

La théorie de la relativité et l'électromagnétisme

Autor(en): **Soudan, R.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Archives des sciences [1948-1980]**

Band (Jahr): **3 (1950)**

Heft 1

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-739428>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

LA THÉORIE DE LA RELATIVITÉ ET L'ÉLECTROMAGNÉTISME

PAR

R. SOUDAN

1. INTRODUCTION.

Il est très tentant de chercher à déduire les équations de l'électromagnétisme de la Théorie de la Relativité Générale comme cela se fait d'ailleurs pour les équations de la mécanique newtonienne classique.

On pourrait s'attendre, à priori, à ce que cette entreprise réussisse, étant donnée la grande généralité des considérations sur lesquelles repose la Théorie de la Relativité. Toutefois les difficultés sont connues qui s'opposent à la réalisation d'un tel projet.

Nous aimerions montrer ici comment on peut, malgré tout, arriver au but moyennant deux postulats et sous certaines réserves.

2. GÉNÉRALITÉS.

Un individu parcourant l'espace peut, comme on sait, en déduire la courbure s'il est armé d'un étalon de longueur. Mais cet individu arriverait-il au même résultat s'il effectue ses mesures après avoir été chargé d'électricité ? Nous postulons le contraire :

POSTULAT I: *Un individu porteur d'une charge électrostatique et parcourant l'espace peut en trouver la courbure différente de celle qu'il mesurerait aux mêmes endroits, mais non chargé ou différemment chargé d'électricité.*

En d'autres termes, il est postulé que les $g_{\mu\nu}$ du ds^2 de l'espace dépendent, en particulier, de la charge (ou du rapport e/m) de la particule dont on cherche la trajectoire. L'espace devient « relatif à chaque particule qu'il contient ».

Dans toute mécanique on peut distinguer deux groupes d'équations: celles du premier groupe permettent de déduire les champs de l'ensemble des particules étudiées; celles du second groupe sont les équations qui permettent de trouver la trajectoire de chaque particule en particulier, lorsque les champs sont connus.

Dans le cas qui nous occupe, l'ensemble des particules étudiées courbe l'espace et détermine les $g_{\mu\nu}$ ou champs. Mais, à cause du postulat I, ces $g_{\mu\nu}$ ne sont complètement déterminés que si l'on connaît encore la charge de la particule étudiée.

Ceci étant posé, une géodésique de l'espace n'est déterminée que si l'on connaît encore la charge de la particule qui la décrit. Il est alors possible d'admettre que les géodésiques soient les trajectoires possibles des particules formant l'espace. Sans le postulat I, une géodésique ne saurait être trajectoire, car les particules de toutes masses et charges devraient décrire la même trajectoire dans des conditions initiales identiques. Or il est très tentant de conserver le grand principe de Leibnitz niant la possibilité d'action à distance, c'est-à-dire de conserver aux trajectoires la nature d'une géodésique.

Les raisons de formuler le postulat I sont maintenant indiquées.

Les équations du premier et second groupe sont, sous réserve de la petite extension apportée par le postulat I, celles de la Théorie de la Relativité Générale:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu , \quad (1)$$

$$R_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T , \quad (2)$$

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0 . \quad (3)$$

$\Gamma_{\mu\nu}^\tau$ sont les symboles de Christoffel de seconde espèce.

$R_{\mu\nu}$ est le tenseur de Ricci:

$$R_{\mu\nu} = \partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \partial_\mu \Gamma_{\nu\alpha}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta - \Gamma_{\mu\alpha}^\beta \Gamma_{\nu\beta}^\alpha . \quad (4)$$

Pour simplifier, nous avons posé: $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$.

$T_{\mu\nu}$ dépendra du rapport e/m de la particule étudiée pour que $g_{\mu\nu}$ en dépende: c'est la petite extension signalée plus haut.

Nous allons maintenant transformer approximativement les équations ci-dessus pour leur donner une forme maxwellienne dans un système particulier de coordonnées.

Supposons très faibles les masses et charges de l'ensemble de particules étudié. Alors nous sommes en droit de choisir nos coordonnées comme étant à la fois quasi galiléennes et isothermes ainsi qu'on le démontre dans les traités généraux sur la Théorie de la Relativité ¹.

Les coordonnées étant quasi galiléennes, on a:

$$g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu} . \quad (5)$$

les $\varepsilon_{\mu\nu}$ sont très petits devant 1; les $\gamma_{\mu\nu}$ sont ceux du ds^2 de la relativité restreinte:

$$\gamma_{ii} = -1 ; \quad \gamma_{\mu \neq \nu} = 0 ; \quad \gamma_{44} = +1 . \quad (6)$$

Les indices latins prennent toujours les valeurs 1, 2, 3 et les indices grecs les valeurs 1, 2, 3, 4.

