Zeitschrift: Archives des sciences [1948-1980]
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 7 (1954)
Heft: 3

Artikel: La courbure et ses conditions d'existence
Autor: Rossier, Paul
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-738927

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 17.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Paul Rossier. — *La courbure et ses conditions d'existence.*

1. — L'existence de la tangente en un point d'une courbe est solidaire de celle de la dérivée de la fonction représentant l'ordonnée à partir de l'abscisse. Les deux questions de la tangente et de la dérivée sont donc un seul et même problème.

Passons à la courbure; celle-ci suppose l'existence de la tangente, ce que nous ferons dans la suite. La théorie classique, considérée comme une application du calcul différentiel, consiste en la détermination d'un cercle ayant avec la courbe étudiée un contact d'ordre deux, c'est-à-dire que les deux équations de la courbe et du cercle ont, au point considéré, des dérivées d'ordre un et deux qui sont égales. Cette théorie n'a évidemment de sens que si la dérivée d'ordre deux existe.

2. — Plus géométriquement, on peut opérer comme suit. Au point considéré A de la courbe, menons le cercle tangent qui passe par un point M de celle-ci et cherchons la limite de ce cercle lorsque M tend vers A. Appelons x la longueur de la projection de l'arc AM sur la tangente en A et y la distance de M à cette tangente. Pour M quelconque, le rayon du cercle est

$$\frac{x^2}{2y} + \frac{y}{2}.$$

Le rayon du cercle limite est la limite de cette expression pour x nul:

$$R = \lim \frac{x^2}{2y}.$$

Il existe si cette limite existe. Cela est certainement le cas si la dérivée seconde de y existe, mais la condition d'existence de cette dérivée d'ordre deux est différente de celle de l'existence de la limite du quotient.

La dérivée seconde est la double limite suivante:

$$\lim \frac{\lim \frac{y}{x}}{x},$$

expression plus compliquée que $\lim \frac{y}{x^2}$.

Pour montrer que les deux hypothèses ne sont pas équivalentes, nous allons construire une fonction possédant une dérivée nulle pour $x = 0$, telle que la limite de son quotient par x^2 existe, mais qui ne possède pas de dérivée seconde. Posons en effet:

$$y = ax^2 + x^2 \int_0^x g(x)\,dx ,$$

où la fonction $g(x)$ n'est pas dérivable mais telle que $g(0)$ soit finie.

Le quotient $\frac{y}{x^2}$ a évidemment a pour limite lorsque x tend vers zéro.

La dérivée est

$$y' = 2ax + 2x \int_0^x g(x)\,dx + x^2\, g(x) .$$

Elle est nulle pour x nul.

Le calcul de la seconde dérivée fait apparaître un terme en $x^2\, g'(x)$ qui n'a pas de sens, puisque $g'(x)$ n'existe pas. Pour $x = 0$, la dérivée aurait cependant un sens si $x^2\, g'(x)$ était nul. Cela suppose que le quotient $\lim \frac{g(x)}{x}$ est borné pour x nul; cette condition est plus rigoureuse que celle posée plus haut.

La théorie géométrique de la courbure est donc plus générale que celle basée sur le contact des courbes.

3. — Indépendamment de la géométrie analytique, on peut établir une théorie de la courbure des courbes planes en opérant par exemple comme suit.

Excluons le cas où la tangente en un point A de la courbe traverse la courbe: au voisinage de A, de part et d'autre de lui, les points de la courbe sont donc d'un seul côté de la tangente; relativement à la tangente et à la courbe, les points du plan situés de ce côté déterminent la concavité de la courbe; l'autre côté est la convexité.

Par A, menons des cercles tangents à la courbe; ils peuvent être classés en trois groupes, pas nécessairement tous représentés:

cercles intérieurs, dont les points voisins de A sont dans la concavité,

cercles extérieurs, dont les points voisins de A sont dans la convexité,

cercles franchissants qui, au voisinage de A possèdent des points de la concavité et de la convexité.

Nous excluons le cas sans intérêt où la courbe donnée étant un cercle, il existe un cercle confondu avec la courbe, ainsi que celui de plusieurs branches par A.

Il peut arriver qu'il n'y ait qu'un seul cercle franchissant. Ce sera le cas dans l'exemple suivant que nous construirons au moyen de l'homologie, transformation dont la théorie est indépendante du calcul infinitésimal.

Transformons un cercle c' par l'homologie suivante (parfois appelée élation). Le centre d'homologie est un point A de c'; l'axe d'homologie passe par A et coupe c' en un autre point B. La transformation donne une conique c qui en A est tangente au cercle c' et qui le coupe en B. Ces deux courbes n'ont aucun autre point commun. En B, elles ont des tangentes distinctes, sinon celle-ci passerait par le centre A; en B, les deux courbes se coupent; elles se coupent donc aussi en A; le cercle c' est un cercle franchissant la conique en A.

