z\, O\, O\, O) + \frac{1}{2} u^2 \varphi_1 (x\, y\, z) + \frac{1}{2} v^2 \varphi_2 + \frac{1}{2} w^2 \varphi_3 \; .$$

On pourrait d'ailleurs montrer que, d'une façon rigoureuse, la fonction U peut s'écrire sous la forme que nous venons ainsi de trouver comme approchée. Elle s'écrit en effet d'abord:

$$U = W - \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) \; .$$

Pour pouvoir l'écrire, rigoureusement, sous la forme envisagée, il suffit que:

$$W - f(x\, y\, z\, O\, O\, O) = \frac{1}{2} \Sigma_{uvw}\, u^2 (\varphi_1 + 1) \; .$$

Comme dans le mouvement, u, v, w ont des relations avec les coordonnées du point du champ où se trouve passer le point matériel mobile, on voit qu'on peut déterminer des fonctions φ_1, φ_2, φ_3, de façon à pouvoir satisfaire à la relation voulue.

La recherche de la loi de la gravitation se ramène à celle de la fonction U pour le champ gravifique.

2° — Admettons que l'énergie totale se conserve lors du mouvement du point matériel. Dans le passage du mobile d'un point à un autre, en vertu de l'hypothèse faite plus haut, le travail du champ, et par suite le T final, et par suite aussi le U final, ne dépendront pas des circonstances du mouvement. Le mobile pouvant être guidé de A en B par divers chemins, pour suivre ensuite à partir de B la même trajectoire, s'il part de A, dans ces divers cas, avec la même vitesse, le travail dépensé sur lui par le champ étant le même, les diverses valeurs finales de T, et par suite de U, et aussi, si l'on veut, de $-2\,\mathrm{T} + 2\,\mathrm{U} - c^2$ ou de $2\,\mathrm{T} + 2\,\mathrm{U} + c^2$, ou de toute autre combinaison de T et de U — par exemple de $\sqrt{\left(\frac{2\,\mathrm{U}}{c^2} - 1\right)(\mathrm{T} + c^2) + 2c^2}$ que l'on pourrait identifier, à très peu près, avec le $\frac{ds}{dt}$ de la relativité — seront aussi les mêmes quel que soit le chemin par lequel le mobile les aura réalisées. Dans ces expressions, c est une constante dont le sens sera précisé tout à l'heure.

Opérons avec l'une quelconque de ces expressions, $2\,\mathrm{T} + 2\,\mathrm{U} + c^2$, par exemple, et en coordonnées polaires r, φ, dans le plan de l'orbite. La recherche de la fonction U, indépendante du chemin par lequel le mobile aura été guidé pour la réaliser, et fonction à la fois du point et de la vitesse en ce point, se ramène donc elle-même à celle de la fonction $2\,\mathrm{T} + 2\,\mathrm{U} + c^2$, polynone linéaire en $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$, $\left(\frac{rd\,\varphi}{dt}\right)^2$.

3. — A l'infini, loin de la masse attirante, et même à distance finie, si la vitesse est très faible, la loi cherchée doit se réduire à la valeur newtonienne, c'est-à-dire que U doit se réduire à la valeur $-\frac{\mathrm{KM}}{r}$, K étant la constante d'attraction de Newton et r, la distance au centre; à l'infini U doit se réduire à 0 quelle que soit la vitesse.

Dans la comparaison des expressions $(2\,\mathrm{T} + 2\,\mathrm{U} + c^2)\,dt^2$ réalisées suivant les divers chemins, rien n'empêche de choisir des valeurs égales de dt^2, de telle sorte que l'expression garde aussi la même valeur quel qu'ait été le chemin suivi. Les temps mis varient suivant les chemins, et les r, φ sont des fonctions de t qui changent aussi de valeur suivant les chemins; quel que soit le système de variables employées, pour une même valeur de dt, l'expression considérée doit garder la même valeur.

Les trois conditions ci-dessus imposées à cette expression (conservation de l'énergie, invariance lors du changement de variables, condition à l'infini), sont celles qu'impose Einstein au ds^2 de la relativité.

Les calculs d'Einstein et de Schwarzshild subsistent entièrement et peuvent se reproduire tels qu'ils sont donnés dans les traités de relativité pour le ds^2 de cette théorie.

D'ailleurs — et c'est une similitude de plus avec la théorie de la relativité — si l'on choisit d'opérer sur $(2\,T + 2\,U + c^2)\,dt^2$, on peut tout de suite affirmer que pour les mêmes valeurs finales de dt, quand on passe d'un point A à un point B par différents chemins, cette expression est indépendante du chemin par lequel le mobile l'a réalisée : on ne fait appel pour cet énoncé qu'au principe de la conservation de l'énergie. La constante c^2 est introduite en vue d'annuler U, et, par conséquent, la force appliquée, pour une vitesse limite voisine de la vitesse c de la lumière dans le vide, lors d'un mouvement du mobile effectué suivant une trajectoire rectiligne passant par le centre gravifique.

Indiquons sommairement le calcul à faire pour trouver U. Plaçons nous d'ailleurs du premier coup dans le cas où le coefficient de $r^2 d\varphi^2$ n'est pas nécessairement l'unité, mais une constante $g_2 = 1 + 2\,A$.

L'expression T est un polynôme linéaire en $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$ et $\left(\frac{d\,\varphi}{dt}\right)^2$. Et U aussi, avons-nous vu.

D'autre part, une relation existe, dans le mouvement, entre les coordonnées du mobile et sa vitesse. Ces considérations permettent d'écrire en un point quelconque:

$$d\,\sigma^2 = (2T + 2U + c^2)\,dt^2 = g_1\,dr^2 + g^2\,r^2\,d\varphi^2 + g_4\,c^2\,dt^2$$

les g_i dépendant des coordonnées. Dans la comparaison des expressions $(2T + 2U + c^2)\,dt^2$ réalisées de A en B suivant les divers chemins par lesquels le mobile aura pu être guidé, nous prenons, comme il a été dit, les mêmes valeurs de dt^2, pour que les diverses expressions $(2T + 2U + c^2)\, dt^2$ puissent être considérées comme ayant la même valeur quel qu'ait été le chemin suivi.

Les temps mis varient suivant les chemins et les r et φ sont des fonctions de t qui changent aussi de valeur suivant les chemins. Mais les g_i doivent satisfaire à de certaines équations (aux dérivées partielles), puisque toutes les expressions $d\sigma^2$ considérées ont la même valeur en B.

C'est un problème de mathématiques pures, qu'Einstein a résolu, de former un système covariant de dix équations entre ces coefficients g_i de la forme quadratique $d\sigma^2$.

En fin de compte, on obtient comme expression de $d\sigma^2$:

$$d\sigma^2 = (2T + 2U + c^2)\, dt^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{k}{r}} + g_2 r^2\, d\varphi^2 + \left(1 - \frac{k}{r}\right) c^2\, dt^2 \ .$$

Les conditions à la limite imposées pour U permettent de fixer à $\frac{2\,KM}{c^2}$ la valeur de la constante k.

On déduit pour U la valeur:

$$U = \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{2\,KM}{c^2 r}\right)^{-1} - 1\right]\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + A r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - \frac{KM}{r}$$

ou, approximativement:

$$U = \frac{KM}{c^2 r}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + A r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - \frac{KM}{r} \ .$$

La manière dont nous avons fait cette étude montre qu'il doit exister dans le champ de gravitation d'un centre, une vitesse limite qu'un corps soumis à la seule action du champ ne doit pas pouvoir dépasser. Cette vitesse une fois atteinte, la valeur de U doit demeurer constante. Cette vitesse est d'ailleurs sans doute la vitesse de propagation de l'action gravifique qui, se faisant par l'intermédiaire de l'éther, doit avoir la même valeur que celle de la lumière, hypothèse que légitimera l'accord, s'il se produit, de cette théorie avec les observations astronomiques.

C'est ce qui montre que la constante c de la formule est la vitesse de la lumière dans le vide.

II. — *Généralisation.* — La théorie se prête à une généralisation très simple au cas de plusieurs masses mobiles dans le champ d'un centre et réagissant l'une sur l'autre. Dans le cas de deux masses m et μ, par exemple, on est conduit à envisager une expression de la forme: $g_1\, dr^2 + g_2\, r^2\, d\theta^2 + g_3\, r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + h_1\, dr'^2 + h_2\, r'^2\, d\theta'^2 + h_3\, r'^2 \sin^2 \theta'\, d\varphi^2 + h_4\, dt^2$, dépendant de 7 variables: 6 coordonnées polaires, trois pour chaque mobile, le pôle étant au centre principal, et le temps au lieu que la théorie de la relativité n'introduirait dans son ds^2 que quatre coordonnées ou plutôt quatre variables. Cette expression doit être astreinte à être indépendante, en une position donnée, de la manière dont le système mobile l'a réalisée. La solution résulte de sept équations tensorielles dérivant d'un tenseur du second ordre à quarante neuf composantes dont quarante-deux sont identiquement nulles.

III. — *Mouvement des planètes ou plus généralement d'un mobile matériel animé dans le champ d'une vitesse due à ce champ ou a toute autre cause.* — La valeur de 2T + 2U est, d'après ce qui vient d'être trouvé:

$$2T + 2U = \left(1 - \frac{2\,KM}{c^2 r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + (1 + 2A)\, r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - \frac{2\,KM}{r}\,. \tag{1}$$

et celle de U sensiblement:

$$U = \frac{KM}{c^2 r}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + A\, r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - \frac{KM}{r}\,.$$

La loi des aires est vérifiée, comme on le déduit du calcul [1]

[1] Nous admettons ici que l'on peut avoir à la fois $\delta \int (T - U)\, dt = 0$ et $T + U = Cte$. En réalité ceci n'est pas forcément tout à fait exact du moment que U dépend de la vitesse. Si l'on admet que $T + U$ est constant, U ne représente pas alors exactement la fonction $-L + T$ du principe de la moindre action (L fonction de Lagrange) ou plutôt L n'est pas exactement égale à $T - U$. On sait que la quantité qui est constante est: $\Sigma p_i q'_i - L$, les p_i étant les

ci-après:

$$\delta \int (\mathrm{T} - \mathrm{U})\, dt = 0 \;,$$

qui donne, $\dfrac{\partial}{\partial \varphi}$ étant nul dans l'opérateur de Lagrange, car φ ne figure dans $\mathrm{T} - \mathrm{U}$ que par sa dérivée φ':

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (\mathrm{T} - \mathrm{U})}{\partial \varphi'} = 0$$

c'est-à-dire:

$$\frac{\partial (\mathrm{T} - \mathrm{U})}{\partial \varphi'} = \mathrm{C}^{\mathrm{te}} \;,$$

soit ici: $r^2 \dfrac{d\varphi}{dt} = h$, h étant ici la constante des aires.

L'équation de la conservation de l'énergie s'écrit alors, B désignant une constante:

$$\left(1 - \frac{2\,\mathrm{KM}}{c^2 r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + (1 + 2\,\mathrm{A})\, r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \mathrm{B} + \frac{2\,\mathrm{KM}}{r} \;. \quad (2)$$

En développant et en tenant compte de la loi des aires, cette équation s'écrit, avec $u = \dfrac{1}{r}$:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 \left(1 + \frac{4\,\mathrm{K}^2\,\mathrm{M}^2}{c^2 h^2} + 2\,\mathrm{A}\right) = \frac{\mathrm{B}}{h^2} +$$
$$+ \frac{2\,\mathrm{KM}}{h^2}\left(1 - \frac{\mathrm{B}}{c^2}\right) u + \frac{2\,\mathrm{KM}}{c^2} (1 + 2\,\mathrm{A})\, u^3 \;. \quad (3)$$

Pour déterminer les constantes, nous allons continuer à serrer du plus près qu'il sera possible les méthodes de la relativité générale. L'équation einsteinienne remplaçant l'équation (3) serait:

$$\left(\frac{du}{\partial \varphi}\right)^2 + u^2 = \frac{\mathrm{B}}{h^2} + \frac{2\,\mathrm{KM}}{h^2} u + \frac{2\,\mathrm{KM}}{c^2} u^3 \;. \quad (3')$$

moments conjugués des variables q_i de Lagrange. On a ici: $\mathrm{T} + \mathrm{U} = \Sigma p_i q'_i - \mathrm{L}$ d'où $\mathrm{L} = \Sigma p_i q'_i - \mathrm{T} - \mathrm{U}$. On n'a pas forcément $\delta \int (\mathrm{T} - \mathrm{U})\, dt = 0$. Mais ici l'erreur est insignifiante car nous montrons que, dans le mouvement des planètes, U est très près de se confondre avec une fonction de point. Une extension du principe de Hamilton a d'ailleurs été envisagée par Weber et Neumann au cas de « potentiels » dépendant des vitesses (voir chap. XI).

L'équation newtonienne remplaçant (3) et (3′) serait:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 = \frac{B}{h^2} + \frac{2\,KM}{h^2}\,u\,, \qquad \text{avec} \qquad B = -\frac{KM}{a}\,. \qquad (3'')$$

Dans (3′) il n'y a à déterminer, en dehors de h, que la constante B. En relativité, on prend pour B dans (3′) la même valeur $-\frac{KM}{a}$ que dans (3″), a désignant le demi-grand axe.

Dans (3), nous avons deux constantes A et B à déterminer. Selon la même méthode, nous les choisirons de manière à rendre (3) aussi semblable que possible à (3″). Ceci nous conduit d'abord à prendre $B = -\frac{KM}{a}$. Nous aurions d'ailleurs trouvé la même valeur si nous avions considéré directement les passages du mobile au périhélie et à l'aphélie. On a alors $\left(\frac{dr}{dt}\right) = 0$. Les équations (2) et (3), qui se confondent, s'écrivent alors:

$$(1 + 2A)\frac{h^2}{r_1^2} = B + \frac{2\,KM}{r_1}\,, \qquad (4)$$

r_1 désignant le rayon vecteur du périhélie, et:

$$(1 + 2A)\frac{h^2}{r_2^2} = B + \frac{2\,KM}{r_2}\,,$$

r_2 désignant le rayon vecteur de l'aphélie.

On en déduit, par soustraction, après multiplication par r_1^2 et r_2^2 respectivement:

$$B = -\frac{2\,KM}{r_1 + r_2} = -\frac{KM}{a}\,,$$

a désignant une quantité qui serait le demi-grand axe de la trajectoire, si cette trajectoire était elliptique.

Pour déterminer A, nous chercherons toujours à rendre l'équation (3) aussi semblable que possible à l'équation (3″). Dans le terme en u, figure B qui a déjà été déterminé. A figure lui aussi dans deux termes, dans celui en u^2 et dans celui en u^3. Comme l'influence du terme en u^2 est prépondérante sur celle du terme en u^3, c'est le terme en u^2 qu'il faut tâcher de rendre identique à celui de l'équation (3″), ce qui conduit à prendre pour A la valeur $-\frac{2\,K^2\,M^2}{c^2\,h^2}$.

Elle est exprimée en fonction de la constante des aires et, par conséquent, à une valeur générale.

La valeur approchée du potentiel U s'écrit alors:

$$U = \frac{KM}{d^2\,r}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \frac{2\,K^2\,M^2}{c^2\,h^2}\,r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - \frac{KM}{r}$$

la valeur exacte étant:

$$U = \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{2\,KM}{c^2\,r}\right)^{-1} - 1\right]\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \frac{2\,K^2\,M^2}{c^2\,h^2}\,r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - \frac{KM}{r}.$$

Dans le cas d'une trajectoire rectiligne passant par le centre, la formule approchée prend une forme rappelant celle d'une formule que Weber avait donnée en électromagnétisme et que nous aurons l'occasion de retrouver dans un prochain chapitre. Elle satisfait bien aux conditions de se réduire à la formule newtonienne pour de faibles vitesses du mobile dans le champ du centre, de s'annuler à l'infini, de se réduire également en tout lieu à la formule newtonienne si l'on considère la propagation comme instantanée.

Elle ne donne pas une force proportionnelle à M, masse du corps attirant, et cela n'est pas étonnant du moment qu'elle n'est pas fonction de point. C'est qu'en effet le principe de l'action égale à la réaction, vrai dans le cas de points au repos l'un par rapport à l'autre et vraisemblablement aussi dans le cas de trajectoires circulaires, où l'action étant constante d'un moment à l'autre doit bien être égale à la réaction, c'est que ce principe n'a aucune raison d'être tenu pour valable dans le cas de trajectoires quelconques dans un champ de forces où la propagation n'est pas instantanée et où, par suite, l'application de la force dépend de la vitesse du point mobile. Le principe de l'action et de la réaction ne serait donc plus vrai en général, du moins par rapport à la matière seule, et l'existence de l'éther serait nécessaire pour sauvegarder le principe. Il n'y aurait aucun changement à apporter à la dynamique du point, mais il faudrait peut-être en apporter à celle des systèmes, la résultante des actions intérieures des points du système n'étant plus nécessairement nulle.

IV. — *Examen des hypothèses faites.* — Récapitulons les hypothèses faites et voyons leur portée. Il a d'abord été supposé que le coefficient A du terme transversal de l'expression de U était une constante. Dans le cas d'une trajectoire circulaire, cela revient à supposer que ce coefficient ne dépend pas de φ et, pour raisons de symétrie, cela ne constitue pas une hypothèse. Le coefficient étant ainsi constant pour une trajectoire circulaire de rayon b, et le terme transversal pouvant être ainsi écrit $\frac{Ah^2}{b^2}$, il est tellement naturel d'admettre que si un mobile soumis uniquement à l'action du centre passe dans sa trajectoire en un point $r = a$, avec une composante transversale égale à la vitesse du mouvement circulaire, le terme transversal sera de la forme $\frac{Ah^2}{r^2}$ ou $Ar^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$ que c'est à peine une hypothèse.

Enfin si la vitesse $r\frac{d\varphi}{dt}$ est due en chaque point au champ de gravitation, et à une autre cause, ce n'est pas une hypothèse que d'admettre que le terme transversal sera encore le même.

