Les équations intégrales de Milne pour une atmosphère parfaitement diffusante

Autor(en): **Bouvier, Pierre B.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Archives des sciences [1948-1980]**

Band (Jahr): **6 (1953)**

Heft 5

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-740023

LES ÉQUATIONS INTÉGRALES DE MILNE POUR UNE ATMOSPHÈRE PARFAITEMENT DIFFUSANTE

PAR

Pierre B. BOUVIER

Etant donnée une atmosphère stellaire diffusante d'albedo unité (cas conservatif), le rayonnement diffusé en un point d'un angle Θ, le sera d'après une loi qui implique une fonction de phase p (cos Θ) dont nous examinons ici l'influence (surtout dans le cas $p = 1 + \cos^2 \Theta$) sur les équations intégrales de Milne.

Les équations intégrales de Milne s'écrivent, dans le cas gris, sous la forme

$$\mathrm{J}(\tau) = \Lambda_\tau \left\{\mathrm{J}(t)\right\} \tag{1}$$

$$\mathrm{F} = \Phi_\tau \left\{\mathrm{J}(t)\right\} \tag{2}$$

$$\mathrm{F} = 4 \frac{d\,\mathrm{K}}{d\,\tau} = \frac{d}{d\,\tau} \mathrm{X}_\tau \left\{\mathrm{J}(t)\right\} \tag{3}$$

où les grandeurs J, F et K sont définies par

$$\mathrm{J}(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \mathrm{I}(\tau, \mu)\, d\mu \tag{4}$$

$$\mathrm{F}(\tau) = 2 \int_{-1}^{+1} \mathrm{I}(\tau, \mu)\, \mu\, d\mu \tag{5}$$

$$\mathrm{K}(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \mathrm{I}(\tau, \mu)\, \mu^2\, d\mu \tag{6}$$

en fonction de l'intensité $I(\tau;\ \mu)$ à la profondeur optique τ et dans la direction $\theta = \cos^{-1}\mu$ avec la normale aux plans $\tau =$ const. Λ_τ, Φ_τ, X_τ sont les opérateurs suivants [1]:

$$\Lambda_\tau \left\{f(t)\right\} = \frac{1}{2}\int_0^\infty f(t)\ E_1\ (|t - \tau|)\ dt \tag{7}$$

$$\Phi_\tau \left\{f(t)\right\} = 2\int_\tau^\infty f(t)\ E_2\ (t - \tau)\ dt - 2\int_0^\tau f(t)\ E_2\ (\tau - t)\ dt \tag{8}$$

$$X_\tau \left\{f(t)\right\} = 2\int_0^\infty f(t)\ E_3\ (|t - \tau|)\ dt \tag{9}$$

définis à l'aide des intégroexponentielles $E_n(x) = \int_1^\infty e^{-xt}\, t^{-n}\, dt$

Ces équations de Milne traduisent, sous la forme (1), (2), (3) le transfert radiatif de flux net constant à travers une atmosphère grise, semi-infinie et stratifiée en couches planparallèles. Elles sont valables notamment pour une atmosphère parfaitement diffusante lorsque la diffusion du rayonnement est isotrope. De plus (1), équation de Fredholm homogène et de seconde espèce, se retrouve si l'on dérive (2) une fois ou (3) deux fois par rapport à τ. En introduisant la fonction $q(\tau)$ de Hopf définie par [2]

$$J(\tau) = \frac{3}{4}\, F\, .\, [\tau + q(\tau)] \tag{10}$$

nous déduisons de (1) une équation inhomogène pour q:

$$q(\tau) = \Lambda_\tau \left\{q(t)\right\} + \frac{1}{2}\, E_3\, (\tau) \tag{11}$$

dont la solution de Liouville-Neumann converge d'ailleurs trop lentement pour être utilisée pratiquement.

[1] V. Kourganoff, *Basic methods in transfer problems*, p. 40 (Oxford, 1952).

[2] S. Chandrasekhar, *Radiative transfer*, p. 75 (Oxford, 1950); *Ap. J.*, 100, 117, 1944.