On peut encore montrer cette propriété comme suit. Soient M et M′ deux points correspondants de la transformation. Joignons A à deux points K′ et L′ de c' voisins de A et situés de part et d'autre de lui. Pour construire le correspondant K de K′, traçons K′M′, déterminons son intersection P avec l'axe et joignons-la à M; le point K est l'intersection de AK′ avec MP. La construction de K et L revient à projeter à partir de M deux points de l'axe voisins de A et situés de part et d'autre de lui, donc placés l'un dans la concavité de c' et l'autre dans la convexité; il en sera de même pour les points K et L; le cercle et la conique se franchissent donc en A.

Le cercle franchissant est unique. Supposons qu'il en existe un second c''. Les deux cercles c' et c'' sont homothétiques de centre A. On passe de c'' à c par une homologie qui résulte de la composition de l'homothétie ci-dessus avec l'élation originale. Ces homologies sont homocentriques; leurs axes sont donc concourants; l'un est impropre et les deux autres sont parallèles; ces derniers passent par A et sont donc confondus. Les cercles c' et c'' passent par B et ont même tangente en A; ils sont identiques.

En appliquant la construction inverse de l'élation précédente, à partir d'un point quelconque de la conique, distinct d'un sommet, on peut déterminer le cercle franchissant en ce point. Les coniques sont donc des courbes qui, sauf en des points exceptionnels, possèdent un cercle franchissant unique.

En un sommet, l'axe d'élation est tangent au cercle; il n'existe aucun cercle franchissant mais seulement des cercles intérieurs et extérieurs.

4. — Dans le cas des coniques, la relation d'intériorité est transitive, c'est-à-dire que tout cercle intérieur au cercle franchissant est intérieur à la courbe; de même, tout cercle extérieur au cercle franchissant est extérieur à la courbe.

Soit c_1 un cercle intérieur au cercle franchissant: il n'est pas franchissant et possède entre A et B un point intérieur à la conique; on montre de même la transitivité des cercles extérieurs.

Les faits précédents peuvent être exprimés autrement. Les points d'une normale à la courbe, au point A peuvent être classés en deux catégories: centres de cercles extérieurs et centres de cercles intérieurs; relativement à un ordre choisi sur la normale, les centres de cercles intérieurs appartiennent à un segment dont A est une extrémité; les centres de cercles extérieurs occupent les deux demi-droites qui constituent le segment complémentaire du précédent.

5. — Nous appellerons ordinaires du point de vue de la courbure les points d'une courbe quelconque qui jouissent des propriétés précédentes et segment intérieur le segment occupé

par les centres des cercles intérieurs. L'exemple de la conique montre la compatibilité de ces relations.

L'extrémité distincte de A du segment intérieur est le centre de courbure; il n'appartient en général à aucun des deux segments. Si ce centre appartient à l'un des systèmes de cercles, le point considéré est un sommet de la courbe.

Le segment intérieur peut s'étendre à l'infini; le centre de courbure est alors impropre. Si A est une inflexion, la notion de concavité disparaît. Sinon A est un point méplat.

6. — Les relations précédentes peuvent être reliées à la notion de continuité.

Faisons les hypothèses suivantes: tout point de la normale en A (sauf peut-être un) distinct de A est centre d'un cercle qui est extérieur ou intérieur. Le point A, un centre de cercle intérieur et un centre de cercle extérieur déterminent un ordre invariable sur la normale. L'axiome de continuité conduit à la conclusion suivante: il existe un point C qui sépare les centres de cercles intérieurs des centres de cercles extérieurs.

Le point A est ordinaire si le cercle de centre C n'est ni extérieur ni intérieur; le cercle correspondant ne peut être que franchissant. Si ce cercle est extérieur ou intérieur, A est un sommet.

Ainsi l'existence de la courbure est ramenée à des conditions géométriques immédiatement reliées aux axiomes.

7. — L'avantage de l'analyse est de donner un moyen de démontrer dans des cas très fréquents la validité de la théorie géométrique de la courbure. Pour cela, elle substitue à la courbe une parabole osculatrice, ce qui n'est pas sans présenter passablement d'analogie avec les idées précédentes où les coniques ont joué un rôle important. La parabole osculatrice donnée par un développement en série de puissances possède d'ailleurs un élément étranger à la courbe: son point impropre appartient à l'axe des ordonnées. Géométriquement, il y a avantage à changer d'axes et à choisir la normale comme axe des ordonnées.

8. — L'extension aux surfaces est immédiate. Soit A un point tangentiellement régulier, donc où le plan tangent et la

normale existent et sont uniques. Un plan par la normale coupe la surface suivant une courbe variable; on en étudie la variation de la courbure avec l'azimut de la section. L'exemple suivant montre que l'hypothèse du paraboloïde osculateur, toujours faite dans la théorie eulérienne, est restrictive. Soit en effet l'équation en coordonnées cylindriques d'une surface

$$z = r^2 \left(a(\varphi) + \int_0^r g(r)\, dr \right),$$

où $g(r)$ est une fonction non dérivable finie pour $r = 0$ et $a(\varphi)$, périodique de période π, toujours finie. Le plan $z = 0$ est tangent à l'origine. Toutes les sections normales possèdent une courbure. Les dérivées partielles d'ordre deux de z par rapport à des coordonnées rectangulaires n'existent pas, à cause de la dérivée d'ordre un de $g(r)$.