V. — *Déplacement du périhélie des planètes.* — L'équation de la trajectoire (3) est finalement:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 = -\frac{KM}{ah^2} + \frac{2\,KM}{h^2}\left(1 + \frac{KM}{c^2 a}\right) u + \frac{2\,KM}{c^2}\left(1 - \frac{4\,K^2 M^2}{c^2 h^2}\right) u^3 . \qquad (5)$$

Pour étudier sur cette équation le phénomène du déplacement du périhélie, nous emploierons la méthode qui est décrite dans les traités de relativité. L'équation ci-dessus est, aux coefficients constants de second membre près, exactement, de la forme de celle qui est obtenue par la théorie de la relativité généralisée:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 = -\frac{KM}{ah^2} + \frac{2\,KM}{h^2} u + \frac{2\,KM}{c^2} u^3 ,$$

et les coefficients correspondants sont d'ailleurs extrêmement voisins.

Procédons par approximations successives:

Par dérivation de (3) et il vient:

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{\mathrm{KM}}{h^2}\left(1 + \frac{\mathrm{KM}}{c^2 a}\right) + \frac{3\,\mathrm{KM}}{c^2}\left(1 - \frac{4\,\mathrm{K}^2\mathrm{M}^2}{c^2 h^2}\right) u^2 \,. \qquad (6)$$

Négligeons le terme en u^2, en première approximation. Nous obtenons une solution voisine de la solution de la mécanique céleste newtonienne:

$$u = \frac{\mathrm{KM}}{h^2}\left(1 + \frac{\mathrm{KM}}{c^2 a}\right)\left[1 + e \cos(\varphi - \varpi)\right] \qquad (7)$$

e étant l'excentricité de l'orbite et ϖ la longitude du périhélie.

Une seconde approximation s'obtient en substituant la valeur (7) de u dans le terme en u^2. Parmi les termes additionnels ainsi obtenus, le seul qui donne un effet appréciable est celui en $\cos(\varphi - \varpi)$ parce qu'il constitue une solution de l'équation sans second membre (effet de résonance).

On sait qu'une intégrale particulière de l'équation:

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \mathrm{A} \cos\varphi$$

est: $u = \frac{1}{2}\mathrm{A}\,\varphi \sin\varphi$.

Il en résulte pour u un terme:

$$u_1 = \frac{3\,\mathrm{K}^3\mathrm{M}^3}{c^2 h^4}\left(1 + \frac{\mathrm{KM}}{c^2 a}\right)^2\left(1 - \frac{4\,\mathrm{K}^2\mathrm{M}^2}{c^2 h^2}\right) e\,\varphi \sin(\varphi - \varpi)$$

qui vient s'ajouter au terme (7); de sorte que l'on obtient une seconde approximation que nous nous dispensons d'écrire autrement que sous la forme:

$$u = \frac{\mathrm{KM}}{h^2}\left(1 + \frac{\mathrm{KM}}{c^2 a}\right)\left[1 - e \cos(\varphi - \varpi - \delta\varpi)\right]$$

en posant:

$$\delta\varpi = \frac{3\,\mathrm{K}^2\mathrm{M}^2}{c^2 h^2}\left(1 - \frac{4\,\mathrm{K}^2\mathrm{M}^2}{c^2 h^2}\right)\left(1 + \frac{2\,\mathrm{KM}}{c^2 a}\right)\varphi$$

en négligeant $(\delta\varpi)^2$.

La planète décrit une courbe non fermée, mais voisine d'une ellipse dont le périhélie tourne proportionnellement à φ.

h^2 étant égal à $\mathrm{KM}a\,(1 - e^2)$, la rotation du périhélie exprimée en fraction de tour par période est:

$$\frac{\delta\varpi}{\varphi} = \frac{3\,\mathrm{KM}}{c^2\,a\,(1 - e^2)}\left(1 - \frac{4\,\mathrm{K}^2\,\mathrm{M}^2}{c^2\,h^2}\right)\left(1 + \frac{2\,\mathrm{KM}}{c^2\,a}\right).$$

Vu la petitesse des termes supplémentaires $\frac{4\,\mathrm{K}^2\,\mathrm{M}^2}{c^2\,h^2}$ et $\frac{2\,\mathrm{KM}}{c^2}$, le périhélie tourne au bout d'une révolution complète de:

$$\frac{6\,\pi\,\mathrm{KM}}{c^2\,a\,(1 - e^2)}$$

absolument comme dans la théorie de la relativité.

Le mouvement du périhélie des planètes, de Mercure en particulier, est ainsi expliqué par la dynamique newtonienne que nous avons construite du champ de force naturel de la gravitation.

VI. — *Propagation de la lumière dans un champ de gravitation.* — Du moment qu'on admet l'éther comme milieu par l'intermédiaire duquel agit la gravitation, il est hors de doute que l'action de la gravitation modifie, au voisinage du centre, les équilibres et, par conséquent, la structure de cet éther. Celui-ci désormais, ne doit plus propager la lumière absolument comme s'il était libre de toute contrainte. Nous l'avons expliqué au chapitre VI.

Traitons le problème posé par l'application de la condition de propagation constituée par le principe du temps minimun de Fermat, que nous écrivons:

$$\delta\int dt = 0, \qquad \text{ou encore} \qquad \delta\int\sqrt{2\mathrm{T} + 2\mathrm{U} + c^2}\,dt = 0$$

puisque le radical est constant et, d'ailleurs sensiblement égal à $c\sqrt{2}$. On remarque qu'on passe de la valeur du ds^2 d'Einstein-Schwarzschild à celle de $d\sigma^2 = (2\mathrm{T} + 2\mathrm{U} + c^2)\,dt^2$ en changeant ds^2 en $-d\sigma^2$, dt^2 en $-dt^2$ et φ en $\sqrt{1 + 2\mathrm{A}}\,\varphi$. De sorte que le résultat du calcul proposé sous le signe $\delta\int$

s'obtiendra en faisant dans le calcul du $\delta\int$ de la relativité le même changement [1].

Ceci conduit en particulier, en tenant compte de ce fait qu'à l'infini la vitesse de la lumière doit être c pour déterminer la valeur de la constante, et en négligeant le terme en $\frac{1}{r^3}$, à l'équation:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = c^2\left(1 - \frac{4\,\mathrm{KM}}{c^2 r^2}\right) = c_1^2 .$$

La vitesse dépend de la distance r au centre de l'astre qui crée le champ: tout se passe comme si la propagation était libre et l'espace rempli d'une matière ayant un indice de réfraction:

$$n = \frac{c}{c_1} = 1 + \frac{2\,\mathrm{KM}}{c^2 r}$$

d'où l'on déduit:

$$n^2 = 1 + \frac{4\,\mathrm{KM}}{c^2 r} .$$

Cette équation est l'intégrale de l'énergie dans le mouvement d'une particule de vitesse c attirée par une masse 2M suivant la loi de Newton.

[1] On obtient d'abord:

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = -k^2 + \frac{2\,\mathrm{KM}}{c^2 r}$$

d'où

$$\left(\frac{dr}{d\sigma}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{d\sigma}\right)^2 = k^2 - \frac{2\,\mathrm{KM}}{c^2 r}$$

et comme $d\sigma^2 = 2\,c^2 dt^2$:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2\,k^2 c^2 - \frac{4\,\mathrm{KM}}{r}$$

ce qui conduit à l'équation du texte avec $k^2 = \frac{1}{2}$.

A est ici beaucoup plus petit que dans le cas des planètes. On a: $\mathrm{A} = -\frac{2\,\mathrm{K}^2\,\mathrm{M}^2}{c^2 h^2}$; mais $h = r^2\frac{d\varphi}{dt} = dc$, d désignant la distance du centre du Soleil au point le plus proche de la trajectoire de la lumière, où la vitesse est c sensiblement. Donc $\mathrm{A} = -\frac{2\,\mathrm{K}^2\,\mathrm{M}^2}{c^4 d^2}$. En fait φ demeure donc inchangé.

L'orbite est une hyperbole dont l'angle des asymptotes est sensiblement $\frac{4\,\mathrm{KM}}{c^2\,r}$, soit au voisinage du soleil 1″ 74.

L'éther en état de vibration lumineuse acquiert, par l'effet des contractions, une individualité particulière qui le rend sensible à l'action de la gravitation comme une particule de matière. Lorsque la contraction se propage, tout se passe comme si la même particule contractée se déplaçait avec la vitesse de la propagation.

VII. — *Emission du rayonnement par des atomes terrestres et solaires.* — Le troisième effet — effet Einstein sur le déplacement vers le rouge des raies solaires — pouvait paraître plus difficile à expliquer. La relativité le déduit du fait qu'entre les périodes dt et $\delta\mathrm{T}$ d'une source solaire et d'une source terrestre identiques par ailleurs existe la relation:

$$dt = \frac{\delta\,\mathrm{T}}{\sqrt{1 - \frac{2\,\mathrm{KM}}{c^2\,r}}}$$

R étant le rayon du soleil.

Cette relation peut aussi s'écrire:

$$\frac{dt}{\delta\,\mathrm{T}} = \frac{mc^2}{mc^2\left(1 - \frac{\mathrm{KM}}{c^2\mathrm{R}}\right)}$$

ce qui montre, m désignant la masse d'un électron en vibration dans chacun des atomes identiques solaire et terrestre, que la période de vibration de cet électron est inversement proportionnelle à l'énergie potentielle intérieure à l'atome de cet électron; en d'autres termes, que la fréquence de vibration des électrons d'un atome peut servir de mesure à son énergie interne potentielle.

Or, c'est là une hypothèse qui se justifie bien par des considérations empruntées à l'électronique, et qui d'ailleurs n'est pas différente du principe fondamental de la mécanique ondulatoire [1].

D'autre part, c'est indépendamment du principe de la relativité que l'on établit que l'énergie potentielle d'un électron est mc^2 (énergie électrostatique, plus celle due aux pressions de Poincaré). Si l'on imagine un électron dans un atome amené de l'infini, ou son énergie potentielle est mc^2, sur le soleil, où son énergie potentielle est $mc^2 - \frac{\mathrm{KM}m}{\mathrm{R}}$, on voit qu'entre les périodes de vibrations, terrestre et solaire, on a bien la relation prévue par la relativité et vérifiée par l'expérience: relation indépendante du principe de relativité comme en étaient indépendants les deux effets précédents. Le phénomène ne permet d'ailleurs pas de déduire quoi que ce soit qui soit contraire à l'universalité du temps; pour conclure à l'action d'un champ de gravitation sur le cours du temps, il faudrait d'abord établir que le résultat serait le même quel que soit le moyen de mesure employé; et la particularité de l'hypothèse faite ne rend pas la chose vraisemblable.

VIII. — *Mouvement d'un point dans un champ électromagnétique.* — Non seulement nous venons de donner des raisons de croire que les trois phénomènes où l'on voit des vérifi-

[1] M. L. de Broglie admet en effet (*Ondes et Mouvements*, chap. II) que l'on a

$$(\nu = \text{fréquence}) \qquad h\nu = \frac{mc\gamma}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{mc^2\sqrt{1-\frac{2\,\mathrm{KM}}{c^2 r}}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

dans le champ de gravitation et:

$$h\nu = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

en dehors ne ce champ. Les valeurs de β étant respectivement:

$$\frac{v}{c\sqrt{1-\frac{2\,\mathrm{KM}}{c^2 r}}} \quad \text{et} \quad \frac{v}{c},$$

v désignant la vitesse; on voit qu'à un terme du 4[e] ordre en $\frac{v}{c}$ près, on a la relation voulue entre les fréquences ν.

cations de la théorie de la relativité généralisée sont indépendants du principe lui-même, mais encore notre étude constitue pour une part comme une sorte de transcription dans le langage newtonien de la théorie einsteinienne de la gravitation.

Les expériences dites de variabilité de la masse avec la vitesse peuvent aussi bien être considérées comme mettant en lumière la variabilité avec la vitesse de la force réellement appliquée.

Dans ces expériences, en effet, on se donne la loi de la force et on mesure l'accélération ou, du moins, ce qu'on fait revient à celà; on constate que le rapport force: accélération dépend de la vitesse; au lieu d'en conclure à la variabilité de la masse, on peut aussi bien en conclure que l'on n'avait pas le droit d'étendre au cas du point en mouvement dans le champ avec de grandes vitesses la loi de la force, étudiée dans le cas particulier du point en repos dans le champ.

Quand un corps chargé électriquement est mobile dans un champ électromagnétique avec une vitesse v par rapport à l'éther dans lequel agit le champ, s'il se meut en ligne droite sous l'action du champ, les résultats expérimentaux montrent qu'entre la force f' qui agit réellement sur lui et la force f qui agirait sur ce même corps supposé placé au repos au même point du champ existe la relation: $f' = f\alpha^3$, correspondant à la relation $m' = \frac{1}{\alpha^3} m$, censée exprimer la variation de la masse; α est le facteur de Lorentz:

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} .$$

En réalité, ce que les expériences démontrent directement, c'est simplement qu'entre les accélérations que prennent en un même point du champ d'une part un corps partant du repos dans ce champ, d'autre part ce même corps venant à y passer avec un mouvement rectiligne de vitesse v dont la trajectoire sert d'ailleurs d'axe des x, existe la relation:

$$\frac{d^2 x'}{dt'^2} = \alpha^3 \frac{d^2 x}{dt^2} .$$

Le mouvement réel du corps dans le champ diffère donc du mouvement fictif, auquel nous attribuerons des lettres non accentuées, qui prendrait naissance si la force du champ s'appliquait au point en mouvement comme au point au repos. La loi de ce dernier mouvement étant supposée connue, soit par exemple: $x = f_1(t)$, on peut se proposer de chercher, en tenant compte de la non-application intégrale du champ, la loi du mouvement réel: $x = f_2(t')$, c'est-à-dire, *par exemple*, le point devant passer à la coordonnée x au temps t dans son mouvement fictif, de chercher l'instant $t' = \varphi_1(x, t)$ où il passera au point $x' = \varphi_2(x, t)$, dans son mouvement réel. Dans le cas du champ électromagnétique, il vient à l'esprit que les formules de Lorentz pourraient bien avoir quelque rapport avec la question.

Soit donc, au repos dans un tel champ un trièdre trirectangle $O'\, x'\, y'\, z'$, dont l'axe Ox' est décrit sous l'influence du champ par un corps qui vient à passer au point x' avec la vitesse v et, par suite, avec une accélération réelle $\frac{d^2 x'}{dt'^2}$ qui a, avec l'accélération que prendrait le même corps partant du repos au même point, la relation:

$$\frac{d^2 x'}{dt'^2} = \alpha^3 \frac{d^2 x}{dt^2} .$$

Envisageons un autre trièdre $O_1\, X\, Y\, Z$ parallèle au premier dont l'origine à l'instant considéré t' coïncide avec le mobile et qui continue ensuite son mouvement avec la vitesse constante v. Entre les accélérations réelle et fictive existe toujours la relation:

$$\frac{d^2 X}{dt'^2} = \alpha^3 \frac{d^2 x}{dt^2} .$$

Le mobile se sépare du second système; si, dans son mouvement fictif il passe au point dx de ce second système au temps dt, dans son mouvement réel il va passer au point $dX = \alpha dx$ *par exemple* au temps $dt' = \frac{1}{\alpha} dt$.

Repassant au double système de trièdre $O_1\, X\, Y\, Z$ et $O'\, x'\, y'\, z'$, comme $X = x' - vt'$, t' désignant le temps écoulé depuis qu'ils étaient en coïncidence, on voit que la première relation s'écrit:

$$dx = \frac{1}{\alpha}(dx' - vdt') .$$

La relation entre les accélérations conduit alors à la seconde relation :

$$dt = \frac{1}{\alpha}\left(dt' - \frac{v dx}{c^2}\right).$$

Ce sont là les équations de Lorentz. Elles ont, non plus un sens purement cinématique, comme dans la relativité, mais un sens dynamique et constituent des relations entre le mouvement réel et le mouvement fictif dans le champ électromagnétique

Elles ne sont d'ailleurs valables que dans une région où le mouvement du mobile puisse être considéré comme sensiblement uniforme.

L'interprétation des formules est que le mobile qui aurait dû passer au point x du second système au temps t, passe en réalité au point x' du premier au temps t'.

La relativité conduit de son côté à dire que le mobile qui passe au point x d'un second système à l'instant t passe au point x' du premier à l'instant t'. Entre les deux langages la seule différence est donc qu'un conditionnel y remplace un indicatif. C'est d'ailleurs là une différence considérable par ses conséquences; mais elle montre la facilité de la traduction de la relativité restreinte dans le langage de la physique ordinaire.

En refaisant le même raisonnement que ci-dessus, il semble qu'on devrait trouver que d'autres formules sont équivalentes à celles du groupe de Lorentz, par exemple : $dx = \frac{1}{\alpha^3}(dx' - v dt')$, $dt = dt'$. Cependant on ne les trouve pas complètement équivalentes. Cela s'explique ainsi. Pour trouver des formules aussi approchées que possible, il faut que les distances dx et dx' et les durées dt et dt' soient peu différentes les unes des autres. Or, dx étant plus grand que $d\mathrm{X}$, dt sera plus petit que dt'.

Il existe une condition optima, qui peut être : $dx \,.\, dt = d\mathrm{X}\, dt'$. C'est à elle que correspondent les formules de Lorentz, qui apparaissent ainsi comme plus approchées que celles qu'on déduirait d'une autre condition telle que $dx \,.\, dt = \frac{1}{\alpha^3} d\mathrm{X} \,.\, dt'$ qui correspond aux formules pseudo-lorentziennes ci-dessus.

Si au lieu d'une trajectoire rectiligne, le mobile décrit une trajectoire courbe dont les axes des x soient la tangente, les deux formules précédentes demeurent valables. D'autre part, dans une région assez limitée auprès de la tangente, les deux mouvements projetés sur les axes des y et z diffèrent peu, de sorte que l'on doit avoir $y' = y$, $z' = z$. On en déduit pour les accélérations :

$$\frac{d^2 y'}{dt'^2} = \alpha^2 \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad \frac{d^2 z'}{dt'^2} = \alpha^2 \frac{d^2 z}{dt^2}.$$

Or, l'expérience indique simplement les relations :

$$\frac{d^{2\prime} y'}{dt'^2} = \alpha \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad \frac{d^2 z'}{dt'^2} = \alpha \frac{d^2 z}{dt^2}.$$

A cet effet de non-application intégrale de la force par le fait du mouvement s'en superpose donc un autre, qui est une modification de la force elle-même. Entre les composantes Y et Z de la force électrique par exemple qui règne dans une zone d'éther au repos dans le champ, et les composantes Y′ et Z′ de cette même force, dans l'éther entraîné par le corps avec la vitesse v, existe les relations : $Y' = \frac{1}{\alpha} Y$, $Z' = \frac{1}{\alpha} Z$.

