**Zeitschrift:** Archives des sciences [1948-1980]

**Herausgeber:** Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève

**Band:** 7 (1954)

**Heft:** 4

**Artikel:** Calcul des fonctions-source en diffusion de Ryleigh-Thomson

**Autor:** Bouvier, Pierre

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-738930

# CALCUL DES FONCTIONS-SOURCE EN DIFFUSION DE RAYLEIGH-THOMSON

PAR

**Pierre BOUVIER**

---

Les fonctions-source qui mesurent le rapport du coefficient d'émission à celui d'absorption dans le transfert du rayonnement à travers une atmosphère stellaire, sont évaluées ici en suivant un procédé de M. V. Kourganoff, pour le cas où le transfert s'effectue suivant une diffusion régie par la loi de Rayleigh-Thomson.

## 1. Cas simplifié où l'on néglige la polarisation.

En considérant un rayonnement non polarisé, diffusé d'après la loi correspondant à la fonction de phase

$$p(\cos\Theta) = \frac{3}{4}(1 + \cos^2\Theta)$$

l'intensité émergeant à la surface $\tau = 0$ de l'atmosphère stratifiée en couches plan parallèles ($\tau$ étant la profondeur optique) et dans la direction $\theta = \cos^{-1}\mu$ a pour expression

$$I_n(0,\mu) = \frac{3}{4}F\left\{\sum_{\alpha=1}^{n-1}\frac{(3-\mu^2)\,x_\alpha L_\alpha}{x_\alpha + \mu} + \mu + Q\right\} \qquad (1.1)$$

dans l'approximation d'ordre $n$ de la méthode de Wick-Chandrasekhar [1]. F désigne le flux net (constant), $L_\alpha$ et Q sont $n$

[1] S. Chandrasekhar, *Ap. J.*, 100 (1944), 117.

constantes arbitraires à déterminer par la condition d'absence de rayonnement venant de l'extérieur et $x_\alpha$ sont les $n - 1$ racines positives de l'équation caractéristique

$$T_n(x^2) = 1 - \frac{3}{8} x^2 \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j (3 - \mu^2_j)}{x^2 - \mu^2_j} = 0$$

où les $\mu_j$ sont les $n$ racines positives du polynôme de Legendre de degré $2n$ et les $a_j$ les poids relatifs à la formule de quadrature de Gauss, basée sur la subdivision par les $\mu_j$ de l'intervalle (0, 1).

Introduisant la fonction $H_n(\mu)$ définie à l'aide des racines $\mu_j$ et $x_\alpha$ par

$$H_n(\mu) = \frac{1}{\sqrt{0,3}} \frac{\prod_{1}^{n} (\mu + \mu_i)}{\prod_{1}^{n-1} (\mu + x_\alpha)}$$

nous pouvons transformer l'expression (1) en

$$I_n(0, \mu) = \frac{3}{4} F \sqrt{0,3} \left(1 - \sum_{\alpha=1}^{n-1} x_\alpha L_\alpha\right) H_n(\mu) \tag{1.2}$$

$$= \frac{3}{4} F \left(3 \sum_{\alpha=1}^{n-1} L_\alpha + Q\right) H_n(\mu)$$

D'autre part, la fonction-source du problème a pour valeur, en $n$-ième approximation,

$$\mathcal{J}_n(\tau, \mu) = \frac{3}{4} F \left\{ (3 - \mu^2) \sum_{\alpha=1}^{n} L_\alpha e^{-\frac{\tau}{x_\alpha}} + \tau + Q \right\} \tag{1.3}$$

Reprenant ici l'élégante méthode appliquée par V. Kourganoff à la diffusion isotrope [1], nous remarquerons d'abord, en comparant les formules (1.1) et (1.2) que $(3 - x_\alpha^2)\, x_\alpha L_\alpha$ peut être regardé comme le résidu de la fonction (prolongée analytiquement dans le domaine complexe) $(3 \sum_{\alpha=1}^{n-1} L_\alpha + Q)\, H_n(\mu)$

[1] V. Kourganoff, *Basic methods in transfer problems* (Oxford, 1952), § 27.3.

au pôle $\mu = -x_\alpha$; en conséquence, $L_\alpha e^{-\frac{\tau}{x_\alpha}}$ qui apparaît dans (1.3), sera le résidu en $\mu = -x_\alpha$ de la fonction

$$\varphi_n(\mu) = \left(3\sum_{\alpha=1}^{n-1} L_\alpha + Q\right) \frac{H_n(\mu)\, e^{\frac{\tau}{\mu}}}{(-\mu)(3-\mu^2)}$$

En vertu du théorème des résidus de Cauchy, la somme $\sum_{\alpha=1}^{n-1} L_\alpha e^{-\frac{\tau}{x_\alpha}}$ pourra s'exprimer par une intégrale dans le plan complexe

$$\sum_{\alpha=1}^{n-1} L_\alpha e^{-\frac{\tau}{x_\alpha}} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \varphi_n(\mu)\, d\mu$$

pour toute valeur de $n$. Le contour C doit englober tous les pôles $-x_\alpha$, lesquels se trouvent dans l'intervalle $(0, -1)$ de l'axe réel, et exclure les singularités $\mu = 0$ et $\mu = -\sqrt{3}$ de $\varphi_n(\mu)$. Alors que l'exclusion du point $-\sqrt{3}$ est en quelque sorte automatique, il convient d'entourer l'origine par un petit cercle de rayon $\varepsilon$ inférieur au plus petit des modules $|x_\alpha|$.