9. — La courbure des surfaces peut encore être étudiée de façon intuitive. La distinction des points de convexité de ceux à courbure opposées est immédiate suivant que le plan tangent ne coupe pas ou coupe la surface au voisinage du point considéré.

Examinons le cas de la convexité; menons une sphère tangente. Au voisinage du point de contact, celle-ci peut être située entièrement dans la concavité, dans la convexité ou franchir la surface. Le cas ordinaire, réalisé sur les quadriques convexes est celui où les centres des sphères franchissantes occupent un segment de la normale. Dans le cas d'un ombilic, ce segment est réduit à un point.

Pour étudier le cas des courbures opposées, coupons la surface par un cylindre de révolution infiniment mince ayant pour axe la normale. La courbe d'intersection c est fermée et possède des arcs adjacents situés de part et d'autre du plan tangent. Supposons que l'on puisse trouver une section normale n dont les intersections avec la courbe c soient situées de part et d'autre du plan tangent; la courbe n possède une inflexion au point considéré; cela est exceptionnel. Ainsi, les

points opposés sur le cylindre de la courbe c sont situés du même côté du plan tangent.

Le cas le plus simple est celui de deux angles dièdres adjacents ayant la normale pour arête dont chacun contient les points de la courbe c situés d'un côté du plan tangent; cela est notamment le cas pour les quadriques réglées.

En application de l'axiome de la coupure, on pourrait encore montrer la division de la normale en deux segments complémentaires dont l'un contient les centres des sphères franchissantes. Si la surface est convexe, le lieu de ces centres ne contient pas le point impropre; il le contient dans le cas des courbures opposées; dans ce cas, le plan tangent peut être considéré comme une sphère franchissante. Dans le cas limite où le point impropre de la normale est une des extrémités du segment, le point est parabolique.

La méthode analytique indique des cas où les conditions analogues à celles des quadriques sont réalisées, par substitution à la surface d'un paraboloïde osculateur.

10. — L'extension aux espaces multidimensionnels exige de nouvelles généralisations dont nous allons donner une idée.

Dans un espace d'opération à n dimensions, soit un espace courbe M à m dimensions. Supposons l'existence d'un espace linéaire tangent en l'un de ses points A; il est aussi à m dimensions, sinon A serait singulier. Par A, il passe un espace linéaire à $n - m$ dimensions totalement perpendiculaire à l'espace tangent. Par cet espace perpendiculaire, menons un espace sécant S à $n - m + 1$ dimensions.

Dans l'espace courbe, S découpe une courbe et sa tangente au point considéré dans l'espace tangent. L'étude de la courbure revient à celle de ces diverses sections.

La variété des espaces sécants est à $m - 1$ dimensions. Ce fait explique le recours aux méthodes tensorielles, extension multidimensionnelle des procédés vectoriels utilisés dans le cas des surfaces de l'espace tridimensionnel.

La validité d'un développement taylorien apporte l'avantage d'une généralisation relativement facile dans un problème où l'intuition n'offre plus de secours. Nous savons par les cas

particuliers précédents que la développabilité est une condition suffisante d'existence de la courbure, mais qu'elle n'est pas nécessaire.

Paul Rossier. — *Involutions liées à des cubiques et quartiques gauches.*

Les cubiques, biquadratiques et monoquadratiques gauches sont des courbes qui possèdent respectivement une, deux ou trois bisécantes issues de tout point P. Choisissons celui-ci sur une droite d.

Dans le cas de la cubique, le plan de la bisécante et de d coupe la courbe en un troisième point qui, avec les deux intersections, détermine deux droites; celles-ci coupent d en deux points P′ et P″. La construction précédente est identique à son inverse; elle établit donc entre les points de d une relation involutive biquadratique. Celle-ci possède quatre points unis avec un de leurs correspondants: cela implique que le troisième point appartient à une tangente à la cubique. On démontre ainsi facilement la proposition connue suivante: une droite quelconque de l'espace est coupée par quatre tangentes à une cubique gauche ou la surface développable qui a une cubique gauche comme arête de rebroussement est d'ordre quatre.

Dans le cas des quartiques, le plan d'une bisécante et de d coupe la courbe en deux points hors de la bisécante; ces deux points déterminent une droite qui coupe d.

Les deux bisécantes d'une biquadratique issues de P déterminent ainsi deux points P′ et P″ de d. La relation est partiellement involutive en ce sens que des deux correspondants de P′, l'un est P. La relation est encore biquadratique; l'existence de quatre points unis à l'un des correspondants conduit à la proposition suivante: sur toute droite, il existe quatre points tels que les deux bisécantes à une biquadratique passant par l'un d'eux déterminent un plan qui contient la droite donnée.

Le cas de la monoquadratique exige un examen attentif: par un point quelconque, il passe trois bisécantes, mais sur toute droite, il existe deux points par où passe une trisécante.