Il y a là possibilité de reconstruire la partie électromagnétique de la relativité, qui est obtenue avec un sens différent de celui qu'elle a dans cette théorie, et dépouillée de son caractère purement cinématique.

La vitesse limite prend également un sens dynamique ; pour $v = c$ les accélérations réelles sont nulles ; la vitesse c est la vitesse maxima que puisse donner le champ en l'absence d'autres forces.

Les autres vérifications dynamiques de la relativité restreinte : raies de l'hydrogène, spectre des rayons X, font l'objet dans le langage employé d'une théorie identique à celle qu'en donne la relativité, la démarche et les calculs étant les mêmes.

XI. — *Comparaison des méthodes suivies aux paragraphes précédents.* — Entre la manière dont a été traitée la question de la gravitation et celle dont a été traitée la question du corps électrisé mobile dans un champ électromagnétique existent des différences très nettes. D'une part, il s'agissait nécessairement d'une théorie, théorie que nous avons basée sur la conservation de l'énergie; de l'autre part, nous nous sommes fondés sur le résultat expérimental de la non-application intégrale de la force, parce que, lorsque cela est possible, il est toujours préférable de partir d'une base expérimentale. En outre, le problème résolu dans ce dernier cas comporte la comparaison d'un mouvement réel et d'un mouvement fictif, chose qui n'a pas eu lieu dans le cas de la gravitation, mais que, précisément, nous nous proposons de faire.

L'équation (5) du paragraphe V, équation de la trajectoire d'une planète, est:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 = -\frac{\mathrm{KM}}{ah^2} + \frac{2\,\mathrm{KM}}{h^2}\left(1 + \frac{\mathrm{KM}}{c^2 a}\right)u + \frac{2\,\mathrm{KM}}{c^2}\left(1 - \frac{4\,\mathrm{K}^2\mathrm{M}^2}{c^2 h^2}\right)u^3$$

ou, sensiblement, en négligeant deux termes très petits, en confondant, dans le terme en u^3, u avec $\frac{1}{a}$, a étant le demi-grand axe, en prenant $h^2 = \mathrm{K}ma$, et en posant:

$$\mathrm{B} = -\frac{\mathrm{KM}}{a} - \frac{4\,\mathrm{K}^2\mathrm{M}^2}{c^2 a^2}$$

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 = \frac{\mathrm{B}}{h^2} + \frac{2\,\mathrm{KM}}{h^2}\left(1 + \frac{\mathrm{B}}{c^2}\right)u + \frac{6\,\mathrm{K}^2\mathrm{M}^2}{c^2 h^2}u^2 .$$

En la combinant avec la loi des aires, on obtient:

$$\mathrm{V}m^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \mathrm{B} + \frac{2\,\mathrm{KM}}{r}\left(1 + \frac{\mathrm{B}}{c^2}\right) + \frac{6\,\mathrm{K}^2\mathrm{M}^2}{c^2 r^2}$$

$\mathrm{V}m$ désignant la vitesse de la planète dans son mouvement réel au point de rayon vecteur r de la trajectoire.

On voit que le potentiel qui, dans la théorie de Newton, eut été $-\frac{\mathrm{KM}}{r}$, est ici remplacé par $-\frac{\mathrm{KN}}{r}\left(1 + \frac{\mathrm{B}}{c^2} + \frac{3\,\mathrm{KM}}{c^2 r}\right)$.

Il faut remarquer que ce potentiel n'est pas aussi général que celui trouvé au paragraphe III qui, faisant intervenir les composantes de la vitesse du mobile, est général. Il ne s'agit ici que d'une expression de la valeur du potentiel en un point de la trajectoire d'une planète soumise seulement à l'action d'un centre, à l'exclusion de toute autre action.

Et c'est, sans doute, ce qui explique que la force qui dérive de ce potentiel, fonction de point cependant, ne soit pas proportionnelle à la masse du centre attirant même dans le cas d'une trajectoire circulaire.

Introduisons, maintenant, des quantités afférentes au mouvement fictif, qui aurait lieu si la force s'appliquait intégralement, à savoir la vitesse v et l'accélération correspondant à la loi de Newton et qui sont au point de rayon vecteur r de l'orbite de la planète:

$$v^2 = -\frac{\mathrm{KM}}{a} + \frac{2\,\mathrm{KM}}{r}.$$

$$j = -\frac{\mathrm{KM}}{r^2}.$$

Nous pouvons écrire sensiblement la valeur de V_m^2:

$$V_m^2 = v^2 + \frac{2\,\mathrm{KM}\,(v^2 - rj)}{c^2\,r}$$

d'où

$$\frac{V_m^2}{2} - \frac{v^2}{2} = -\frac{\mathrm{KM}r}{c^2}\,\frac{d\left(\frac{v}{r}\right)}{dt}$$

car la dérivée géométrique:

$$\frac{d\left(\frac{v}{r}\right)}{dt} = \frac{rj - v^2}{r^2}.$$

Le problème posé est ainsi résolu. Par suite de la constance et de l'égalité de l'énergie totale dans les deux cas du mouvement réel et du mouvement fictif, on peut écrire entre les potentiels U_m et U:

$$U - U_m = -\frac{\mathrm{KM}r}{c^2}\,\frac{d\left(\frac{v}{r}\right)}{dt}.$$

Posons: $rc^2\int\frac{U}{r}\,dt = J.$

$$rc^2\int\frac{U_m}{r}\,dt = J_m\ ;$$

l'équation ci-dessus devient: $J_m - J = \mathrm{KM}v.$

Le second membre représente (à un facteur près dépendant de la distance r), la différence entre le flux, à travers le corps mobile de masse unité supposé d'abord influencé comme s'il était immobile par rapport au corps influençant (KMc) et le flux à travers ce même corps, supposé ensuite influencé en tenant compte de ce que la vitesse relative de propagation de la gravitation est $c - v$, soit KM$(c - v)$.

Plus exactement, il faudrait faire intervenir la vitesse du corps influençant dans l'éther, soit V, la vitesse du corps influencé dans ce même éther V′, et leur différence géométrique v.

Mais le résultat auquel nous parvenons par déduction nous montre qu'en réalité seule la vitesse relative des deux corps intervient en première approximation, c'est-à-dire que le mouvement du corps influençant dans l'éther a pour effet d'apporter une modification inverse de celle du mouvement du corps influencé.

Ce dernier résultat a été donné, en 1925, par M. G. Fournier, d'une façon entièrement différente. C'est une formule de l'aberration de M. Varcollier, dont le premier gros ouvrage sur ces questions date aussi de cette époque [1].

La non-application intégrale de la force paraît ainsi bien liée à la non-instantanéité de la propagation.

Au point où nous en sommes arrivés, récapitulons que tous les phénomènes d'ordre dynamique dont fait état la théorie de la relativité ne nécessitent nullement pour s'expliquer l'énoncé du principe lui-même. Le but poursuivi était de montrer comment le développement systématique de l'idée de la non-application intégrale de la force pouvait conduire à l'explication de tous ces phénomènes. Ce développement s'est fait en plusieurs occasions par des moyens semblables à ceux qu'emploie la théorie de la relativité, au point qu'une sorte de traduction du langage einsteinien dans le langage newtonien que nous parlons pourrait être envisagée comme possible, la dynamique einsteinienne se présentant en quelque sorte comme un chapitre de la mécanique rationnelle: la mécanique des champs de forces

[1] *La Relativité dégagée d'hypothèses métaphysiques.*

naturels, compte tenu de ce que M. Varcollier, notamment, appelle du nom général d'aberration.

XII. — *Signification de la variable* t. *Champs de forces de la physique.* — Toutes nos équations, dans ce chapitre, comme dans tout notre travail, ont été écrites avec le temps mécanique ou newtonien. Ce temps n'est pas exactement le temps sidéral basé sur l'observation des étoiles et la rigoureuse uniformité supposée de la rotation de la Terre [1]. Les astronomes publient des tables permettant de passer du temps sidéral au temps newtonien. Mais il s'agit là d'une correspondance entre moyens de mesure différents d'une même grandeur, sans aucune ambiguité théorique.

Ce qu'il nous faut surtout remarquer, c'est que, par l'emploi du temps mécanique, nous échappons aux critiques si perspicaces de M. G. Tiercy concernant les formules de la relativité généralisée d'Einstein. M. G. Tiercy [2] montre qu'une question se pose: le temps astronomique universel doit-il, dans les vérifications expérimentales, ou d'observation, être identifié au temps dit cosmique, ou bien au temps propre terrestre ? Dans ce dernier cas, on n'explique que 26″ sur les 43″ de l'avance séculaire du périhélie de Mercure, ce qui n'est pas meilleur, dit M. Tiercy, que le résultat qu'on obtiendrait avec la loi de Newton en interprétant les instructions de celle-ci comme se rapportant au temps propre de chaque planète. Les résultats sont encore moins bons, relativement, pour Mars.

M. Tiercy discute ensuite s'il ne faut pas tenir compte, non seulement de la dilatation du temps due au champ de gravitation à laquelle on s'est borné jusqu'ici, mais aussi de celle due à la vitesse v du mouvement d'entraînement de la planète dans le champ. Il y a alors amélioration pour Mercure, mais au contraire aggravation pour les autres planètes, si l'on a d'abord identifié le temps astronomique universel au temps propre terrestre. Mais si l'on a identifié le temps astronomique avec le

[1] Voir, par exemple, P. Tardi, *Cours d'Astronomie de l'Ecole polytechnique*, p. 230.

[2] *La théorie de la relativité dite générale et les observations astronomiques* (Genève et Gauthier-Villars, Paris).

temps dit cosmique, on a une aggravation générale importante inacceptable. Aussi, conclut M. Tiercy, le problème des avances des périhélies reste entier. La signification de notre variable t ne rend pas la présente étude justiciable des mêmes critiques très fortes et sans doute irréfutables.

En ce qui concerne les deux effets physiques de la déviation des rayons lumineux et du déplacement des raies spectrales, outre qu'ils peuvent être complexes, l'explication que nous en donnons n'est pas sujette non plus aux remarques de M. Tiercy.

L'aberration de la force du champ agissant sur un mobile en mouvement dans ce champ, que nous admettons suivant les idées générales de M. Varcollier, est, dans l'étude que nous venons de faire, limitée par les conditions de conservation que nous avons imposées: ce sont les conditions d'Einstein, énoncées en un autre langage. Si notre interprétation est la bonne, nous devons retrouver, comme cas particuliers des résultats généraux de la gravifique de la relativité, quand la force est supposée seulement fonction de point et qu'on maintient les conditions de conservation, un caractère tensoriel des forces et du travail. C'est bien ce qui a lieu: quand la force est fonction de point et qu'il y a potentiel ou fonction de forces au sens de la mécanique ordinaire, il y a potentiel dans tous les systèmes de coordonnées d'espace, ou plus généralement à la suite de n'importe quel changement de variables.

Si $X\,dx + Y dy + Z dz$ est un travail élémentaire et si $(X, Y, Z) = \text{grad. } \varphi$, le travail s'écrira dans un autre système $X_1\, dx_1 + Y_1\, dy_1 + Z_1\, dz_1$ et il y aura une fonction φ_1 telle que $(X_1, Y_1, Z_1) = \text{grad. } \varphi_1$. Une autre vérification consiste à faire l'hypothèse que la force ne dépende plus de la vitesse et à constater qu'alors on retrouve les résultats ordinaires de la mécanique des champs fonctions de point seulement. C'est ce qu'on vérifie, aussi bien pour le paragraphe VIII ci-dessus que pour le paragraphe III, c'est-à-dire pour la relativité restreinte aussi bien que pour la théorie de la gravitation.

C'est intentionnellement que nous disons « de la mécanique des champs fonction de point seulement » et non pas « de la mécanique newtonienne », car s'il est vrai qu'en *pratique* la mécanique newtonienne n'a étudié que des champs fonctions de point, ce n'est là qu'une question *de fait* et non *pas de principe*; au surplus elle n'a pas étudié que des champs. Page 206 de son remarquable traité *Le principe de relativité*, M. Jean Becquerel écrit, à propos de l'hydrodynamique et des « forces », la phrase suivante: « La mécanique newtonienne néglige les autres « forces », qui dépendent des quantités de mouvement. » L'auteur met parfaitement en lumière la différence essentielle qu'il y a selon nous entre les théories hydrodynamiques ordinaire et einsteinienne. Il est à notre avis tout près, à ce moment-là, de M. Varcollier; il ne manque que le mot d'aberration. Mais la mécanique newtonienne n'est pour rien dans l'affaire, du moins ses principes, voulons-nous dire: elle n'exclut aucunement l'étude de phénomènes où les forces dépendent des vitesses. En physique d'ailleurs les forces agissant sur un mobile en mouvement dans un champ sont généralement quelque chose d'inaccessible à la mesure directe; les seules choses que nous puissions connaître, toutes erreurs de principe ou de mesure mises à part bien entendu, ce sont les mouvements; les équations de la mécanique — *de n'importe quelle mécanique* — permettent de remonter aux forces, aux potentiels, aux forces fonctions des vitesses, etc..., et pour prouver qu'une mécanique est fausse, *dans ses principes*, il faudrait pouvoir confronter des *mesures directes* des forces et des potentiels avec les valeurs qu'en donneraient les équations de cette mécanique à partir des réalités observables du mouvement. Je ne crois pas que cela ait *jamais* eu lieu dans la physique des champs. Tout notre dernier chapitre sera consacré à la discussion de ces idées.

Chapitre VIII.

Quelques autres réflexions au sujet de la relativité.

I. — *Phénomènes électromagnétiques dans les systèmes de corps en mouvement.* — Dans le vide un champ électromagnétique est défini par les composantes X Y Z de la force électrique et L M N de la force magnétique en chaque point.

Supposons que l'on anime d'une vitesse rectiligne et uniforme v les corps donnant naissance au champ primitivement au repos par rapport au lieu où se passe l'expérience.

La vitesse v étant dirigée suivant l'axe ox, les résultats expérimentaux indiquent que les composantes X et L ne sont pas altérées, les quatre autres étant modifiées par le fait du mouvement.

Désignons par des lettres accentuées les composantes nouvelles et proposons-nous de les comparer aux composantes X Y Z L M N qui eussent existé au même point $x\ y\ z$ si le mouvement n'avait eu aucun effet.

X′ Y′ Z′ L′ M′ N′ apparaissent ainsi comme les composantes des forces électrique et magnétique réelles mises en jeu, X Y Z L M N comme les composantes des forces électrique et magnétique fictives, égales aux forces qui existeraient si le mouvement n'altérait pas ces forces.

Etudiant au chapitre VII le phénomène de la variation de la force appliquée avec la vitesse, nous avons été amenés à constater que le mouvement avec la vitesse v dirigée suivant ox avait, entre autres effets, celui de transformer la force électrique X Y Z d'un pur champ électrique en la force:

$$X' = X$$

$$Y' = \frac{1}{\alpha} Y$$

$$Z' = \frac{1}{\alpha} Z\ .$$

L'expérience indique aussi que le mouvement avec la vitesse v des corps créant le champ, ou le mouvement avec la vitesse $-\ v$ d'une portion d'éther par rapport à ces corps, donne naissance à une force magnétique perpendiculaire à la force électrique et à la vitesse v et dont la composante M′ ne dépend que de Z, la composante N′ que de Y, et dont la composante L′ est nulle. La force magnétique produite est d'ailleurs proportionnelle à la force électrique, d'après la loi de l'induction, et à la vitesse v. Comme le dit M. Varcollier, le champ magnétique naît de l'aberration ci-dessus du champ électrique.

Par conséquent:

$$L' = 0$$

$$M' = \frac{v}{c} Z' = \frac{1}{\alpha} \frac{v}{c} Z$$

$$N' = \frac{v}{c} Y' = \frac{1}{\alpha} \frac{v}{c} Y \; .$$

Leurs valeurs montrent, dans ce cas, le plus simple, que la quantité:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - (L^2 + M^2 + N^2)$$

est égale à la quantité:

$$X'^2 + Y'^2 + Z'^2 - (L'^2 + M'^2 + N'^2) \; ,$$

c'est-à-dire que la première est invariante.

Faisons l'hypothèse qu'il en est ainsi, non seulement dans le cas du pur champ électrique initial, mais aussi dans celui du champ électromagnétique complet. Et étudions les propriétés que comporte l'invariance de l'expression:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - (L^2 + M^2 + N^2) \; .$$

Quels que soient Y, Z, M, N, les grandeurs X' et L' doiven en être indépendantes, d'après les résultats de l'expérience. En outre, il nous faut imposer aux formules de transformation la condition que si l'on décompose le champ initial, dont Y Z M N sont des composantes, en deux champs dont les composantes seront Y_1 et $Y - Y_1$, etc..., il puisse y correspondre par les formules de transformation, un champ final dont les composantes Y' Z' M' N' pourront être décomposées en composantes Y'_1 et $Y' - Y'_1$, etc., de manière à satisfaire aux mêmes formules écrites avec lettres à indices.

Par exemple, nous devrons avoir:

$$Y' = f(Y, Z, M, N)$$

$$Y'_1 = f(Y_1, Z_1, M_1, N_1)$$

$$Y' - Y'_1 = f(Y - Y_1, Z - Z_1, M - M_1, N - N_1)$$

et par suite:

$$f(Y\,Z\,M\,N) = f(Y_1\,Z_1\,M_1\,N_1) + f(Y - Y_1 \ldots)$$

équation fonctionnelle qui montre que f est une fonction linéaire et homogène de ses arguments.

De plus, la condition de comporter les cas particuliers donnés d'abord implique que ni Y′, ni N′ ne doivent dépendre de Z, de même que ni Z′, ni M′ ne doivent dépendre de Y.

Par raison de symétrie, Y′ et N′ ne doivent pas non plus dépendre de M; ni Z′, ni M′ de N.