Les coordonnées étant isothermes, on a ¹:

$$g^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^\mu = 0 . \quad (7)$$

En outre, nous supposerons que les vitesses des particules sont petites devant celle de la lumière. Nous négligerons devant 1 $(v/c)^2$ ou $\varepsilon_{\mu\nu}$ mais non v/c . Pour fixer les idées, disons que v/c est infiniment petit du premier ordre et que nous ne négligeons

¹ Voir, par exemple: CHAZY, *Théorie de la Relativité et Mécanique céleste*, tome II, p. 150, 141, 147.

devant 1 que les infiniments petits du second ordre (ou d'ordre supérieur) tels que $(v/c)^2$ ou $\varepsilon_{\mu\nu}$. Nous supposons encore, pour simplifier, que les champs varient « lentement » par rapport au temps, c'est-à-dire que :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} g_{\mu\nu} \ll \partial_r g_{\mu\nu} .$$

Nous considérerons le premier terme de l'inégalité comme très petit, mais non négligeable par rapport au second. Comme le second membre de l'inégalité est infiniment petit du deuxième ordre (à cause de (5)), le premier membre est infiniment petit du troisième ordre. Enfin, pour simplifier l'écriture, nous supposons l'unité de temps choisie de telle sorte que $C = 1$.

On sait que les approximations ci-dessus sont celles d'Einstein qui conduisent, si l'on néglige le premier ordre devant 1, à la mécanique de Newton.

Nous ne négligerons, comme déjà dit, que le deuxième ordre devant 1 et arriverons à une forme d'équations identiques à celles de l'électromagnétisme.

Pour simplifier nous négligerons les potentiels dûs aux masses.

3. GÉODÉSIQUES.

Puisque $\varepsilon_{\mu\nu}$ est négligeable devant 1 et, en vertu de (5) et (6), les équations (3) deviennent :

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \gamma^{\mu\alpha} \left[\begin{matrix} \alpha\beta \\ \mu \end{matrix} \right] \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0 . \quad (8)$$

En outre, (1) montre que :

$$\frac{ds}{dx^4} = \frac{ds}{dt} = 1$$

dans le cadre de l'approximation indiquée. Par contre :

$$\frac{dx^i}{ds} = \frac{dx^4}{ds} \frac{dx^i}{dx^4} = \frac{dx^i}{dt}$$

sont les vitesses qui sont infiniment petites du premier ordre puisque $C = 1$.

Ainsi il faut retrancher de la somme en α, β dans (8) tous les couples d'indices α, β où α et β sont différents de 4, ces termes étant infiniment petits du second ordre par rapport à celui où $\alpha = 4, \beta = 4$.

Il reste donc, en nous limitant aux trois premières équations (8):

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} - \left[\begin{matrix} 44 \\ i \end{matrix} \right] - 2 \left[\begin{matrix} 4r \\ i \end{matrix} \right] \frac{dx^r}{ds} = 0 . \quad (9)$$

Le premier terme de (9) se transforme de la manière suivante:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} = \frac{dx^4}{ds} \frac{d}{dx^4} \left(\frac{dx^4}{ds} \frac{dx^i}{dx^4} \right) = \frac{d^2 x^4}{ds^2} \frac{dx^i}{dx^4} + \left(\frac{dx^4}{ds} \right)^2 \frac{d^2 x^i}{dx^4{}^2} . \quad (10)$$

Notons d'un point les dérivées par rapport au temps et substituons dans (10) la valeur de $\frac{d^2 x^4}{ds^2}$ tirée de (8). Il vient approximativement:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} = \ddot{x}^i - \dot{x}^i \left[\begin{matrix} \alpha \beta \\ 4 \end{matrix} \right] \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} . \quad (11)$$

Le second terme de (11) contenant déjà un infiniment petit du premier ordre (\dot{x}^i), il suffit de conserver le couple de valeurs $\alpha = 4, \beta = 4$ dans (11), ce qui donne, après substitution dans (9):

$$\ddot{x}^i - \left[\begin{matrix} 44 \\ i \end{matrix} \right] - 2 \left[\begin{matrix} 4r \\ i \end{matrix} \right] \dot{x}^r - \dot{x}^i \left[\begin{matrix} 44 \\ 4 \end{matrix} \right] = 0 .$$

Développons cette équation:

$$\begin{aligned} x^i + \frac{1}{2} \partial_i g_{44} - \partial_4 g_{i4} - \partial_r g_{i4} \dot{x}^r + \partial_i g_{r4} \dot{x}^r - \partial_4 g_{ir} \dot{x}^r - \\ - \frac{1}{2} \partial_4 g_{44} \dot{x}^i = 0 . \end{aligned} \quad (12)$$

Si nous nous limitons aux deux premiers termes, nous retomberions sur un résultat connu: l'équation des trajectoires en mécanique newtonienne classique.