Si la diffusion n'est plus isotrope, les équations du type (1), (2), (3) vont se compliquer en même temps que la fonction de phase p (cos ϑ), ϑ étant l'angle de diffusion dans un processus élémentaire. Si p se présente comme une série entière en cos ϑ, on remarquera qu'un terme $(\cos \vartheta)^{2n}$ de puissance paire fait intervenir les opérateurs analogues à (7) ou (9) ayant pour noyaux les integroexponentielles

$$E_{2n+1}\ ,\ E_{2n-1}\ \ldots\ldots\ldots,\ E_1$$

et opérant sur les grandeurs

$$J_0 = J\ ,\ J_2 = K\ ,\ \ldots\ldots,\ J_{2n} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} I\ \mu^{2n}\ d\mu$$

tandis qu'une puissance impaire seule $(\cos \vartheta)^{2n-1}$ met en jeu les opérateurs analogues à (8) ayant pour noyaux les fonctions

$$E_{2n},\ E_{2n-2},\ \ldots\ldots,\ E_2$$

et opérant sur les grandeurs

$$J_1 = \frac{1}{4} F\ ,\ J_3 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} I\ \mu^3\ d\mu\ ,\ \ldots\ldots,\ J_{2n-1} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} I\ \mu^{2n-1}\ d\mu$$

En particulier si $p = 1 + \alpha_1 \cos \vartheta + \alpha_2 \cos^2 \vartheta$, le terme en cos ϑ introduit dans l'équation de Milne pour J un terme $\alpha_1\, \Phi_\tau \{F\}$ se réduisant à $2\alpha_1\, E_3(\tau)$ puisque F est constant. D'autre part, quand $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 = 1$, nous avons affaire à la diffusion de Rayleigh-Thomson; la fonction source a l'expression connue

$$J(\tau\,;\,\mu) = \frac{3}{8}\left[(3 - \mu^2)\, J(\tau) + (3\mu^2 - 1)\, K(\tau)\right] \qquad (12)$$

et il en résulte le système d'équations intégrales suivant:

$$J(\tau) = \frac{3}{8}\Lambda_\tau\{3J - K\} + \frac{3}{32}X_\tau\{3K - J\} \tag{13}$$

$$F = \frac{3}{8}\Phi_\tau\{3J - K\} + \frac{3}{8}Y_\tau\{3K - J\} \tag{14}$$

$$K_\tau(\tau) = \frac{3}{32}X_\tau\{3J - K\} + \frac{3}{32}Z_\tau\{3K - J\} \tag{15}$$

où

$$Y_\tau\{f(t)\} = 2\int_\tau^\infty f(t)\,E_4(t-\tau)\,dt - 2\int_0^\tau f(t)\,E_4(\tau - t)\,dt \tag{16}$$

$$Z_\tau\{f(t)\} = 2\int_0^\infty f(t)\,E_5(|t-\tau|)\,dt \tag{17}$$

Comme on devait s'y attendre, on retombe sur (14) en dérivant (15) et sur (13) en dérivant (14) par rapport à τ; il suffit, pour le vérifier, d'invoquer les relations

$$\Phi'_\tau\{f\} = 4(\Lambda_\tau - 1)\{f\}, \qquad X'_\tau\{f\} = \Phi_\tau\{f\} \tag{18}$$

$$Y'_\tau\{f\} = \left(X_\tau - \frac{4}{3}\right)\{f\}, \qquad Z'_\tau\{f\} = Y_\tau\{f\} \tag{19}$$

qu'on établit sans peine à partir des définitions des opérateurs et de la propriété $E'_n = -E_{n-1}$ des intégroexponentielles.

En posant $K = \frac{1}{3}J$ comme première approximation correspondant à l'isotropie, nous observons que les équations, (12), (13), (14) dégénèrent en les formes ususlles de Milne (1) (2), (3).

Pour retrouver la forme de Hopf de ces équations, nous remplaçons J par (10) et K par l'intégrale première $K = \frac{1}{4}F.(\tau + Q)$ où Q est une constante. Après quelques transformations élémentaires où interviennent les valeurs particulières

$$\Lambda_\tau\left\{Q\right\} = Q\left[1 - \frac{1}{2} E_2(\tau)\right] \qquad Z_\tau\left\{Q\right\} = Q\left[\frac{4}{5} - 2 E_6(\tau)\right]$$

$$\Phi_\tau\left\{Q\right\} = 2\, Q\, E_3(\tau) \qquad \Lambda_\tau\left\{t\right\} = \tau + \frac{1}{2} E_3(\tau)$$

$$X_\tau\left\{Q\right\} = Q\left[\frac{4}{3} - 2 E_4(\tau)\right] \qquad X_\tau\left\{t\right\} = \frac{4}{3}\tau + 2 E_5(\tau)$$

$$Y_\tau\left\{Q\right\} = 2\, Q\, E_5(\tau)$$

nous obtenons les trois équations

$$36\,\Lambda\left\{q\right\} - 3\,X\left\{q\right\} - 32\,q + 2\,Q\,(E_2 - 3\,E_4) + 16\,E_3 = 0 \tag{20}$$

$$9\,\Phi\left\{q\right\} - 3\,Y\left\{q\right\} - \qquad - 2\,Q\,(E_3 - 3\,E_5) - 16\,E_4 = 0 \tag{21}$$

$$9\,X\left\{q\right\} - 3\,Z\left\{q\right\} \qquad + 2\,Q\,(E_4 - 3\,E_6) + 16\,E_5 = \frac{144}{5}\,Q \tag{22}$$

dont la première joue le rôle de (11); c'est encore une équation de Fredholm, inhomogène de seconde espèce. Les deux autres la redonnent par dérivation comme on le vérifie en s'appuyant toujours sur les relations (18) et (19). $q(\tau)$ présente encore une singularité logarithmique au point $\tau = 0$.