De sorte que l'on est conduit à envisager des relations de la forme:

$$\begin{aligned} X' &= X \\ L' &= L \\ Y' &= a_1 Y + b_1 N \\ Z' &= a_2 Z + b_2 M \\ M' &= a_3 M + b_3 Z \\ N' &= a_4 N + b_4 Y \ , \end{aligned}$$

les coefficients a et b ne pouvant être fonction que de la vitesse v.

Par raison de symétrie encore, on peut préciser que $a_1 = a_2$, $a_3 = a_4$; $b_1 = - b_2$, $b_3 = - b_4$; et, si l'on exprime Y, Z, M, N en fonction de Y′, Z′, M′, N′ à l'aide des équations ci-dessus, en imposant aux coefficients de Y′ Z′ M′ N′ d'être égaux entre eux comme le sont les a et b, toujours pour symétrie, on voit que:

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 \ ; \qquad b_1 = - b_2 = - b_3 = b_4 \ .$$

La condition d'invariance donne alors: $a^2 - b^2 = 1$.

Posons:

$$a^2 = \left(1 - \frac{v^2}{k^2}\right)^{-1}$$

on déduit:

$$b^2 = \left(1 - \frac{v^2}{k^2}\right)^{-1} \frac{v^2}{k^2}$$

La constante k a les dimensions d'une vitesse. Pour que a et b aient un sens, il faut que v n'atteigne pas cette valeur k. Or, v est la vitesse que nous donnons aux corps qui constituent le champ, par rapport à l'éther du lieu de l'expérience, vitesse dont nous disposons par conséquent à notre gré et qui, quel que soit k, peut atteindre et dépasser k. Quand donc v atteint k, le phénomène qui consiste à transformer les forces électrique et magnétique non accentuées ne se produit plus. C'est-à-dire qu'aucune propagation n'a plus lieu du champ vers le point $x\,y\,z$. La vitesse k est donc la vitesse de propagation du champ électromagnétique dans l'éther, c'est-à-dire la vitesse c de la lumière.

Les formules de transformation cherchées sont donc identiques à celles que donne la relativité restreinte pour le passage d'un système d'axes à un autre animé par rapport au premier d'une vitesse v. Mais leur sens diffère de celui qui est attribué aux formules de la relativité de la même manière que le sens attribué au chapitre précédent aux formules de Lorentz diffère de celui que leur attribue la relativité. Il ne s'agit plus de deux systèmes simultanés, mais d'un système réel et d'un système virtuel. Ce ne sont plus deux indicatifs que l'on parle dans notre langage, mais un indicatif et un conditionnel.

II. — *Formules de Weber.* — Quand v est petit, l'une quelconque des quatre formules où entrent Y Z M N, par exemple la première, peut s'écrire si N est nul:

$$Y' = \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right)^{-1} Y$$

Et si l'on considère les potentiels U′ et U dont ces quantités dérivent, on a:

$$U = \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) U' .$$

Le potentiel U est le potentiel de Weber auquel il a été fait allusion au chapitre VII. Divers auteurs, et Tisserand en particulier, avaient essayé d'appliquer la formule de Weber au cas de la gravitation pour rendre compte du déplacement du périhélie des planètes. Mais elle ne donne pas le résultat escompté. Comme nous l'a fait remarquer M. Varcollier, elle n'aurait pu le donner qu'à condition, tout au moins, d'avoir été complétée pour tenir compte de la force électrodynamique.

III. — *Lois de l'électrodynamique.* — Absolument comme on le fait en relativité restreinte, à la seule différence du langage près, on peut déduire des formules trouvées, en plus de la loi de l'induction, la loi de Biot et Savart, et la formule de Laplace sur le champ d'un élément de courant.

IV. — *Traduction du langage de la relativité dans le langage de la mécanique ordinaire.* — Nous allons indiquer un moyen de traduire le langage de la relativité dans le langage classique que nous continuons à employer, les calculs et la démarche restant les mêmes. Nous y avons fait plusieurs fois allusion.

a) Ce moyen consiste dans l'usage d'une sorte de dictionnaire grâce auquel les mots:

« Système S en translation par rapport au système S′ avec la vitesse rectiligne uniforme v, et servant comme le système S′ à observer un événement $x\ y\ z\ t$, $x'\ y'\ z'\ t'$ », sont remplacés par ceux-ci:

« Système S en translation par rapport au système S′ avec la vitesse v et servant à observer le mouvement fictif $x\ y\ z\ t$ d'un mobile soumis à un champ électromagnétique, et animé initialement de la vitesse v dans ce champ, tel qu'il se produirait si le champ agissait sur le mobile en mouvement comme sur le mobile en repos, alors que le système S′ en repos dans le champ sert à observer le mouvement réel $x'\ y'\ z'\ t'$. »

b) L'observateur S′ de la relativité évalue les composantes $v'_{x'}$, $v'_{y'}$, $v'_{z'}$ de la vitesse du mobile qui est animé de la vitesse $v_x\, v_y\, v_z$ dans le système S par les formules:

$$v'_{x'} = \frac{v_x + v}{1 + \frac{v\, v_x}{c^2}}, \qquad v'_{y'} = \frac{v_y}{1 + \frac{v\, v_x}{c^2}}, \qquad v'_{z'} = \frac{v_z}{1 + \frac{v\, v_x}{c^2}}.$$

Au lieu de cette manière de parler, nous dirons que la vitesse qui serait $v_x\, v_y\, v_z$ dans le système S si le champ s'appliquait intégralement, c'est-à-dire dans le mouvement fictif, est en réalité $v'_{x'}$, $v'_{y'}$, $v'_{z'}$ dans le système S′. Un conditionnel remplace un indicatif du langage de la relativité. Ce serait pour une raison analogue que les rapports $\frac{c^2 G_1}{H}$, etc..., vérifient la formule de composition relativiste des vitesses comme on l'a vu au chapitre V.

c) Dans le langage de la relativité, un mobile par accroissements successifs de vitesse à partir de sa vitesse primitivement acquise ne peut dépasser la vitesse c de la lumière, qui apparaît ainsi comme une vitesse limite.

Dans le langage que nous parlons, nous traduisons que la vitesse v'_x, dans le mouvement réel par rapport au système du champ ne peut dépasser la vitesse c, et qu'elle n'atteint cette vitesse que si v est égal à c, auquel cas, d'après les formules de la cinématique ordinaire, v_x est nul nécessairement. La vitesse limite c prend ainsi un sens dynamique. M. Varcollier avait distingué, comme nous, la relativité cinématique de la relativité dynamique.

Si la vitesse c est infinie, ou peut être considérée comme telle, on voit que les formules se réduisent à des formules cinématiques. Cela signifie que la considération de mouvements réels et de mouvements fictifs ne correspond plus à rien, et que le champ agit sur un point en mouvement comme sur un point au repos.

V. — *La conservation de la forme des lois de l'éther.* — A partir des expériences dites de variabilité de la masse, interprétées comme montrant la variabilité de la force réellement appliquée avec la vitesse, nous avons pu déduire les équations de Lorentz. Nous avons obtenu aussi des formules de transformation des forces électriques et magnétiques identiques à celles de la relativité.

L'ensemble permet la conservation de la forme des équations de Maxwell. La question se pose dès lors de trouver le sens de cette transformation et de cette conservation.

Une charge électrique ou une masse magnétique étant supposée mobile dans un champ électromagnétique avec une vitesse très faible, de manière que le champ s'applique intégralement, l'étude du travail du champ sur cette charge ou cette masse permet d'écrire les équations de Maxwell pour l'espace vide, par exemple. Si la charge ou la masse sont animées, dans le champ, d'une vitesse v assez grande, il y a lieu de distinguer le mouvement réel et le mouvement fictif qui aurait lieu si tout se passait comme si le champ s'appliquait intégralement.

Aux éléments dx, dy, dz de la trajectoire supposée décrite à faible vitesse et par suite avec application intégrale, vont correspondre les éléments dx', dy', dz' de la trajectoire réelle, qui leur sont liés, avons-nous vu, par les formules de Lorentz [1]. Par le fait que des équations de Maxwell sont vérifiées avec les x, y, z, d'autres équations sont vérifiées avec les x', y', z'. Ces nouvelles équations se trouvent aussi être de la forme de Maxwell.

En d'autres termes, lors du passage du mouvement fictif, ou du mouvement à faible vitesse, au mouvement réel à vitesse importante dans le champ, chacun des éléments qui interviennent dans la loi varie de telle sorte que la loi soit toujours la même et toujours vérifiée.

Il n'en est point ainsi de toutes les lois de la nature, tout au contraire, ainsi que le comporte le principe de Le Chatelier. On peut dire que d'après ce principe, la variation d'un des éléments a pour effet non seulement de faire prendre aux autres les valeurs convenables pour continuer à vérifier la formule mathématique qui exprime normalement la loi, mais aussi de créer, en plus de ces variations, des variations en quelque sorte parasites, dont l'effet, si elles étaient seules, serait d'imposer, d'après la formule, à l'élément atteint, une variation en sens contraire de celle qu'on lui a fait subir.

Il y a en quelque sorte d'après cela un moment fugitif, mais qui existe, où la formule n'exprime plus la loi véritable.

Rien de pareil n'existerait pour les lois de l'éther, en particulier pour celles constituées par les équations de Maxwell; l'éther ne serait pas doué de cette sorte d'inertie: les aberrations de M. Varcollier obéissent à la règle du maintien des lois de Maxwell.

[1] En même temps, aux forces électriques ou magnétiques X, Y, Z, L, M, N, en correspondent d'autres X', Y', Z', L', M', N' qui leur sont liées par les formules du paragraphe I.

On peut donc énoncer un principe tel que celui-ci: « Les lois des phénomènes physiques qui ont l'éther pour siège conservent leur forme lors des variations de l'un quelconque des facteurs qui interviennent dans l'expression de ces lois. »

Mettant en application ce principe, on peut évidemment déduire inversement que dans le cas du mouvement uniforme des corps électrisés ou aimantés, constituant un champ électromagnétique, les équations de Maxwell doivent se conserver; par suite que les coordonnées rapportées à deux systèmes, l'un lié au champ, l'autre restant au repos dans une position déterminée du champ, ont entre elles les relations constituées par les équations de Lorentz, et que les forces électriques et magnétiques réelles et fictives ont les relations retrouvées au paragraphe I.

Employant pour agir sur le champ les moyens les plus divers, tels que: introduction de morceaux de fer doux, effets d'inertie ou tous autres, nous pouvons faire usage, pour en étudier les effets, du principe général énoncé tout à l'heure.

Nous rétablissons ainsi, avec un sens différent, la forme tensorielle donnée en relativité aux équations de l'électromagnétisme.

La démarche et les calculs sont les mêmes que ceux de la relativité, et le langage employé par cette théorie se traduit facilement dans celui que nous parlons.

VI. — *Exemple. La relativité et les milieux réfringents.* — Les équations de Maxwell pour un milieu k, μ sont, dans un système au repos par rapport à ce milieu:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}$$

et 5 équations analogues ($A = kX$, etc...; les A, B, C, P, Q, R étant les inductions).

Le principe de la relativité n'impose pas leur conservation dans un système en translation de vitesse v par rapport au premier. Ce n'est que dans le vide que le principe impose cette conservation.

Mais les formules de Lorentz n'en sont pas moins applicables. Elles donneraient des équations de même forme que celles qui sont écrites plus haut :

$$\frac{1}{c}\frac{\partial A'}{\partial t'} = \frac{\partial M'}{\partial z'} - \frac{\partial N'}{\partial y'}, \quad \text{etc...}, \tag{1}$$

en posant :

$$A' = A, \quad M' = \frac{1}{\alpha}\left(M + \frac{v}{c}C\right), \quad \text{etc...}.$$

On en déduit les relations indiquées ci-dessous entre les majuscules accentuées d'un même système.

$$\left.\begin{aligned}
A' &= kX' \\
B' &= \frac{k\alpha^2 Y' - \frac{v}{c}(1 - k\mu) N'}{1 - k\mu\frac{v^2}{c^2}} \\
C' &= \frac{k\alpha^2 Z' + \frac{v}{c}(1 - k\mu) M'}{1 - k\mu\frac{v^2}{c^2}} \\
P' &= \mu L' \\
Q' &= \frac{\mu\alpha^2 M' + \frac{v}{c}(1 - k\mu) Z'}{1 - k\mu\frac{v^2}{c^2}} \\
R' &= \frac{\mu\alpha^2 N' - \frac{v}{c}(1 - k\mu) Y'}{1 - k\mu\frac{v^2}{c^2}}
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Ces relations ne sont pas les mêmes dans le système du milieu et le système en mouvement par rapport à lui : il le faut bien d'ailleurs, puisque le principe de relativité n'affirme point que l'on ne puisse pas mettre en évidence par expériences effectuées dans un même système un mouvement de ce système par rapport à un milieu matériel.

L'ensemble de (1) et (2) constitue les équations de l'électromagnétisme à l'intérieur du milieu en mouvement dans le champ. Elles avaient été obtenues par Minkowski, selon les méthodes de la relativité. Le sens que leur donnait Minkowski différait de celui que nous leur donnerons de la même manière que nous avons eu l'occasion d'indiquer plusieurs fois dans des cas analogues : au lieu que dans la relativité, les deux systèmes accentué et non accentué sont envisagés simultanément comme réels, nous envisageons ici un des systèmes comme réel, l'autre comme fictif ; au lieu que dans le langage de la relativité, on emploie l'indicatif pour chacun des deux systèmes, nous employons ici l'indicatif pour le système réel, le conditionnel pour le système virtuel. Or, si l'on cherche, comme on doit le faire, à interpréter le moins possible l'expérience, on doit admettre que les expériences qui constituent une vérification quantitative des équations (2), s'accordent qualitativement mieux avec le langage employé ici.

On a constaté l'existence d'une induction magnétique Q′ R′ au sein d'un milieu animé par rapport à un champ purement électrique X Y Z d'une vitesse v. C'est bien strictement ce que nous disons.

Il n'a pas été constaté qu'un champ purement électrique étant supposé exister dans un milieu maintenu au repos par rapport aux murs du laboratoire, le seul mouvement de l'observateur et de ses instruments d'observation par rapport à ce champ, à ce milieu, et à ces murs, lui fit apparaître l'existence dans ce milieu de l'induction Q′ R′, dont rend compte la théorie de la relativité.

On peut noter également une autre différence intéressante dans la façon d'interpréter en relativité d'une part, et dans nos idées d'autre part une conséquence des équations ci-dessus.

Supposons que, dans le système du milieu k, μ règne un champ électromagnétique X Y Z L M N, et que dans un système en translation rectiligne de vitesse v par rapport au milieu, règne un pur champ électrique X′ Y′ Z′.

Une charge e part du repos dans le premier système avec une accélération dont une composante est :

$$\frac{d^2 y}{dt^2} \cdot$$

On calcule comme dans le cas du vide, à l'aide des formules de Lorentz, que:

$$\frac{d^2 y'}{dt'^2} = \alpha^2 \frac{d^2 y}{dt^2} .$$

La composante de la force mécanique dans le premier système est $F_y = eY$.

Admettons que, dans le second, elle soit $F'_{y'} = eY'$.

On calcule que:

$$Y = \frac{1}{\alpha}\left(Y' + \frac{v}{c} R'\right), \quad \text{avec} \quad R' = -\frac{v}{c} \frac{((1 - k\mu) Y'}{1 - k\mu \frac{v^2}{c^2}},$$

d'où

$$Y = \frac{\alpha Y'}{1 - k\mu \frac{v^2}{c^2}}$$

et

$$F'_{y'} = e Y' = \frac{e}{\alpha} Y \left(1 - k\mu \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{1}{\alpha}\left(1 - k\mu \frac{v^2}{c^2}\right) F_y .$$

L'équation: $F_y = m_0 \frac{d^2 y}{dt^2}$ devient dans le second système:

$$F'_{y'} = \frac{m_0 \left(1 - k\mu \frac{v^2}{c^2}\right)}{\alpha^3} \frac{d^2 y'}{dt'^2}$$

ce qui n'est pas l'équation voulue. La masse dépendrait du milieu où le corps est plongé. Pour éviter cela, il faudrait que:

$$F'_{y'} = \frac{\alpha^2 e Y'}{1 - k\mu \frac{v^2}{c^2}} .$$

Or, on dispose à volonté de Y' dans le système en mouvement. Il suffit de maintenir dans ce système les charges voulues. Par conséquent $F'_{y'}$ serait infini pour $v = \frac{c}{\sqrt{k\mu}}$ et changerait de sens quand v franchirait cette valeur. Cela ne paraît pas pouvoir être admis. Dans nos idées, cela signifie seulement que la vitesse maxima que le champ pourra communiquer à la charge sera $\frac{c}{\sqrt{k\mu}}$.

VII. — *Réflexions sur le principe de la relativité lui-même.* — Il faut distinguer entre le développement de la théorie de la relativité et particulièrement l'appareil mathématique qu'elle met en œuvre d'une part, et, d'autre part, ce qu'il y a de spécifiquement relatif dans la théorie, c'est-à-dire le langage dans lequel elle est formulée, langage qui est, en quelque sorte, fixé dès qu'on admet le principe de conservation de la forme des lois pour les divers observateurs par qui l'on peut faire étudier un même phénomène.

Nous nous sommes efforcés d'établir, dans le langage de la dynamique rationnelle et de la physique classique, une théorie qui rendît compte de tous les phénomènes où l'on peut voir des fondements *a priori* ou des vérifications *a posteriori* du principe de relativité. La théorie ainsi établie, ressemble de très près à celle de l'aberration de Varcollier. Elle fait usage le plus souvent d'un appareil mathématique identique ou analogue à celui qu'emploie la théorie de la relativité. Elle s'exprime en un langage dans lequel peut se traduire une grande partie du langage de la relativité au moyen d'une sorte de lexique dont nous avons donné au paragraphe IV une esquisse. Du moment que nous admettons ainsi comme possible une traduction presque complète de la dynamique de la relativité dans le langage de la dynamique newtonienne, nous admettons aussi par le fait même que cette théorie est exempte de contradictions, du moins dans tout ce qu'elle a de traduisible, car nous ne doutons pas que la mécanique newtonienne ne soit exempte de contradictions.

Or, une critique valable d'une théorie ou d'un principe physique ne peut avoir pour base que la mise en évidence d'une contradiction interne — et encore faudrait-il que c'en fût une d'une importance capitale — ou bien que la mise en évidence d'un désaccord avec l'expérience: c'est ce qui s'est produit comme nous l'avons exposé dans notre première partie.