Par suite des approximations faites, les troisième, quatrième, cinquième termes sont du premier ordre par rapport aux deux premiers et doivent être conservés. Par contre, les deux derniers doivent être éliminés puisque contenant une dérivée par rapport au temps et une vitesse infiniment petite du premier ordre.

En nous rappelant (5) et en désignant par i, i', i'' trois indices qui se suivent dans l'ordre circulaire, (12) devient :

$$\ddot{x}^i + \frac{1}{2} \partial_i \varepsilon_{44} - \partial_4 \varepsilon_{i4} + (\partial_i \varepsilon_{i'4} - \partial_{i'} \varepsilon_{i4}) \dot{x}^{i'} - (\partial_{i''} \varepsilon_{i4} - \partial_i \varepsilon_{i''4}) \dot{x}^{i''} = 0 . \quad (13)$$

Comme un seul système de coordonnées est utilisé ici, il est possible d'écrire (13) ainsi (puisque le système est quasi galiléen) :

$$\ddot{x}^i + \frac{1}{2} \partial_i \varepsilon_{44} - \partial_4 \varepsilon_{i4} + \text{rot}_{i''} \varepsilon_{i4} \cdot \dot{x}^{i'} - \text{rot}_{i'} \varepsilon_{i4} \cdot \dot{x}^{i''} = 0 ,$$

et même :

$$\ddot{x}^i + \frac{1}{2} \partial_i \varepsilon_{44} - \partial_4 \varepsilon_{i4} + [\dot{x}^i, \text{rot} \varepsilon_{i4}]_i = 0 . \quad (14)$$

Il est bien entendu que les trois quantités ε_{i4} ne peuvent être les composantes d'un vecteur, puisque, selon (5), elles font partie de $g_{\mu\nu}$ qui lui est un tenseur symétrique covariant du second ordre. Mais puisque nous nous interdisons un changement de coordonnées, aucune confusion n'est possible en écrivant $\text{rot} \varepsilon_{i4}$ ou encore en faisant intervenir un produit vectoriel.

Supposons maintenant que la dépendance des $g_{\mu\nu}$ en e/m soit linéaire parce que cette supposition est la plus simple qui se présente à l'esprit et aussi parce que si e/m est très petit, on peut développer $g_{\mu\nu}$ en série de puissances de e/m et se limiter à l'approximation linéaire.

Posons dans le but de rappeler les notations maxwelliennes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \varepsilon_{44} &= -\frac{e}{m} U(x^\mu) , \\ \varepsilon_{i4} &= -\frac{e}{m} A_i(x^\mu) . \end{aligned} \quad (15)$$

Ici encore U, A_i ne seront que l'image des potentiels électromagnétiques puisqu'ils ne sauraient former, dans le cas particulier, un quadrivecteur. (Les termes d'ordre o en e/m seraient les potentiels gravifiques que nous négligeons ici.)

En posant encore, comme on le fait en électromagnétisme (au signe près pour U):

$$\begin{aligned} E_i &= + \text{grad}_i U - \dot{A}_i, \\ H_i &= + \text{rot}_i A, \end{aligned} \quad (16)$$

il vient finalement pour (14) l'expression:

$$m \ddot{x}^i = e E_i + [e \dot{x}^i, H_i]_i \quad (17)$$

Cette équation a une forme identique à celle que l'on rencontre en électromagnétisme. Le produit vectoriel serait très petit en gravifique, mais en électromagnétisme, il se produit une compensation du fait que les charges qui se déplacent dans les conducteurs sont beaucoup plus importantes que celles qui peuvent être déposées de façon électrostatique.

4. EQUATIONS DU CHAMP.

Arrivons maintenant aux équations du premier groupe, aux équations du champ (2). C'est un résultat acquis et démontré dans les traités généraux¹ que, si $\epsilon_{\mu\nu}$ est négligeable devant 1; ce que nous avons admis, et dans le système de coordonnées adopté, (2) se réduisent à:

$$\frac{1}{2} \square \epsilon_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} T. \quad (18)$$

D'autre part, en multipliant (7) par $g_{\mu\nu}$ et en sommant en μ , il vient, en nous rappelant que $g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu}$ au deuxième ordre près:

$$\gamma^{\alpha\beta} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \nu \end{bmatrix} = 0. \quad (19)$$

¹ Voir note 1, page 2.