Si nous tenons compte de la polarisation du rayonnement, l'équation de transfert prendra la forme d'un système de deux équations [1]

$$\mu \frac{d\,I_n}{d\,\tau} = I_n - \sum_m J_{nm} \tag{23}$$

où l'indice n prendra les deux significations de l (longitudinal) et r (transversal) correspondant aux intensités I_l, I_r qui caractérisent entièrement le rayonnement dans le problème à flux constant. Les fonctions-source se calculent facilement dans un système d'axes cartésien orienté de telle sorte que la direction (θ, φ) de la radiation incidente ait un azimut nul $(\varphi = 0)$ avant

[1] S. CHANDRASEKHAR, *Radiative transfer*, p. 43.

d'être changée en $(\theta'; \varphi')$ par l'effet de la diffusion. Nous avons, dans ce référentiel,

$$\left(\vec{\pi}_l \cdot \vec{\pi}'_l\right) = \sin\theta \sin\theta' + \cos\theta\cos\theta'\cos\varphi'$$

$$\left(\vec{\pi}_l \cdot \vec{\pi}'_r\right) = \cos\theta \sin\varphi'$$

$$\left(\vec{\pi}_r \cdot \vec{\pi}'_l\right) = \cos\theta \sin\varphi'$$

$$\left(\vec{\pi}_r \cdot \vec{\pi}'_r\right) = \cos\varphi'$$

$\vec{\pi}$, $\vec{\pi}'$ étant les vecteurs de polarisation. Les fonctions-source

$$J_{nm} = 8\pi \int I_n (\vec{\pi}_m \cdot \vec{\pi}'_n)\, d\Omega \tag{24}$$

deviennent alors, après intégration sur φ' ($\mu = \cos\theta$):

$$J_{ll} = \frac{3}{4}\left[2 (J_l - K_l)\; 2\mu^2 J_l + 3\mu^2 K_l\right]$$

$$J_{rl} = \frac{3}{4}\mu^2 J_r$$

$$J_{lr} = \frac{3}{4} K_l$$

$$J_{rr} = \frac{3}{4} J_r$$

J_n et K_n sont les grandeurs définies par (4) et (6) où $I(\tau, \mu)$ est affecté de l'indice n. En substituant ces valeurs de (24) dans la solution formelle de (23) et en calculant ensuite les J_n, F_n, K_n nous obtenons, selon la méthode usuelle, des équations intégrales du type de Milne qui se présenteront ici en trois groupes de deux équations chacun dont il suffira d'écrire le premier:

$$J_l = \frac{3}{2}\Lambda\{J_l - K_l\} + \frac{3}{16} X\{3 K_l - 2 J_l + J_r\} \tag{25}$$

$$J_r = \frac{3}{4}\Lambda\{K_l + J_r\} \tag{26}$$

On remarquera qu'au cas où le rayonnement n'est pas polarisé, $J_l = J_r = \frac{J}{2}$, $K_l = K_r = \frac{K}{2}$, on retombe sur l'équation (13) par addition de (25) et (26). En outre, si

$$3\, K_l = 2\, J_l - J_r \tag{27}$$

on déduit de (25) et (26) que $J_l = J_r$ et, par voie de conséquence, (25) dégénère en l'équation de Milne (1). La condition (27), postulant l'absence de polarisation et l'isotropie, est à considérer comme l'approximation d'Eddington du problème envisagé ici en dernier lieu.

Les équations analogues à (25), (26) relatives à F_l, F_r et à K_l, K_r ne se déduiront pas, séparément pour chaque indice l ou r, par dérivation l'une de l'autre, mais on vérifie sans peine qu'il en résulte la condition de constance du flux net total $F_l + F_r$.

A partir de (27) envisagée comme première approximation, nous pouvons itérer les équations (25) et (26) pour trouver de nouveau $J_l = J_r$, $K_l = K_r$ en seconde approximation, mais le rapport J/K différera de 3, surtout près de la surface $\tau = 0$. Ce n'est qu'après une deuxième itération que l'effet de polarisation ($J_l \neq J_r$) se fera sentir.

Observatoire de Genève.