Mais si la dynamique de la relativité doit être considérée comme exempte de contradictions, il n'en est pas nécessairement de même de la partie non dynamique de la théorie. Et le seul genre de contradictions qui puissent être faites au principe consiste à trouver une loi physique qui ne conserve pas sa forme en tous cas.

Cette loi doit évidemment, si elle existe, être une loi qui, compatible, bien entendu, avec les équations de Maxwell, n'en soit pas nécessairement une conséquence. Il se produira alors peut-être, lorsqu'on fera subir à cette loi, pour le passage d'un système d'observation à un autre, la transformation qui conserve la forme des équations de Maxwell, qu'elle ne se conservera pas. La loi dont il va être question est dans ce cas.

Soit un flux de particules électrisées orienté suivant les axes Ox et $O'x'$ de deux trièdres trirectangles en translation uniforme de vitesse v l'un par rapport à l'autre. Entre les intensités électrostatique I et électromagnétique i du courant à quoi ce flux est équivalent, existe la relation $\frac{I}{i} = c$, du moins dans le système $Oxyz$ où le conducteur équivalent serait au repos; en un point d'ordonnée y du plan des xy, où la force magnétique est N parallèle à Oz et la force électrique X parallèle à Ox, l'intensité électromagnétique a la valeur:

$$i = \frac{1}{2} Ny \;;$$

quant à l'intensité électrostatique, les densités étant $\rho_1, \rho_2 \dots \rho_n$ et les vitesses $u_1, u_2 \dots u_n$, elle est:

$$i = \rho_1 u_1 + \rho_2 u_2 + \dots \rho_n u_n \,.$$

La loi envisagée, dans le système considéré, s'écrit donc:

$$\frac{\rho_1 u_1 + \rho_2 u_2 + \dots + \rho_n u_n}{\frac{1}{2} Ny} = c \,.$$

La transformation par les formules de la relativité pour le système $O'x'y'z'$ montre que, dans ce système elle s'écrirait:

$$\frac{\rho'_1 (u'_1 - v) + \rho'_2 (u'_2 - v) + \dots \rho'_n (u'_n - v)}{\frac{1}{2} N' y' \alpha^2}$$

et que, par suite, elle ne se conserverait pas.

Chapitre IX

La mécanique ondulatoire.

I. — *Ondes et forces.* — La mécanique ondulatoire est basée sur le principe suivant:

« Chaque fois que, dans un système de référence, un élément matériel au sens le plus général du mot, fragment de matière ou énergie électro-magnétique, possède une énergie W, il existe dans ce système un phénomène périodique de fréquence ν définie par la relation du quantum, $W = h\nu$, h étant la constante de Planck. »

Nous n'avons aucune raison de ne pas faire nôtre ce principe en tant qu'il s'applique aux phénomènes gravitationnels ou électromagnétiques.

Au chapitre VI en effet nous avons admis que le champ de gravitation qui entoure un centre matériel est produit par un phénomène périodique constitué lui-même par des ondes longitudinales d'une nature spéciale dont la demi-vibration vers le centre développe dans le champ une force plus grande que l'autre demi-vibration. Quant à la fréquence de ce phénomène, nous trouvons dans l'interprétation que nous avons donnée au chapitre VII de l'effet Einstein sur le déplacement des raies dans le spectre solaire, d'ordre lumineux, il est vrai, des raisons de croire qu'en effet la fréquence est proportionnelle à l'énergie de l'élément de matière. On pourrait en quelque sorte dire que l'effet Einstein est une vérification expérimentale du principe de L. de Broglie.

De la même façon, nous avons admis aux paragraphes précédents que le champ électrique était constitué par un phénomène périodique analogue.

L'équation réglant la propagation d'un phénomène périodique à demi-vibrations développant des forces égales serait de la forme suivante pour un système d'axes rectangulaires au repos dans l'ensemble de l'éther:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 ,$$

v désignant la vitesse de la propagation, ou encore:

$$\Delta \psi + \frac{4\pi^2 n^2 \nu^2}{c^2}\psi = 0$$

n étant un indice de réfraction.

Une solution de cette équation est l'onde monochromatique plane,

$$\psi = a \cos 2\pi\varphi$$

avec la phase:

$$\varphi = \nu t - \frac{n\nu}{c}(\alpha x + \beta y + \gamma z) ,$$

α, β, γ étant les trois cosinus directeurs d'une même direction.

Elle ne peut convenir aux vibrations que nous envisageons comme constituant le phénomène périodique gravitationnel ou électrique, puisque, dans l'aspect macroscopique des phénomènes elle ne ferait apparaître aucune force. L'équation de la propagation de ces vibrations doit être telle que, si on étudie les solutions par des procédés analogues à ceux de l'optique géométrique, elle fasse apparaître une force et conduise aux équations générales de la mécanique newtonienne.

Au chapitre VII nous avons rappelé que la dynamique de la relativité généralisée pouvait être considérée comme un chapitre de la mécanique newtonienne, à savoir comme la mécanique newtonienne du champ de force de la gravitation et que la dynamique de la relativité restreinte pouvait apparaître comme la dynamique newtonienne du champ électromagnétique, les formules et les calculs demeurant les mêmes et les langages employés pouvant se traduire en quelque sorte l'un dans l'autre.

D'une manière analogue, la mécanique ondulatoire peut être traduite et apparaître comme un chapitre de la mécanique newtonienne des champs agissant par ondes de force.

On peut faire correspondre aux éléments dynamiques du champ des éléments ondulatoires de l'onde qui le propage et l'entretient. En chaque point du champ au vecteur impulsion I correspondra un vecteur onde O au sens de L. de Broglie. Il y aura pourtant une différence, et capitale. Au lieu que l'onde soit associée à un mobile en mouvement dans le champ, c'est au champ lui-même qu'elle sera associée. Plus exactement, l'onde sera une onde double provenant à la fois du champ et du corpuscule qui lui est soumis, puisque ce dernier est lui même doué de propriétés gravifiques ou électriques.

On montre en mécanique ondulatoire que les composantes de la quantité de mouvement d'un mobile soumis à un champ sont:

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad -\frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

φ désignant la phase de l'onde associée, ou encore que les composantes de la force du champ ont pour valeur:

$$-\frac{d}{dt}\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad -\frac{d}{dt}\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad -\frac{d}{dt}\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Dans ce qui va suivre, nous adopterons désormais la marche inverse. Nous supposerons que les composantes de la force du champ électrostatique ou du champ gravifique d'un centre, ou même d'un champ quelconque agissant par ondes de force, peuvent se mettre sous la forme:

$$f_x = \frac{m d^2 x}{dt^2} = -\frac{d}{dt}\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

et deux expressions analogues.

On en déduit:

$$m\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + k_1(x, y, z).$$

Et si S est la fonction de Jacobi du champ, dont les dérivées partielles en $x\, y\, z$ sont, au signe près, égales à la quantité de mouvement du point, on arrive à: $S = \varphi - \int k_1(x\, y\, z)\, dx + k_2 (y\, z)$, les fonctions k_1 et k_2 pouvant, selon les champs et les conditions initiales, être nulles.

Comme les champs que nous considérons admettent un potentiel[1], il faut que l'expression de f_x soit la dérivée partielle en x d'une certaine fonction. Ceci a bien lieu avec la valeur trouvée pour $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ et les valeurs analogues qu'on aurait pour $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$, en particulier si l'on a :

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{mdx}{dt}, \quad \text{etc...}$$

Si T désigne la demi-force vive, on voit que la fonction potentielle a pour expression, à une constante près : $F = \frac{d\varphi}{dt} + T$, et si l'on développe cette équation, on trouve qu'elle se confond à la fois avec l'équation de Jacobi, pour le champ et l'équation de l'optique géométrique pour l'onde. La quantité $d\varphi$ est, au signe près, le terme d'action élémentaire du champ. Le potentiel est, à une constante près :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right).$$

Si l'on pouvait admettre que l'on connût par avance le potentiel du champ d'une façon très précise, on aurait ainsi une équation en φ. Mais en réalité, on se rend compte intuitivement que le potentiel d'un champ agissant par ondes peut dépendre des dimensions relatives du mobile et de la longueur d'onde du champ. Le potentiel $\frac{KM}{r}$ de la gravitation par exemple peut n'être, même dans le cas d'un corps au repos dans un champ, qu'une apparence d'ensemble. Si le corpuscule soumis au champ est de dimensions infinitésimales, il est possible que le potentiel dépende de l'amplitude de l'onde. Ce sont là des idées que l'on pouvait parfaitement avoir déjà avant la découverte de la mécanique ondulatoire. Le terme dépendant de l'amplitude disparaîtrait quand on considérerait un mobile ayant d'assez grandes dimensions, par un effet de moyenne, qui, en somme, n'est autre que celui que constate la mécanique ondulatoire dans la démonstration du théorème d'Ehrenfest.

[1] Du moins si le point est en repos dans le champ.

Il y aurait, d'après cela, deux catégories de potentiels: des potentiels ondulatoires, et d'autres qui, dans l'aspect macroscopique du moins, peuvent être tenus pour ne pas être ondulatoires.

Par exemple, dans le choix des équations de propagation de la mécanique ondulatoire, on fait usage du critérium suivant: quand la constante h de Planck peut être considérée comme infiniment petite, il faut que les équations de propagation puissent conduire aux équations de la dynamique classique ou relativiste. Le même critérium serait valable pour déterminer les potentiels. Le potentiel microscopique d'un champ agissant par ondes devra, pour h infiniment petit, redonner le potentiel classique fonction de point seulement, ou bien un potentiel dépendent de la position et de la vitesse du mobile dans le champ. Le fait que la gravitation et l'électricité statique agissent par ces ondes spéciales est la raison profonde pour laquelle l'équation de Schrödinger, qui représente ces ondes, donne ce résultat que la phase de l'onde coïncide avec la fonction de Jacobi. Ou bien, si l'on préfère, c'est parce qu'il existe des ondes dont la phase peut coïncider avec la fonction de Jacobi, pour le champ de gravitation, par exemple, que la gravitation peut être considérée comme agissant par le moyen de ces ondes.

II. — *Les ondes de la mécanique ondulatoire considérées comme liées aux champs.* — Si dans l'équation des ondes de la mécanique ondulatoire associées à un corpuscule de masse m, en mouvement dans un champ $\mathrm{F}(x, y, z, t)$ on substitue la forme:

$$\psi = a \cdot e^{\frac{2\pi i}{h}\varphi}$$

il vient, en séparant le réel et l'imaginaire, et en négligeant le terme en Δa comme on peut le faire quand l'optique géométrique est valable, c'est-à-dire quand h peut être considéré comme très petit:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \mathrm{F} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

$$\frac{1}{m}\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2m} a \Delta \varphi = \frac{\partial a}{\partial t},$$

le mobile se déplaçant et l'onde se propageant suivant Ox.

Considérons la seconde équation. Elle relie la longueur d'onde $\lambda = - h\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^{-1}$ à l'amplitude a. Mais la longueur d'onde λ est ainsi définie de façon un peu arbitraire.

Si l'on maintient la définition de la longueur d'onde ordinairement donnée, c'est-à-dire si on la considère comme la longueur dont il faut se déplacer à temps constant pour faire varier la phase de l'unité, on voit qu'il faut considérer en chaque point deux longueurs d'onde [1], provenant de l'équation:

$$\frac{\varphi}{h}(x_0 + \lambda) - \frac{\varphi}{h}(x_0) = \pm 1$$

d'où deux valeurs λ_1 et λ_2 de signes contraires et de valeurs absolues différentes:

$$\lambda_1 = - h \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0 + \theta_1)^{-1}$$

$$\lambda_2 = h \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0 - \theta_2)^{-1} .$$

[1] On peut aussi présenter les choses sous une forme, moins bonne, sans doute, parce qu'elle peut paraître jusqu'à un certain point comme fictive et purement formelle, mais qui a l'avantage de se relier à des résultats plus généralement admis.

L'onde $\psi = a \sin 2\pi(\nu t - \varphi)$ de la mécanique ondulatoire peut être décomposée en deux ondes, l'une convergente, l'autre divergente:

$$\psi_1 = a_1 \sin 2\pi(\nu t - \varphi_1)$$

$$\psi_2 = a_1 \sin 2\pi(\nu t + \varphi_2) .$$

Il faut alors avoir:

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = 2a_1 \sin 2\pi\left(\nu t + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) \cos 2\pi \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} .$$

La longueur d'onde est alors

$$-\left(\frac{d\varphi}{dl}\right)^{-1} = - \frac{2}{\frac{\partial \varphi_2}{\partial l} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial l}} .$$

Comme l'onde n'est pas stationnaire $\frac{\partial \varphi_2}{\partial l}$ n'est pas égal à $\frac{\partial \varphi_1}{\partial l}$. Or, ces quantités sont, en valeur absolue, les inverses des longueurs d'onde λ_2 et λ_1 des ondes convergente et divergente. Ainsi s'introduisent, mais d'une façon mathématique et non plus réellement physique, les deux longueurs d'onde en chaque point.

On a sensiblement:

$$\lambda = -h\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^{-1} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}.$$

Décomposons la seconde équation en deux, l'une contenant λ_1, l'autre λ_2, et telle que leur demi-somme redonne cette équation. On aura ainsi deux équations contenant les grandeurs physiques véritables λ_1 et λ_2.

On voit qu'il faudra introduire deux valeurs a_1 et a_2 de l'amplitude, l'une correspondant à la vibration de la grandeur oscillante d'un côté de sa position d'équilibre, l'autre à sa vibration de l'autre côté.

Or, on ne voit pas comment expliquer ces deux amplitudes si la vibration est transversale tandis qu'elles s'expliquent sans difficultés si la vibration est longitudinale.

Tout cela est d'accord avec la conception de l'onde de force longitudinale, à demi-vibrations développant des forces contraires et d'inégales intensités et donnant en moyenne une force résultante qui est la force du champ [1]. Cette onde est associée non au mobile, mais au champ (champ double du corpuscule et du champ principal).

Les champs gravifiques ou électrostatiques agissent par ondes de force dont la phase coïncide avec la fonction de Jacobi [2]. Les corps qui rayonnent sans créer de champ émettent des ondes dont on peut considérer aussi comme cas limite que la phase coïncide avec une fonction de Jacobi, le principe de Fermat coïncidant avec celui de Maupertuis.

[1] En fait d'ailleurs, ce que nous demandons à l'onde c'est précisément de donner une force résultante. Les demi-vibrations doivent donc développer des forces inégales. Un moyen consiste donc à supposer des amplitudes inégales. Mais on pourrait voir qu'on arrive aussi bien à tous les résultats essentiels indiqués ici en supposant une amplitude unique en chaque point, mais par contre des « demi-périodes » inégales; l'oscillation de O à a ou vice-versa dans un sens, étant décrite dans un temps τ_1; celle dans l'autre sens dans un temps τ_2.

[2] La théorie des ondes de force n'est donc pas la théorie de l'onde pilote, puisque ces ondes sont liées aux champs. C'est pourquoi on n'y rencontre pas les difficultés qu'on trouvait dans la théorie de l'onde pilote.

Quand le terme en Δa n'est pas négligeable, le potentiel n'est pas F, mais diffère de F dans un champ de potentiel macroscopique F, par une quantité F_1. On comprend que, selon que la longueur d'onde est faible ou non, la force moyenne soit — grad. F, ou — grad. $(F + F_1)$. Pour que la mécanique classique puisse absorber la mécanique ondulatoire il faut et il suffit que la quantité F_1 dont nous concevons ainsi l'existence ait la valeur:

$$- \frac{8\pi^2 m}{h^2} \frac{\Delta a}{a} .$$

Mais dans un cas comme dans l'autre, c'est là d'une force moyenne qu'il s'agit. On pourrait envisager de remonter plus loin et de chercher la force microscopique à chaque instant; cette force microscopique devrait donner en moyenne la force macroscopique — grad. F ou — grad. $(F + F_1)$, selon que la longueur d'onde est faible ou non par rapport aux dimensions du mobile. C'est en cette dernière remarque simplement que consisterait la traduction à donner du théorème d'Ehrenfest, dont la démonstration réside dans le fait que l'intégrale de $a^2 \frac{\partial F_1}{\partial x}$ prise dans un volume suffisamment vaste est voisine d'être nulle. Alors le terme grad. F_1 disparaît dans l'effet macroscopique sur l'ensemble de ce volume.

En somme dans un champ agissant par ondes de force, on aurait à considérer une force microscopique qui serait, comme l'onde, une fonction sinusoïdale du temps, et que ne considèrent actuellement ni les potentiels classiques ou relativistes, ni les potentiels de la mécanique ondulatoire; une force macroscopique très approchée dépendant du « potentiel quantique » et qui est celle du domaine propre de la mécanique ondulatoire, le potentiel quantique disparaissant quand on a affaire à un mobile d'assez grandes dimensions par rapport à la longueur d'onde; une force macroscopique moins approchée, suffisante cependant quand la longueur d'onde peut, comme la constante h, être considérée comme très petite, et qui est celle qui dérive du potentiel classique, enfin une force dépendant de la vitesse du mobile dans le champ, ce qui tient compte des corrections de relativité, lesquelles s'appliqueraient à l'une quelconque des trois forces ci-dessus.

On peut traiter cette question de la façon inverse de celle que nous venons de suivre. Si les ondes de la mécanique ondulatoire sont *a priori* considérées comme liées aux champs, comment expliquer que les équations de la mécanique ondulatoire, dont l'accord avec l'expérience est incontestable, soient différentes, dans le domaine atomique, des équations des anciennes mécaniques ?

Pourquoi, en d'autres termes, le potentiel microscopique ou atomique d'un champ de force naturel peut-il différer du potentiel macroscopique ou cosmique ?

Il suffit d'admettre — et rien ne s'y oppose — que le potentiel microscopique des champs naturels, champ électromagnétique ou champ de gravitation, est d'une nature ondulatoire. La force agissant sur un corpuscule de dimensions extrêmement petites par rapport à la longueur d'onde du champ serait alors une fonction sinusoïdale du temps.