Si nous imposons aux composantes du tenseur $T_{\mu\nu}$ de vérifier approximativement et dans notre système de coordonnées les relations suivantes ¹:

$$\frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 T_{ii} = T_{44} = -\frac{e}{m} 2\pi\rho, \quad (20)$$

$$T_{i4} = +\frac{e}{m} 2\pi J^i,$$

(Comme on sait, $T_{\mu\nu}$ doivent dépendre du rapport e/m de la particule étudiée), alors les équations (18) et la quatrième des équations (19) prennent une forme maxwellienne. (Les trois premières équations (19) sont sans intérêt.)

En effet, on a approximativement:

$$T = \gamma^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} = T_{44} - \sum_1^3 T_{ii} = -2T_{44},$$

et, par suite, en tenant compte de (15) et (20), (18) deviennent:

$$\square U = 4\pi\rho, \quad \sum_1^3 \square \varepsilon_{ii} = 0, \quad (21)$$

$$\square A_i = -4\pi J^i.$$

Les autres équations (18) sont sans intérêt. La troisième des équations (21) peut être satisfaite en posant $\Sigma \varepsilon_{ii} = 0$ et alors la quatrième des équations (19) devient:

$$\begin{bmatrix} 44 \\ 4 \end{bmatrix} - \sum_{r=1}^3 \begin{bmatrix} rr \\ 4 \end{bmatrix} = 0.$$

¹ Comme on sait, $T_{\mu\nu}$ doit être conservatif. L'une des équations de conservation, traitée dans le cadre de nos approximations conduit, compte tenu de (20), à l'équation de continuité.

Remarquons que $T_{\mu\nu}$ est nul dans le vide, comme dans la Théorie de la Relativité.

Quant au signe moins dans la première des équations (20), il s'explique aisément du fait que $J_i = -J^i$ (approximativement). C'est une considération de ce genre qui nous a conduit à changer le signe classique de U dans (15) (16) (21) (22).

C'est-à-dire, en nous rappelant que $\sum \varepsilon_{ii} = 0$:

$$\frac{1}{2} \partial_4 \varepsilon_{44} - \partial_r \varepsilon_{r4} = 0 ,$$

en enfin, en tenant compte de (15):

$$\dot{U} - \text{div A} = 0 . \quad (22)$$

Finalement (22) (21) (16) permettent de retrouver l'ensemble des équations de Maxwell:

$$\begin{aligned} \text{rot E} &= - \dot{H} , \\ \text{rot H} &= \dot{E} + 4 \pi J , \\ \text{div E} &= 4 \pi \rho , \\ \text{div H} &= 0 . \end{aligned} \quad (23)$$

5. CONCLUSIONS.

Ainsi, sous réserve du postulat I, des approximations faites et des conditions imposées au tenseur $T_{\mu\nu}$, les équations de la Relativité Générale peuvent être ramenées, dans un système de coordonnées particulier, à la forme de l'ensemble des équations de l'électromagnétisme.

Il en résulte que les mouvements de l'ensemble des particules étudié seront les mêmes, que l'on emploie les équations de la Théorie de la Relativité (avec les réserves indiquées) ou celles de l'électromagnétisme !

Si maintenant on change de système de coordonnées, les équations perdront peut être leur forme maxwellienne et (20) changeront d'apparence, mais les mouvements des particules auxquelles elles conduiront seront les mêmes puisque ces équations (1) (2) (3) (4) sont de covariance générale, c'est-à-dire que les résultats physiques auxquelles elles conduisent sont indépendants du choix des coordonnées.

Or on n'observe jamais rien d'autre que des particules ou des ensembles de particules.

Si les mouvements de toutes les particules observables sont les mêmes dans les deux mécaniques, alors ces deux mécaniques sont physiquement identiques.