Aucune expérience ne permet pour le moment de se prononcer sur ce point. Mais si ce ne sont là pour le moment que des vues de l'esprit, ne sont-elles pas en tout cas d'accord avec la notion même du « potentiel » ou plus généralement même de la force, qui peut ne pas dériver d'un potentiel au sens précis de ce mot. Nous réfléchirons au dernier chapitre sur les conditions que doivent remplir une expérience ou une observation pour qu'on puisse les considérer comme mettant en cause les principes d'une mécanique, quelle qu'elle soit, et nous conclurons qu'il n'existe pas en ce moment d'expériences satisfaisant à ces conditions.

Pour le moment, il suffit de noter que c'est l'expérience seule qui peut donner la loi de la force, ou du potentiel, s'il en existe un au sens précis du mot, et que rien par conséquent ne permet *a priori* de croire que cette loi doit être la même dans le domaine atomique et dans le domaine cosmique.

Si l'on vient à constater un désaccord entre la théorie et l'expérience, rien ne permet, le plus souvent, nous le verrons, de mettre en cause les principes; presque toujours il suffira de mettre en cause la loi de la force.

C'était en étudiant la possibilité de déduire d'une hydrodynamique de l'éther les équations de l'électromagnétisme que l'auteur était arrivé à la conception d'un éther susceptible de propager des ondes longitudinales. Inversement, l'interprétation ci-dessus, qui découle des formules de la mécanique ondulatoire, oblige, semble-t-il, à considérer les ondes de cette doctrine comme un véritable phénomène physique lié cependant au champ et non au mobile. On ne saurait y voir un simple symbole mathématique, car, dans cette manière de voir, on ne s'expliquerait guère qu'il soit possible de trouver un résultat, concernant le type longitudinal ou transversal de l'onde. Mais si ces ondes sont un phénomène physique véritable, il est difficile de ne pas admettre que l'éther les propage; cet éther capable de propager des ondes longitudinales est donc capable de compressions et de détentes, donc de mouvement d'ordre hydrodynamique. Il doit par suite, être tenu pour justiciable d'une hydrodynamique des fluides, parfaits ou non. Et l'on doit s'attendre à ce que, dans quelque canton de la physique de l'éther, on trouve des lois se formulant sous une apparence analogue à celles des équations de l'hydrodynamique. C'est bien ce qui a lieu; les équations de l'électromagnétisme et les équations de l'hydrodynamique peuvent se présenter sous la même forme.

Quant à l'amplitude de l'onde, il semble que l'on puisse établir que son carré $a^2 = \psi^* . \psi$, c'est-à-dire l'intensité de l'onde, mesure en moyenne à chaque point, et à chaque instant, la densité moyenne de l'éther affecté à la fois par le champ et par le corpuscule.

On pourrait faire remarquer que l'équation de propagation des ondes qu'on déduit des équations de Maxwell-Lorentz n'est pas la même que celle de Schrödinger qui est donnée ici comme représentant les ondes de force électro-statiques ou gravifiques. On perdrait ainsi de vue que, dans ces relations, les potentiels scalaire et vecteur, les forces électriques et magnétiques, figurent sous leur aspect macroscopique, ainsi que dans les équations de propagation qu'on en déduit. Au contraire dans les équations des ondes électrostatiques ou gravifiques considérées la vibration figure sous son aspect microscopique.

Par exemple, il y a des raisons de croire que le potentiel vecteur peut être figuré comme la vitesse d'un courant d'éther par rapport à l'ensemble d'un volume d'éther immobile. Il y a d'autres raisons de croire que le champ électrostatique est produit par des ondes de la nature considérée plus haut; ces ondes donnent aux particules d'éther des vitesses qui, dans l'aspect microscopique, viennent modifier celle qui est considérée comme potentiel vecteur [1].

III. — *La diffraction des électrons. Probabilisme et déterminisme.* — Quant aux expériences montrant la diffraction des électrons par les cristaux, nous pouvons aussi parfaitement traduire dans le langage de nos conceptions la théorie qu'en donnent les auteurs de la mécanique ondulatoire.

Dans nos idées, un électron développe autour de lui une onde du type électrostatique. L'ensemble des électrons d'un nuage dirigé sur un cristal développe une onde résultante du même type accompagnant le flôt.

L'intensité de l'onde, variable selon les points, passe par un maximum en chaque point où se trouve un électron; elle peut servir de mesure en chaque point, à l'éloignement des électrons du nuage; elle peut définir la probabilité de présence des électrons en chaque point.

C'est là le principe qu'en mécanique ondulatoire on appelle le principe des interférences. En possession de ce principe et de l'équation de Schrödinger, nous pouvons reproduire intégralement les théories qu'on donne en mécanique ondulatoire des expériences de diffraction.

[1] Cette différence d'échelle des phénomènes électromagnétiques, lumineux ou X d'une part et des phénomènes électrostatiques ou gravifiques d'autre part, serait sans doute ce qui pourrait expliquer qu'un même éther puisse présenter à la fois l'état de mouvement correspondant aux vibrations ou pulsations de l'une des catégories et aux ondes de force ou pulsations de force de l'autre. On pourrait penser, par exemple que, dans l'un des cas; c'est une tranche entière d'éther qui est affectée dans son ensemble, et que dans l'autre cas se sont les éléments constituants de cette tranche qui sont affectés à l'intérieur de la tranche. Si au contraire, dans chaque cas on admettait que c'est l'élément d'éther qui est affecté, on comprendrait mal qu'une vibration lumineuse conservât son individualité dans un champ d'ondes de forces.

Cependant ce n'est pas cette explication que j'admettrais. Selon les idées générales exposées ici, je pense que ce n'est pas l'onde ainsi liée aux électrons en mouvement (dont je pense aussi qu'elle existe, non pas en raison de leur mouvement, mais en raison de leur charge électrostatique) dont on constate ainsi la diffraction par des cristaux ou même par des réseaux, mais bien l'onde de force électrostatique du champ lui-même sous l'action duquel les électrons sont mis en mouvement. Le groupement des électrons dans les diverses régions de l'onde diffractée serait simplement dû à leur obéissance à la force du champ variable selon les régions d'interférence ou de renforcements. Plus exactement, ce serait l'onde double du champ et des électrons qui serait ainsi réfractée [1].

La théorie du phénomène serait ainsi la suivante : Sous l'action de la différence de potentiel P, l'électron de masse m et de charge e prend une accélération [2]:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = - \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = e \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x}$$

d'où, si v est la vitesse, et si l'on admet en première approximation que la force du champ s'applique sans être modifiée par la vitesse :

$$\lambda = - h \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^{-1} = \frac{h}{mv}$$

le calcul se conduit ensuite absolument comme celui de la mécanique ondulatoire sur le même sujet et l'on arrive à :

$$\lambda = h \sqrt{\frac{150}{me\mathrm{P}}}$$

avec P en volts.

[1] L'expérience de Bothe prouvant que le rayonnement d'un atome peut être concentré en direction et non pas réparti sur la surface d'une onde sphérique me paraît aussi d'accord avec la conception de l'onde de force longitudinale. Rapprocher aussi des expériences d'Emden et de Parenty.

[2] Ainsi, la phase φ de l'onde, et par suite λ sont déterminées uniquement par P, puisque e/m et e sont les mêmes pour tous les électons. Il semble qu'il y ait là une raison de plus de rapporter l'onde aux électrons et au champ, et non aux électrons seuls.

Pour distinguer si, dans l'expérience, l'onde diffractée est liée aux électrons comme le veut l'interprétation actuelle de la mécanique ondulatoire, ou si elle n'est autre que l'onde de force électrostatique de la différence de potentiel P qui produit le champ, il faut recourir à l'expérience.

J'envisagerais une expérience de diffraction des électrons où ceux-ci seraient freinés d'une façon quelconque, par exemple en leur faisant traverser un milieu matériel, sans que toutefois ce milieu agisse sur l'onde électrostatique P, ou encore une expérience où ils seraient déviés hors du champ électrostatique avant d'atteindre le cristal diffractant; ou même encore une expérience dans laquelle des particules électrisées très fines, *en repos*, sur une plaque de verre seraient soumises à l'action d'un rayonnement électrostatique diffracté par un cristal. Si ces particules se concentrent suivant certaines lignes, il sera bien évident que cette concentration tient, non pas à leurs vitesses, mais à des ondes existant en dehors d'elles; en fait on ne pourra pas employer des particules de vitesse nulle, mais on emploiera des électrons lents émis par une source dans une direction perpendiculaire à celle du rayonnement électrostatique reçu et diffracté par le cristal.

L'onde étant liée au champ, il ne serait plus indispensable d'interpréter comme on a été obligé de le faire dans ces dernières années en mécanique ondulatoire le carré de son amplitude comme la probabilité de présence d'un corpuscule en chaque point. Le probabilisme ne s'imposerait plus de façon inéluctable. Le déterminisme recevrait peut être à nouveau une autorisation d'existence même pour les processus de l'échelle atomique.

Parmi les raisons qu'on peut avoir en plus de celles données dans notre Ire partie [1], et à défaut de l'expérience non encore réalisée, de croire que la longueur d'onde ne doit pas être physiquement liée à la vitesse d'une manière directe, par la formule:

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

[1] *Archives*, vol. 28, fascicule 4 et 5, 1946.

peut-être doit-on considérer celle-ci. Supposons qu'une expérience fictive de diffraction ait eu lieu dans un milieu matériel réfringent d'indice n. Le calcul montrera que la longueur d'onde associée sera:

$$\lambda_n = \frac{h}{mv_n} = \frac{h}{\sqrt{2\,me\,P_n}}$$

alors que dans le vide, elle aurait été:

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2\,me\,P}}\,.$$

Or, si k désigne la constante diélectrique du milieu, on a, toutes choses égales d'ailleurs:

$$P_n = \frac{P}{k}\,.$$

D'où

$$\frac{\lambda_n}{\lambda} = \sqrt{k}\,.$$

Le milieu présente donc pour l'onde un indice égal à $\frac{1}{\sqrt{k}}$, inverse, on peut le remarquer en passant, de celui de l'onde électromagnétique dans un diélectrique.

Supposons maintenant que la longueur d'onde doive être liée seulement à la vitesse du corpuscule, indépendamment de la cause qui a pu provoquer le mouvement. On ne voit pas comment l'onde en question peut dépendre des propriétés électromagnétiques du milieu, alors que cela n'a rien d'étonnant si l'onde est liée au champ qui détermine le mouvement.

Une autre raison qu'on peut donner est celle-ci. Considérons, l'extinction par un miroir d'un rayon lumineux polarisé. L'amplitude s'annulant, si elle représente la probabilité de présence des photons, ceux-ci sont-ils détruits ? C'est peu croyable. On doit retrouver quelque part l'énergie de l'onde incidente et par suite les photons. Il est vrai qu'il peut exister dans la substance du miroir des ondes nouvelles. En définitive, seules de nouvelles expériences pourront renseigner utilement.

IV. — *Stabilité des orbites quantifiés.* — La théorie de la stabilité des orbites quantifiés que donne la mécanique ondulatoire peut être maintenue ici, non pas dans son principe, mais dans son développement.

Pour que le mouvement d'un électron de l'atome soit stable, il faut que la vitesse de ce corpuscule produite par l'onde de force du noyau, varie de quantités infiniment petites quand on vient à faire subir au mobile un déplacement virtuel $\alpha\, \beta\, \gamma$ à partir d'un point $x\, y\, z$ fixé sur sa trajectoire. La vitesse ayant pour composantes $-\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, etc..., on peut voir que la condition pour qu'il en soit ainsi est que les dérivées partielles $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$, etc. soient infiniment petites dans le déplacement virtuel en question (non dirigé suivant la trajectoire).

Si $a\,(x + \alpha,\, y + \beta,\, z + \gamma)$ représente l'amplitude de l'onde, on peut remplacer cette quantité par $b\,(\alpha, \beta, \gamma)$. L'onde satisfaisant à l'équation de propagation de Schrödinger, on peut voir que b devra satisfaire à l'équation suivante:

$$\Delta b + \frac{8\,\pi^2}{h^2}\,(\mathrm{W} - \mathrm{F} + \text{constante})\; b = 0$$

en substituant dans l'équation de Schrödinger la fonction d'ondes qui sera alors:

$$\psi = b e^{\frac{2\pi i}{h}\left[\mathrm{W}t - \varphi(xyz) - \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \beta\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \gamma\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right]}.$$

L'équation en b est celle à laquelle aboutit la mécanique ondulatoire à partir de l'hypothèse que l'onde correspondant au mouvement stable est une onde stationnaire. Hypothèse inadmissible dans nos idées, puisque à une telle onde correspondrait une force nulle, macroscopiquement et microscopiquement. Mais à partir de cette équation tout le développement donné en mécanique ondulatoire se maintient.

J'ajouterai seulement que la théorie ondulatoire de la radioactivité par franchissement des seuils nucléaires par les électrons des atomes se maintient aussi.

V. — *Les relations d'incertitude d'Heisenberg.* — Parmi les idées générales qui font l'objet de ce livre, il en est une qui consiste à envisager la force ou le potentiel des champs gravifiques et électromagnétiques comme due à une onde de force ou, plus exactement, à un « groupe d'ondes » de force. La longueur d'onde, l'amplitude et la phase des ondes du groupe sont en rapport avec le potentiel du champ. Un train d'ondes, limité dans l'espace et dans le temps, exige pour sa représentation un ensemble d'ondes monochromatiques, dont les nombres d'ondes, inverses des longueurs d'ondes, remplissent des intervalles, liés à la longueur δl du train d'ondes par la relation :

$$\delta N \times \delta l \geqslant 1 .$$

A chaque nombre d'onde correspondrait une formule de potentiel. La superposition de ces potentiels primaires donnerait le potentiel résultant du champ. A chaque potentiel primaire correspondrait un mouvement d'un mobile dans le champ. Les variations δP du potentiel correspondant aux variations δN du nombre d'ondes représentent les différences qu'aurait le mouvement résultant dû au potentiel résultant avec chacun des mouvements primaires.

Nous avons exposé les raisons qu'on peut avoir de considérer l'onde de la mécanique ondulatoire comme liée aux champs envisagés dont elle serait le moyen d'action et non pas directement au mouvement du mobile dans le champ : c'est ce que nous exprimons en appelant cette onde du nom d'onde de force.

La principale de ces raisons est qu'ainsi disparaissent les difficultés d'interprétation de l'amplitude de l'onde et de la relation qui existe entre la phase et l'amplitude. On sait que, dans les interprétations probabilistes, auxquelles ont conduit ces difficultés et qui sont basées sur les idées d'Heisenberg, le carré de l'amplitude de l'onde associée au corpuscule mesure la probabilité de présence du corpuscule en chaque point. L'onde n'est plus alors un phénomène physique, mais seulement la représentation symbolique d'une probabilité.

Quand une onde lumineuse polarisée s'éteint par l'action d'un analyseur, l'amplitude devient nulle partout et par conséquent, d'après l'interprétation probabiliste, les photons s'évanouiraient. Le sacrifice des idées déterministes au profit des idées probabilistes n'est donc pas suffisant pour interpréter les faits anciennement connus comme l'extinction du rayon lumineux polarisé.

Or, le développement de l'idée de l'onde de force donne un moyen d'interpréter les relations d'Heisenberg dans ce qu'elles peuvent avoir d'inéluctable.

La relation préliminaire $\delta l \times \delta \mathrm{N} \geqslant 1$ entre l'intervalle δl et la variation du nombre d'ondes demeure valable. Le nombre d'ondes $\mathrm{N} = \frac{1}{\lambda}$, inverse de la longueur d'onde, est, d'après cette idée, en rapport avec le potentiel du champ. Au lieu de la relation $\lambda = \frac{h}{mv}$ de la mécanique ondulatoire, on aurait ici la relation:

$$\frac{d\mathrm{N}}{dt} = \frac{m}{h}\frac{dv}{dt} = \frac{1}{h}f ,$$

f désignant la force appliquée par le champ, d'où:

$$\mathrm{N} = \frac{1}{h}\int f\,dt .$$

La relation deviendrait ainsi:

$$\delta l \times \delta \int f\,dt \geqslant h .$$

Ce serait la forme que prendrait dans nos idées la relation d'Heisenberg [1].

[1] Dans son expérience fictive dite du microscope, où il se propose de déterminer la position et la vitesse d'un électron situé sur le porte-objet du microscope et éclairé dans ce but par une lumière de longueur d'onde λ, Heisenberg montre qu'il y a sur la position une incertitude

$$\delta l \geqslant \frac{\lambda}{2\,\varepsilon}$$

ε désignant l'angle sous lequel l'objectif est vu du porte-objet (c'est la formule du pouvoir séparateur) et qu'il y a sur la quantité de mouvement une incertitude.

$$\delta p \geqslant \frac{2\,\varepsilon\,h}{\lambda}$$

Pour l'interpréter, observons que la force est celle d'un champ que nous supposons agir par ondes de force. Si le corpuscule est de dimensions très faibles par rapport à la longueur d'onde, la force doit être considérée à chaque instant comme une fonction sinusoïdale du temps, comme l'onde elle-même; nous considérons cette onde comme une onde longitudinale à amplitudes inégales de part et d'autre de la position d'équilibre de la grandeur oscillante. On montre alors, avons-nous vu, que la valeur moyenne de la force est proportionnelle à la différence de ces deux amplitudes et proportionnelle aussi à la fréquence. Macroscopiquement, si le mobile a des dimensions assez grandes, le caractère ondulatoire de la force disparaît.

Considérons donc un corpuscule de dimensions extrêmement petites et soit δl sa longueur dans la direction de propagation de l'onde. Plus le corpuscule sera petit, plus la force devra être considérée comme ondulatoire et moins par conséquent, il sera possible de lui assigner, par une mesure macroscopique, une valeur déterminée. C'est bien conforme à la relation. Telle serait la signification de la relation d'Heisenberg écrite sous la forme que nous venons de donner.

Mais à condition d'employer des procédés de mesure adéquate au phénomène à observer, rien ne permet, pensons-nous, de dire

d'où se déduit l'inégalité

$$\delta l \times \delta p \geqslant h \ .$$

Il nous semble que ce raisonnement n'est pas absolument convaincant.

Imaginons en effet, que, dans une autre expérience fictive on observe à l'aide de deux microscopes, l'objectif de l'un étant vu du porte objet commun sous l'angle 2ε l'autre sous l'angle $2\varepsilon'$, toutes autres choses restant inchangées. On pourra avoir:

$$\delta l \geqslant \frac{\lambda}{2\,\varepsilon}\,, \qquad \delta p \geqslant \frac{2\,\varepsilon' h}{\lambda}\ .$$

Et si ε' est nettement plus petit que ε, il n'est pas sûr que $\delta l \times \delta p$ ne puisse pas être inférieur à h. De la même manière, si on imagine que tout l'ensemble d'un microscope et d'un observateur est plongé dans un milieu d'indice n, on trouve d'autres inégalités.

Nous ne contestons d'ailleurs nullement qu'il y ait quelque chose de fondamental dans les idées de Heisenberg, et que mesurer un phénomène soit en quelque mesure, le troubler.

qu'il doive y avoir nécessairement l'incertitude assignée par cette relation. Il semble bien que nous ne possédions pas de tels procédés, suffisamment microscopiques, en ce moment, mais il serait téméraire d'affirmer que nous ne les posséderons jamais.

On peut même donner une interprétation de la relation dite de commutation d'après laquelle les grandeurs qui s'introduisent en mécanique quantique ne satisferaient pas à la loi de commutativité de la multiplication.

Nous avons dit que, de l'équation de propagation, la mécanique ondulatoire déduit entre l'amplitude a et la phase φ la relation:

$$\frac{\partial a}{\partial l}\frac{\partial \varphi}{\partial l} + \frac{1}{2} a \Delta \varphi = m \frac{\partial a}{\partial t} .$$

Dans nos idées il faut la décomposer en deux, valables chacune dans une demi-période. Si nous supposons pour simplifier que a_1 et a_2 ne dépendent pas explicitement du temps, ces deux relations sont, en tenant compte en outre de ce que:

$$- h \left(\frac{\partial \varphi}{\partial l}\right)^{-1} = \lambda_1 \quad \text{ou} \quad \lambda_2 ,$$

les suivantes:

$$h \frac{\partial a_1}{\partial l} - \frac{1}{2} a_1 \lambda_1 \Delta \varphi = 0 .$$

$$h \frac{\partial a_2}{\partial l} - \frac{1}{2} a_2 \lambda_2 \Delta \varphi = 0 .$$

On voit que, en général, on a:

$$a_1 \lambda_1 - a_2 \lambda_2 \neq 0$$

et aussi:

$$a_1 \lambda_2 - a_2 \lambda_1 \neq 0 .$$

Si l'on convient à nouveau de ne distinguer en chaque point qu'une longueur d'onde et qu'une amplitude et si l'on adopte les notations d'Heisenberg, on voit que l'on pourra écrire ces inégalités sous une forme telle que:

$$a \lambda - \lambda a \neq 0$$

a pourra être le tableau:

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 \\ 0 & 0 \end{matrix}$$

λ le tableau:

$$\begin{matrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & 0 \end{matrix}$$

L'on comprend que la relation de commutation des tableaux d'éléments composés d'amplitudes et de fréquences qu'envisage Heisenberg, puisse avoir un rapport avec la relation ci-dessus de commutation, des tableaux respectivement composés d'amplitudes et de longueurs d'onde. La relation de commutation serait, si l'on peut dire, une relation d'ambiguité.

On sait que Dirac avait proposé une mécanique quantique où s'introduisent des « nombres q » ne satisfaisant pas à la commutativité de la multiplication; elle donne les mêmes résultats que la mécanique des matrices et que la mécanique ondulatoire de M. Louis de Broglie. Dans nos idées, le fonds commun de ces trois théories sur ce point est l'existence dans le champ « d'ondes de force » d'amplitudes inégales pour chacune des demi-vibrations.

VI. — *Usage d'une transformation de Schrödinger généralisée.* — Au chapitre IV, nous avons montré que des équations $\frac{1}{c^2}\text{XH} = \text{MG}_3 - \text{NG}_2$, etc..., on déduisait par une transformation de Schrödinger:

$$\text{H} \longrightarrow -\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \text{G}_1 \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x}, \quad \text{etc...}$$

les équations de Maxwell.

Si $\frac{c^2\,\text{G}_1}{\text{H}}$ est une vitesse, cela revient aussi à faire sur l'équation:

$$\text{X}dt = \text{M}dz - \text{N}dy$$

la transformation:

$$dt \longrightarrow -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}, \qquad dx \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x}.$$

Considérons maintenant l'équation $dx^2+dy^2+dz^2-c^2dt^2=0$, exprimant que la vitesse de la lumière est c et faisons la même transformation. Nous trouvons, après avoir multiplié les deux membres par ψ:

$$\Delta \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 .$$

équation de propagation de l'onde lumineuse.

Considérons le ds^2 newtonien et supposons $ds = 0$ pour avoir la propagation lumineuse:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 \left(1 - \frac{2\,\mathrm{KM}}{c^2 r}\right) dt^2 = 0 . \qquad (1)$$

Faisons la transformation: $dx \longrightarrow \dfrac{\partial}{\partial x}$,

$$dt \longrightarrow - \frac{1}{c^2 \left(1 - \frac{2\,\mathrm{KM}}{c^2 r}\right)} \frac{\partial}{\partial t} .$$

On trouve:

$$\Delta \psi - \frac{1}{c^2 \left(1 - \frac{2\,\mathrm{KM}}{c^2 r}\right)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 . \qquad (2)$$

Les équations (1) et (2) donnent bien la même vitesse de l'onde, et l'équation (2) a une ressemblance avec l'équation de Schrödinger.

Considérons le ds^2 einsteinien, et écrivons-le sensiblement en l'annulant aussi pour avoir la propagation lumineuse:

$$\left(1 - \frac{2\,\mathrm{KM}}{c^2 r}\right)^{-1} (dx^2 + dy^2 + dz^2) - c^2 \left(1 - \frac{2\,\mathrm{KM}}{c^2 r}\right) dt^2 = 0 . \qquad (3)$$

Faisons la transformation:

$$dx \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x}\ dt \longrightarrow - \frac{1}{c^2 \left(1 - \frac{4\,\mathrm{KM}}{c^2 r}\right)} \frac{\partial}{\partial t} = 0 .$$

On trouve:

$$\Delta \psi - \frac{1}{c^2 \left(1 - \frac{4\,\mathrm{KM}}{c^2 r}\right)} \frac{d^2 \psi}{dt^2} = 0 , \qquad (4)$$

(3) et (4) donnant encore la même vitesse pour l'onde.

Ainsi donc la transformation employée, inspirée de celle de Schrödinger réussit à chaque fois pourvu que, dans le remplacement de dt, on fasse intervenir la vitesse de l'onde telle qu'elle a lieu en chaque région du champ. Ceci permettrait peut-être de découvrir le sens de cette transformation et, par suite aussi peut-être de celle de Schrödinger même.

Opérons sur l'équation du son. La vitesse a pour composante, si $\Phi(x\,y\,z\,t)$ est le front de l'onde:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\delta \Phi}{\delta t} \Big/ \frac{\delta \Phi}{\delta x}$$

et l'équation $dx^2 + dy^2 + dz^2 - a^2\,dt^2 = 0$ s'écrit aussi:

$$\Sigma \left(\frac{\delta \Phi}{\delta x}\right)^2 - \frac{1}{a^2}\left(\frac{\delta \Phi}{\delta t}\right)^2 = 0\,.$$

La transformation de Schrödinger réussit donc, semble-t-il, parce qu'elle est celle qui permet de passer de l'équation du front de l'onde à celle de la propagation, en d'autres termes parce qu'elle permet de passer de l'équation des caractéristiques de l'équation de l'onde à cette équation même.

Chapitre X.

Interprétation de la théorie des grains de lumière ou photons.

Si des phénomènes gravifiques ou électromagnétiques nous passons aux phénomènes lumineux ou, plus généralement, aux phénomènes dits de rayonnement, nous voyons bien encore la possibilité d'énoncer un principe disant qu'un élément qui émet de la lumière l'émet avec une fréquence telle que, son énergie étant W, on ait $W = h\nu$.

Mais cette lumière est-elle émise par grains, comme le veut la théorie des quanta de lumière ?

La théorie des quanta de lumière soulève plusieurs difficultés. En voici quelques-unes.

I. — *La mécanique ondulatoire en milieux réfringents.* — Examinons ce que donne la théorie nouvelle de la mécanique ondulatoire quand on applique ses idées de bases aux milieux réfringents. Nous avions déjà remarqué que si l'expérience de Michelson avait été faite dans un milieu d'indice n par exemple, jamais on n'aurait énoncé la loi de contraction de Lorentz puisque la contraction nécessaire pour expliquer le résultat négatif de l'expérience aurait fait passer l'unité de longueur de 1 à $\sqrt{1 - \frac{n^2 v^2}{c^2}}$, et aurait ainsi dépendu de la longueur d'onde de la lumière employée, ce qui était inadmissible.

a) D'après les idées de bases de la mécanique ondulatoire, un corpuscule en repos dans le milieu d'indice n, entretient, dans ce milieu, et dans le vide ou dans le milieu qui l'entourent, des ondes stationnaires. Je n'ai pas vu que cela fût clairement énoncé, mais je pense que c'est tout à fait dans l'esprit de la doctrine. Ces ondes sont de la forme : $A \sin 2\pi\nu_0 t_0$. Un observateur en mouvement suivant l'axe dez z avec la vitesse v par rapport au corpuscule et au milieu les voit, d'après les formules de Lorentz, comme ondes: $A \sin 2\pi\nu\left(t - \frac{z}{v}\right)$ avec $Vv = c^2$: la vitesse V est ainsi la même dans le vide et dans tous les milieux. Que faut-il en conclure ? Doit-on admettre ce résultat ? Doit-on admettre qu'il faut remplacer dans les formules de Lorentz c par une autre vitesse c' ?

b) Si le corpuscule est un photon, et si le milieu est peu dispersif, l'onde du photon, qui dans son système propre, animé dans le milieu de la vitesse $\frac{c}{n}$, est: $A \sin 2\pi\nu_0 t_0$, apparaît dans le système du milieu, toujours d'après les formules de Lorentz comme une onde : $A \sin 2\pi\left(t - \frac{z}{nc}\right)$. La phase de l'onde aurait la vitesse nc contrairement à l'expérience. Que faut-il en conclure, si l'on admet les formules de Lorentz ? Que la vitesse $\frac{c}{n}$ du photon et de son onde est une apparence macroscopique; qu'en réalité, la vitesse microscopique est c, mais, que par suite de chocs contre les particules matérielles du milieu, il y a des rétrogradations, d'où résulte la vitesse microscopique $\frac{c}{n}$? En tout cas, s'il y a une onde macroscopique stationnaire dans le système moyen du flot de photon, on n'échappe pas à la conclusion que sa vitesse macroscopique de phase dans le milieu est cn et que ceci est contraire à l'expérience[1]. Ne faut-il pas plutôt conclure que les photons n'ont pas d'existence propre ?

c) Les formules de base relatives à un corpuscule quelconque sont:

$$h\nu = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{h\nu}{c^2} v .$$

Pour le photon de vitesse c, il faut que $m_0 = 0$. Mais alors, si $v = \frac{c}{n}$, on trouverait que l'énergie et la quantité de mouvement du corpuscule ne peuvent être que nulles et la fréquence aussi. Ou bien, si, dans l'aspect microscopique $v = c$, même dans le milieu, c'est qu'il y a réflexions et rétrogradations. Il y a donc des moments où v n'annule et reste inférieur à c quelques instants. La conclusion demeure alors la même.

d) Dans le milieu d'indice n, la relation préliminaire conduisant ensuite à celle d'Heisenberg: $\delta N \times \delta l \geqslant 1$, où N désigne le « nombre d'ondes » et l la longueur comptée dans le sens de la propagation, demeure vérifiée. Or

$$N = \frac{\nu}{V} = \frac{h\nu v}{c^2} : \frac{h V v}{c^2} = \frac{p c^2}{h V v},$$

[1] Mais cette onde macroscopique stationnaire n'existe peut-être pas, si les photons ont la vitesse c, en général, dans le milieu. Par contre, à un instant donné du temps du système du milieu, les photons peuvent être rangés en trois catégories, s'ils ont, en général, la vitesse c: les uns de vitesse c vers l'avant; d'autres de vitesse c vers l'arrière; d'autres enfin en train de subir une réflexion sur les particules du milieu. Aux deux premiers groupes sembleraient devoir correspondre deux ondes de vitesse c, l'une vers l'avant, l'autre vers l'arrière; au troisième une onde stationnaire. L'expérience ne paraît pas correspondre à ces prévisions. Nous avons, au paragraphe IX, chapitre II, de notre première partie, donné déjà des raisons qui nous paraissent contraires à l'idée de la vitesse c pour les photons dans le milieu.

p désignant la quantité de mouvement $\frac{h\nu}{c^2}v$. S'il s'agit d'un corpuscule autre qu'un photon, on a $Vv = c^2$. La relation devient $\delta p \times \delta l \geqslant h$. C'est bien la relation d'Heisenbergerg qui continuerait d'être vraie. S'il s'agit d'un photon : $V = v = \frac{c}{n}$, d'où $\delta p \times \delta l \geqslant \frac{h}{n^2}$. La précision dépendrait du milieu et de la lumière employée. C'est ce qu'on retrouve en reprenant, pour un milieu d'indice n le calcul du microscope.

e) Dans la critique qu'il fait des procédés de mesure dont nous disposons, Heisenberg est amené à considérer un électron se déplaçant sur le porte-objet d'un microscope, et dont il s'agit de déterminer la position et la vitesse. L'électron subissant l'effet Compton, à la suite des chocs des photons, sa vitesse se trouve altérée et l'on montre que la relation d'incertitude $\delta p \times \delta l \geqslant h$ est vérifiée.

Mais toute lumière doit-elle nécessairement produire un effet Compton ? On peut admettre — et même commencer à développer cette idée — que les chocs qui interviennent dans la théorie des quanta sont le fait, non de corpuscules provenant d'une certaine distance, mais bien des particules d'éther ébranlées par les vibrations. Dès lors, on peut penser que si la lumière employée est une lumière polarisée à vibrations perpendiculaires à la trajectoire de l'électron, ou une lumière circulaire, l'effet Compton sera réduit, peut être même inexistant et que l'incertitude sera moindre que celle qui correspond à la relation en question.

Cela n'empêche pas qu'il y a sans doute quelque chose de fondamental dans les idées d'Heisenberg sur l'incertitude dans les mesures et sur le trouble apporté par une mesure dans le phénomène soumis à cette mesure.

II. — *Théorie nouvelle.* — D'ailleurs la théorie des quanta lumineux peut revêtir une autre forme. Pour s'en rendre compte il suffit de considérer que tous les phénomènes où on en voit des preuves ne font intervenir que des chocs, au sens large du mot, contre des obstacles. *Si l'on constate un choc rien n'autorise à conclure de ce seul fait que le projectile vient d'une certaine* *distance.* On peut aussi bien admettre qu'il provient du voisinage immédiat de l'obstacle. Or, nous avons admis l'existence de vibrations longitudinales pour la lumière naturelle; les particules d'éther qui vibrent au voisinage de l'obstacle peuvent par leurs chocs, jouer intégralement le rôle des quanta supposés émis par la source lumineuse. Tout phénomène qui s'explique par l'existence de ces quanta de lumière, s'expliquera aussi bien par l'existence des ondulations longitudinales de la lumière. D'ailleurs des ondulations purement transversales — de la lumière polarisée par conséquent — produiraient aussi les chocs, mais alors dans le sens de la vibration, c'est-à-dire perpendiculairement à la direction de propagation; les effets en seraient sans doute moins importants.

Une des difficultés les plus profondes de la théorie des photons est celle qui concerne l'obtention de franges d'interférences avec des sources lumineuses extrêmement faibles. Il faut expliquer qu'on obtienne, après de longues poses, des photographies de franges, alors qu'on peut admettre qu'il n'y a qu'un photon à la fois dans l'appareil interférentiel, constitué par exemple par un écran d'Young; le photon semble subir une action de ceux des trous de l'écran par lesquels il n'est pas passé; il faut en quelque sorte qu'il ne soit pas localisé. Mais, d'autre part, l'effet photoélectrique enregistré sur le film photographique, quelle que soit l'intensité de la lumière pourvu que la fréquence soit assez grande, oblige à admettre que le photon est localisable. Les choses se concilient par l'onde de probabilité.

Mais quelle différence y aurait-il, à l'arrivée, entre l'effet photoélectrique du photon, de masse 10^{-45} gr par exemple, et celui que produirait un grain d'éther de même masse, voisin du film, et ébranlé par une onde longitudinale réelle qui l'aurait atteint ? Quelle différence y aurait-il, au départ de la source, entre l'émission discontinue de photons, et l'émission discontinue d'ébranlements tantôt dans une direction, tantôt dans une autre, comme pour les photons ? Aucune différence discernable. Si l'on admet un instant ces hypothèses nouvelles, on voit qu'il y aura, dans le parcours, un train d'ondes réelles, étendu et non localisé, qui sera astreint à se propager dans une certaine direction, avec un front restreint. Il pourra passer par un trou de l'écran; mais, quand il y passera, le train d'ondes précédent, lui-même étendu, pourra ne pas être encore détruit, et l'interférence pourra se faire. Il n'y a presque, entre cette façon simple de voir les choses, et la première façon, qu'une question de mots, non négligeable d'ailleurs. Il semble cependant qu'avec des sources encore des milliers ou des millions de fois plus faibles on pourrait cesser d'avoir des franges.

Il est bien certain aussi que, si cette conception est la bonne les ondes électro-statiques et gravifiques, les mouvements magnétiques de l'éther, doivent produire des phénomènes parents de ceux produits par les quanta lumineux.

Rappelons que dans notre première partie, chapitre III, paragraphes VI et suivants, nous avons décrit une expérience nouvelle dont la théorie relativiste et corpusculaire ne donne pas une explication satisfaisante. Rappelons aussi qu'il nous paraît désirable de reprendre l'expérience en question avec des flux d'électrons dès que ce sera techniquement possible.

Les résultats expérimentaux qui servent de soutien à la théorie des quanta sont d'abord ceux qui ont trait au rayonnement du corps noir, puis l'effet photoélectrique, l'effet Compton, l'effet Raman.