Mais il n'y a pas que les particules telles que les électrons, protons, neutrons qui sont susceptibles d'être observées, mais aussi les photons et gravitons, puisque la physique moderne identifie actuellement champ et particule (découverte du méson). Il est évident que si les photons et gravitons (c'est-à-dire les champs électromagnétique et gravifique) étaient inobservables directement, il n'y aurait aucune différence observable entre les deux mécaniques. Si, par contre, les photons sont directement observables, les deux mécaniques leur donnent vraisemblablement des propriétés différentes à cause de la variance relativiste différente (quadrivecteur du potentiel électromagnétique pour la mécanique maxwellienne et tenseur symétrique d'ordre 2 dans le deuxième cas). Alors peut-être serait-il possible de trancher entre les deux possibilités. Mais remarquons bien qu'une expérience sur la polarisation de la lumière par exemple ne fait pas intervenir directement les photons: la lumière ou absence de lumière n'est perçue que par agitation d'électrons, protons, etc. Sa trajectoire n'est observée que par agitation à tel endroit des mêmes particules. Les verres polaroïdes ne sont encore observables que par les mêmes particules. En somme on pourrait s'exprimer ainsi pour décrire une telle expérience: « En agitant quelque part et d'une certaine façon des électrons (production de lumière), en plaçant un peu plus loin des électrons, protons, etc. disposés d'une certaine façon (verres polaroïdes), on peut avoir un peu plus loin encore agitation ou non des mêmes particules » (la lumière passe ou ne passe pas). Même si nous pensions voir directement un photon, nous ne pourrions dire qu'on l'observe directement puisqu'il serait observé par le mouvement des électrons, protons, etc. de notre cristallin et rétine. Par contre il n'est pas exclu d'observer directement un électron, puisque les électrons de notre rétine font partie de l'ensemble de particules étudié et sont influencés par cet ensemble.

Il est maintenant possible d'énoncer un deuxième postulat:

POSTULAT II: *Aucune expérience n'a été effectuée jusqu'à ce jour directement sur les photons, c'est-à-dire sur les champs électromagnétiques.*

Si le postulat II est vrai, aucune différence ne peut être trouvée (sous réserve de nos approximations) entre les faits déduits de la théorie de Maxwell et de celle d'Einstein.

Le comportement du champ électromagnétique comme un quadrivecteur n'est donc peut être, après tout, qu'une illusion.

Si II est ou s'avère faux, l'une des deux théories devra peut-être céder le pas à l'autre.

Il est indiqué maintenant de revenir sur les approximations faites: il est possible de se passer de l'absence des potentiels gravifiques et de la variation « lente » du champ. On arrive aux mêmes conclusions. On peut se passer aussi, semble-t-il, de l'approximation sur les petites vitesses des particules mais nous tenons à donner ce résultat sous toutes réserves, car alors il faut probablement faire encore une petite modification à la théorie et bien des possibilités s'offrent alors au chercheur.

La seule approximation qui semble devoir être maintenue est celle de la petitesse des masses et charges qui entraîne l'espace quasi galiléen. Cette approximation semble numériquement bien correcte dans l'électrotechnique courante.

Pour les champs puissants, toutefois, il y a peut-être des différences de trajectoires entre les deux mécaniques.

Ajoutons qu'il faudrait trouver dans ce cas la véritable dépendance des $g^{\mu\nu}$ en e/m qui n'est peut-être pas linéaire ainsi que les véritables conditions qui se réduisent approximativement à (20).

6. DIGRESSION SUR L'ÉLECTRON.

L'électron ne serait-il pas une « sphère magique » analogue à celle que l'on rencontre dans le ds^2 de Schwarzschild et au travers de la surface de laquelle ne saurait passer aucun phénomène mécanique ?

L'espace engendré par un électron unique et relatif à un point de masse m' et de charge $-e'$, toutes deux infiniment

petites par rapport à la masse et charge de l'électron jouit évidemment de la symétrie sphérique et annule, à l'extérieur de l'électron, le tenseur de Ricci.

La solution est donc celle du ds^2 de Schwarzschild et il est facile d'identifier la seule constante arbitraire. Voici cette solution :

$$ds^2 = - \frac{dr^2}{1 - \frac{2ee'}{m'c^2r}} - r^2(d\theta^2 + \cos^2\theta d\phi^2) + \left(c^2 - \frac{2ee'}{m'r}\right) dt^2 . \quad (24)$$

Nous aurons une idée très grossière du rayon de la « sphère magique » de l'espace d'un électron relatif à un autre électron (de signe contraire) en remplaçant dans (24) e'/m' par e/m (ce qui modifie l'espace) et en annulant le dénominateur du premier terme du second membre. Il vient alors :

$$r = \frac{2e^2}{mc^2} . \quad (25)$$

Il est étonnant de constater que la formule (25) donne numériquement un rayon de l'ordre de grandeur de 10^{-13} cm qui est bien l'ordre de grandeur adopté pour le rayon de l'électron.

Ainsi l'électron pourrait être une « sphère magique », un espace fermé sur lui-même !