La première chose à faire est de rendre compte de l'existence de la pression de la lumière. Dans le parcours libre d'une onde lumineuse longitudinale chaque tranche d'éther étant alternativement comprimée et dilatée par deux demi-vibrations égales, l'énergie moyenne de cette tranche est indiscernable par les procédés actuellement employés. Mais elle devient discernable, théoriquement et d'ailleurs aussi expérimentalement, dans le cas de la réflexion contre un obstacle.

Considérons un faisceau parallèle de lumière naturelle de fréquence ν tombant sur un miroir plan réflecteur parfait, suivant l'incidence normale. Lors de chaque demi-vibration dirigée vers le miroir, n particules incidentes frappent le miroir par unité de surface produisant une impulsion sur lui; lors de chaque demi-vibration s'éloignant du miroir, n particules déjà réfléchies le frappent aussi, produisant une impulsion qui s'ajoute à la précédente. Lors de chaque vibration ont donc lieu $2n$ chocs par unité de surface.

Si $\frac{h}{2}$ est l'énergie que produit en moyenne sur le miroir la réflexion d'une particule d'éther, l'énergie fournie au miroir est, par vibration et par unité de surface de nh; et comme cela a lieu ν fois par seconde, l'énergie fournie en une seconde est $nh\nu$; d'où il suit que chaque particule peut être considérée comme douée par la vibration de l'énergie $h\nu$ à chaque seconde. Il revient au même de considérer, pendant un temps dt, le choc de Ndt photons, d'énergie $h\nu$, ou le choc par seconde de $N\nu$ particules d'éther en vibration, l'énergie moyenne de chacune d'elles étant h par vibration. Dans le premier cas, l'énergie mise en jeu est: $h\nu\,Ndt$. Dans le second cas, elle est: $N\nu\,hdt$, c'est-à-dire a même valeur.

L'énergie lumineuse peut être en conséquence, considérée comme formée de grains de valeur $h\nu$ sans qu'on croie réellement à l'existence de ces grains [1].

Un rayonnement polarisé dont la vibration aurait une composante normale au miroir produirait aussi une pression de radiation sur le miroir; mais, très probablement, cette pression n'aurait pas la même valeur que celle du rayonnement à vibrations longitudinales.

Un rayonnement lumineux à vibrations rigoureusement transversales et parallèles au miroir ne devrait produire aucune pression de radiation sur ce miroir. Un rayonnement électromagnétique continuerait sans doute à en produire à cause des compressions développées par la force électrique.

La formule de Planck pour le rayonnement noir est ce qu'il convient de retrouver ensuite. Soit dans une enceinte parcourue par un rayonnement noir à température absolue T, un résonateur de Planck. Les particules d'éther qui le frappent et qui accélèrent ou retardent son mouvement sont douées d'une énergie $h\nu$ par unité de temps. Soit un nombre très grand N_i d'atomes dans un état d'énergie ε_i; un autre nombre très grand N_j dans un état d'énergie ε_j.

[1] M. Sivadjian a, de son côté, émis les mêmes idées que ci-dessus.

Pendant chaque unité de temps un certain nombre d'atomes passe de l'énergie ε_i à l'énergie ε_j et inversement; on peut dire qu'il existe une certaine probabilité de passage de l'état i à l'état j pendant l'unité du temps. Et il s'agit d'évaluer cette probabilité.

Supposons $\varepsilon_i < \varepsilon_j$. Le passage de l'état i à l'état j ne peut se produire que par absorption de l'énergie radiante. Dans l'unité du temps, une particule d'éther peut céder l'énergie $h\nu$. Elle permet de faire passer de l'état i à l'état j un nombre n d'atomes égal à $\frac{\varepsilon_i - \varepsilon_j}{h\nu}$.

Le passage de j à i s'effectue spontanément. Pour obtenir la loi de Planck il suffit d'écrire que le nombre des passages, de i vers j est égal à celui des passages de j vers i, dans l'unité de temps. Nous sommes alors dans les conditions voulues pour pouvoir reproduire la démonstration qu'a donnée Einstein de la formule de Planck. Il est à noter que la vitesse c de la lumière dans le vide figure dans cette formule; si l'on étudiait le rayonnement du corps noir dans une enceinte remplie d'un corps d'indice n, on obtiendrait une formule où c devrait peut-être être remplacée par la vitesse c' de la radiation envisagée de fréquence ν dans ce milieu.

La formule photoélectrique d'Einstein, vérifiée dans les domaines des rayons lumineux, des rayons X et γ s'interprète immédiatement par le choc de grains d'éther d'énergie $h\nu$ par vibration, en vibration contre les électrons des atomes, au lieu de chocs de quanta de lumière, d'énergie $h\nu$ en mouvement vers ces électrons. S'il s'agit d'un rayonnement incident formé par la composition de deux rayonnements monochromatiques de fréquences ν_1 et ν_2, on sait que les électrons émis ont une énergie correspondant sensiblement à ν_1 et ν_2. Cela peut s'expliquer ainsi. La fréquence résultante étant variable, ainsi que l'amplitude, on comprend que ce soit au moment où l'amplitude est maxima ou au moment où la fréquence est maxima, qu'ait lieu l'émission.

Il y a donc par période deux moments particulièrement favorables à l'émission.

Dans le phénomène de Compton — diffusion avec changement de longueur d'onde — décrit aussi comme choc d'un quanta de lumière et d'un électron de masse m_0, on peut de la même manière, faire intervenir le grain d'éther en vibration lumineuse et l'électron. Soit ν_1 la fréquence de vibration de ce grain avant le choc; supposons l'électron en repos au moment du choc et appelons θ l'*angle dont sera dévié le grain d'éther* par le choc; le principe de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement nous donnera quatre équations d'où nous tirerons la fréquence finale ν_2:

$$\nu_2 = \frac{\nu_1}{1 + \frac{h\nu_1}{m_0 c^2} \sin\frac{\theta}{2}}$$

c'est la formule vérifiée par l'expérience. La même manière d'envisager les choses peut être aussi employée en ce qui concerne l'effet Raman.

Aussi aboutissons-nous à montrer que les ondes et vibrations lumineuses sont ce qui donne naissance aux quantablumineux qui n'auraient pas dès lors d'existence propre [1].

Chapitre XI.

Conclusions d'ensemble sur les théories où peut être mise en cause la dynamique newtonienne.

I. — *Résumé de quelques résultats.* — Au chapitre VII il est montré que la mécanique de la relativité généralisée peut apparaître comme la dynamique newtonienne du champ de forces de la gravitation pourvu que l'on emploie un « potentiel » dépendant de la vitesse du mobile dans le champ.

[1] Ainsi, quand un rayon lumineux polarisé s'éteint, il n'y a pas à se préoccuper de ce que deviennent les photons associés, au lieu que dans le langage des quanta leur probabilité de présence devient nulle partout et qu'ils semblent ainsi détruits.

Plus exactement, il y est établi que l'emploi du principe de la moindre action sous la forme newtonienne d'Hamilton, et de la conservation de l'énergie, soit:

$$\mathrm{T} + \mathrm{U} = \mathrm{C}^{te}$$

et

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\mathrm{T} - \mathrm{U})\, dt = 0$$

conduisent, en prenant pour U la valeur, obtenue d'ailleurs déductivement:

$$\mathrm{U} = \frac{\mathrm{KM}}{c^2 r}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \frac{\mathrm{K}^2 \mathrm{M}^2}{c^2 h^2} r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - \frac{\mathrm{KM}}{r} \qquad (1)$$

du potentiel de gravitation d'un centre de masse M sur un mobile animé au point r, φ d'une certaine vitesse, aux mêmes équations que l'emploi de la loi d'Einstein $\delta \int ds = 0$, avec la valeur du ds^2 de Schwarzschild [1].

Dans le premier cas, l'équation de la trajectoire est, en effet, avec $u = \frac{1}{r}$:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 = -\frac{\mathrm{KM}}{ah^2} + \frac{2\,\mathrm{KM}}{h^2}\left(1 + \frac{\mathrm{KM}}{c^2 a}\right)u + \frac{2\,\mathrm{KM}}{c^2}\left(1 - \frac{4\,\mathrm{K}^2\mathrm{M}^2}{c^2 h^2}\right)u^3$$

Dans le second cas, elle est:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 = -\frac{\mathrm{KM}}{ah^2} + \frac{2\,\mathrm{KM}}{h^2}u + \frac{2\,\mathrm{KM}}{c^2}u^3 .$$

Les deux équations conduisent aux mêmes résultats.

On peut même noter que la valeur ainsi donnée de U permet d'expliquer pourquoi l'on trouve trois valeurs différentes de la

[1] Comparez avec CHAZY (*La théorie de la relativité et la mécanique céleste*, t. 1) au sujet du ds^2 approché de de Sitter (p. 103), et au sujet du potentiel de variation de Weber-Newmann (p. 117 à 120). Ce potentiel est déduit d'une extension du principe de Hamilton au cas où U dépend des vitesses. C'est quelque chose de tout analogue que nous avons envisagé au chap. VII. Mais alors que Weber s'inspirait des lois électrodynamiques, nous avons, au chap. VII, serré du plus près qu'il a été possible la méthode d'Einstein en un langage différent.

masse de Jupiter selon qu'on la déduit des mouvements de ses satellites, des perturbations des grosses planètes et des perturbations des petites planètes. Car, en chaque cas, les valeurs des vitesses figurant dans U sont différentes.

Au chapitre IX, on a vu que l'auteur a été amené à soutenir qu'il ne faut pas voir dans la mécanique ondulatoire une doctrine plus exacte que la dynamique newtonienne. Celle-ci, dit-il, fournirait les mêmes résultats que l'autre, si on lui donnait, pour remplir le cadre vide de sa formule de la moindre action, les valeurs convenables des potentiels. Et si la mécanique ondulatoire donne, à l'échelle de l'électron, des résultats meilleurs que ceux que donnerait la mécanique newtonienne, c'est uniquement parce qu'appliquer la mécanique ondulatoire équivaut à tenir compte d'une nature ondulatoire du potentiel de la gravitation ou de l'électro-statique. Entre les deux doctrines, la différence est, au fond, non pas dans les principes, mais dans le choix des potentiels.

II. — *Détermination des potentiels.* — Ces résultats amènent à se poser la question générale suivante: à quelles conditions devront satisfaire une expérience ou une observation pour qu'elles puissent être considérées comme mettant en cause les principes mêmes d'une dynamique, par exemple de la dynamique newtonienne ?

Supposons que comme les expériences de la dynamique de la relativité restreinte, elles portent sur la variabilité de la masse avec la vitesse. Elles ne pourront alors établir quoi que ce soit de contraire à la dynamique newtonienne. Nous avons montré, en effet, qu'il suffisait d'admettre — et rien ne s'y oppose, au contraire — que, c'était non pas la masse, mais la force appliquée par le champ sur le mobile qui dépendait de la vitesse, pour sauvegarder l'une des bases, qui paraissait compromise, de la dynamique classique.

Supposons que, comme les observations de la relativité généralisée, elles portent sur le mouvement des astres et montrent un désaccord entre les prévisions de la mécanique newtonienne appuyées sur la valeur $\frac{KM}{r}$ du potentiel du centre de gravitation, et la réalité; nous venons de voir qu'il suffit d'employer un autre potentiel, dépendant aussi de la vitesse de l'astre, et qui d'ailleurs en l'espèce n'avait pas été composé pour cela, mais trouvé au moyen d'autres considérations, pour que le résultat devienne conforme à l'observation.

Supposons que, comme les observations de la mécanique ondulatoire, elles paraissent nécessiter une correction aux équations fondamentales de la mécanique newtonienne. Il suffit d'admettre que le potentiel des champs sur lesquels portent les observations dépendent de certaines circonstances, et que la chose soit physiquement vraisemblable, pour rétablir la possibilité des équations générales en question, comme nous l'avons vu.

D'une manière générale, soit dans l'ordre gravifique, électrique, ou simplement dynamique, un résultat quelconque donné par l'expérience ou par l'observation et touchant le mouvement d'un astre, d'un électron ou d'un point matériel dans un champ. Ce résultat s'exprime par des équations du mouvement. Par ailleurs, le principe de la moindre action — celui de la mécanique newtonienne par exemple — donnera lui aussi des équations où figurera la fonction U des coordonnées du mobile et de leurs dérivées par rapport au temps.

En identifiant ces deux groupes d'équations, on pourra théoriquement du moins, trouver une valeur de la fonction U qui, naturellement permettra en retour au principe de donner un résultat en accord avec l'expérience ou l'observation. *N'est-ce pas ainsi, d'ailleurs, en somme, que Newton découvrit sa loi de l'attraction* ? N'est-ce pas ainsi, au fond, qu'ont été découvertes toutes les lois physiques ? Ainsi donc, dans la dynamique newtonienne — et dans les autres aussi — le principe de la moindre action apparaît comme quelque chose que l'expérience ne réussira pas facilement à atteindre. Pour l'atteindre, il faudrait que l'expérience pût porter directement sur la valeur même de la fonction U, ou au plus, de la force qui en dérive, et *cela pendant le mouvement même*. Or, à notre connaissance il n'a encore été réalisé aucune mesure directe de ce genre. A défaut d'une telle mesure, le principe fondamental de la dynamique newtonienne paraît plutôt *une condition* à laquelle on impose aux potentiels de satisfaire pour donner des résultats conformes à ce que l'expérience nous apprend touchant les mouvements, seules choses que nous puissions atteindre *directement avec précision.*

En somme, la dynamique de la relativité demeure, et l'on peut en faire usage et même l'étendre, comme on l'a fait, à la cosmologie et à l'expansion de l'univers. Ce n'est qu'indirectement, et parce que la cinématique de la relativité a été reconnue inexacte dans notre Ire partie [1], que la dynamique se trouve atteinte dans ses principes, mais non pas forcément dans ses formules appliquées à la physique.

Ce n'est qu'au cas où un même potentiel ne pourrait rendre compte à la fois des divers résultats expérimentaux que le rejet des principes d'une mécanique et leur remplacement pourraient commencer à s'imposer. Nous ne croyons pas que ce fait se soit déjà produit; nous pensons, et nous avons cru établir, pour une bonne part, que tous les phénomènes d'ordre dynamique, dont peuvent faire état la dynamique de la relativité restreinte ou généralisée et la mécanique ondulatoire, s'expliquent moyennant un choix convenable, mais unique, des potentiels, avec les principes newtoniens.

Dans cet ordre d'idées, considérons, par exemple, le principe de la moindre action de la relativité restreinte. Il s'écrit, L étant fonction de Lagrange:

$$\delta \int L\,dt = 0 ,$$

avec

$$L = -\,mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - F$$

dans le cas d'un point de masse propre m, animé d'une vitesse v suivant Ox dans le champ et soumis au champ. F représente la fonction potentielle.

On déduit de ce principe les équations relativistes du mouvement:

$$-\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{md^2x}{a^3\,dt^2}$$

$$-\frac{\partial F}{\partial y}\ (\text{ou } z) = \frac{m}{\alpha}\frac{d^2y}{dt^2}\ (\text{ou } z)$$

[1] *Archives, loc. cit.*

et inversement, de ces équations on déduirait l'expression ci-dessus du principe.

Mais on peut aussi bien, gardant la même valeur de L, poser:

$$V = mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{1}{2} mv^2 + F$$

et considérer V comme la fonction « potentielle » du champ sur le point en mouvement dans le champ avec la vitesse v.

Alors le principe de la moindre action se présente sous la forme hamiltonienne, avec:

$$L = \frac{1}{2} mv^2 - V .$$

La dynamique de la relativité restreinte nous apparaît ainsi une fois de plus comme la dynamique newtonienne du champ où le mouvement est défini par les équations ci-dessus vérifiées par l'expérience, c'est-à-dire comme la dynamique newtonienne du champ électro-magnétique.

Donnons encore un autre exemple. Dans la théorie des perturbations dans un champ principal, la mécanique ondulatoire introduit une sorte d'énergie, dite énergie d'échange, dont on dit qu'elle est d'une nature entièrement nouvelle, susceptible d'aucune interprétation classique. Ce fait tient, en mécanique ondulatoire, à l'indiscernabilité des corpuscules de même nature, et du caractère symétrique ou antisymétrique des fonctions d'onde, caractères qui pourront être conservés, à une différence de langage près, dans une théorie où les ondes joueraient un autre rôle physique, le formalisme restant le même.

Dans le cas de deux particules 1 et 2, le terme d'énergie d'échange a pour valeur:

$$A = \text{partie réelle de} \int \psi_i^*(1)\, \psi_k^*(2)\, \psi_i(2)\, \psi_k(1)\, V d\tau ,$$

$d\tau$ étant l'élément de volume et V le potentiel d'interaction supposé ne dépendre que de la distance des deux particules r_{12}. L'expérience indique la valeur de A, en accord avec la théorie que donne par exemple Heisenberg pour le spectre ortho-para de l'Hélium. Conformément à notre méthode, le résultat expérimental sera pris pour point de départ. Il s'agira pour nous, tout au contraire, de déterminer V. Le résultat sera tenu pour acceptable si d'une part on peut trouver une valeur de V, si d'autre part cette valeur ne se heurte à aucune impossibilité ou invraisemblance physique. Or que peut-il y avoir d'étonnant, au sujet de ce potentiel, à ce qu'il dépende, non seulement de r_{12}, mais aussi de l'orientation des particules dans le champ principal, et même de la valeur des ondes ψ liées à chaque corpuscule dans le champ principal, ou, comme nous dirions, des ondes par lesquelles le champ principal agit sur chaque particule ? A notre avis, ce serait même le contraire qui serait étonnant, et il nous paraît que les ondes secondaires représentant ou occasionnant l'interaction des particules entre elles ne doivent pas agir ou se comporter comme si les ondes principales n'existaient pas. Les énergies correspondant à ce dérèglement nous paraissent donc pouvoir très bien être reconnues en théorie classique. Nous ne serions même pas surpris qu'en cherchant bien on trouvât, sans doute en théorie hydrodynamique ancienne, des cas ou de tels problèmes d'interactions d'ondes réelles ont été effectivement traités, et probablement avec des résultats assez analogues.

En somme, dans l'état actuel de l'expérience, il y a plusieurs dynamiques qui peuvent être tenues pour mathématiquement exactes. Une seule est physiquement vraie. L'expérience ne pourra établir laquelle qu'à condition d'atteindre directement les potentiels des champs naturels.