Eliminant $H_n(\mu)$ à l'aide de l'identité de Chandrasekhar

$$H_n(\mu)\, H_n(-\mu) = \frac{1}{T_n(\mu^2)}$$

nous aurons

$$\varphi_n(\mu) = -\frac{3\sum_{1}^{n-1} L_\alpha + Q}{\mu(3-\mu^2)} \frac{e^{\frac{\tau}{\mu}}}{H_n(-\mu)\, T_n(\mu^2)}$$

et passerons ensuite à la limite $n \longrightarrow \infty$. Alors $\varepsilon \longrightarrow 0$, et $I_n(0, \mu)$ devient [1]

$$I(0, \mu) = \frac{F}{2\alpha_1} H(\mu)$$

[1] S. CHANDRASEKHAR, *Radiative transfer* (Oxford, 1950; abrégé *R.T.* par la suite), § 45.

où $\alpha_1$ est le premier moment de la fonction H ($\mu$), définie maintenant comme la solution (unique) de l'équation intégrale

$$H(\mu) = 1 + \mu H(\mu) \int_0^1 \frac{H(\mu') \psi(\mu')}{\mu + \mu'} d\mu' \qquad (1.4)$$

où $\psi(\mu) = \frac{3}{16}(3 - \mu^2)$.

En outre, la forme limite de $T_n(\mu^2)$ s'écrit:

$$T(\mu^2) = 1 + \frac{3}{8}\mu^2 \int_0^1 \frac{(3 - z^2)\,dz}{z^2 - \mu^2} \qquad (1.5)$$

Envisagée comme une fonction de la variable complexe $\mu$, la fonction (1.5) apparaît multiforme et il faut en choisir une détermination particulière afin d'écarter toute ambiguité dans le passage à la limite $n \longrightarrow \infty$. Il est naturel d'adopter, avec V. Kourganoff, la détermination de (1.5) pour laquelle cette fonction est réelle sur l'axe réel en dehors de l'intervalle (— 1, 1). Posant alors

$$\arg(1 + \mu) = \theta' \qquad\qquad \arg(1 - \mu) = \theta''$$

nous trouvons, après intégration,

$$T(\mu^2) = 1 - \frac{3}{8}\mu^2 + \frac{3}{16}\mu(3 - \mu^2)\left\{\log\left|\frac{1-\mu}{1+\mu}\right| + i(\theta'' - \theta' + \pi)\right\} \qquad (1.6)$$

et la forme limite de $\varphi_n(\mu)$ devient

$$\varphi(\mu) = -\frac{2}{3\alpha_1} \frac{e^{\frac{\tau}{\mu}}}{\mu(3 - \mu^2) H(-\mu) T(\mu^2)}$$

où $T(\mu^2)$ est la détermination (1.6).

Intégrons donc $\varphi(\mu)$ le long d'un contour allant de $-\varepsilon$ à $-1$ par le bord supérieur de la coupure $(0, -1)$, contournant le point $-1$ dans le sens positif et revenant à $-\varepsilon$ par le bord inférieur de la même coupure. Nous obtenons, en écrivant $\mu = -u$, une expression de la forme:

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} L_\alpha e^{-\frac{\tau}{x_\alpha}} = -\frac{1}{3\,\alpha_1} \int_0^1 \frac{e^{-\frac{\tau}{u}}\, du}{H(u)\, Z(u)} \tag{1.7}$$

où

$$Z(u) = \left[1 - \frac{3}{8} u^2 + \frac{3}{16} u\,(3 - u^2) \log \frac{1+u}{1-u}\right]^2 + \left(\frac{3\pi}{16}\right)^2 u^2\,(3 - u^2)^2$$

et nous parviendrons finalement à la valeur exacte de la fonction-source en substituant (1.7) dans (1.3) où la constante Q aura été remplacée par le rapport $\alpha_2/\alpha_1$ des moments d'ordre 2 et 1 de la fonction H ($\mu$).

## 2. Remarques sur la diffusion isotrope avec absorption pure.

Nous savons que l'équation caractéristique de ce problème, où l'albedo $\omega$ est inférieur à l'unité, a pour expression [1]

$$T_n(x^2) = 1 - \omega x^2 \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{x^2 - \mu_j^2} = O \tag{2.1}$$

et qu'elle possède $n$ racines positives distinctes. Chassant les dénominateurs de (2.1), nous avons un polynôme de degré $n$ en $x^2 = X$

$$R(X) - \omega X \sum_j a_j R_j(X) = O$$

où

$$R(X) = \prod_1^n (X - M_j), \qquad R_j(X) = \prod_{k \neq j} (X - M_k), \qquad M_j = \mu_j^2$$

Ecrivant explicitement le premier et le dernier terme de ce polynôme ordonné suivant les puissances de X,

$$(1 - \omega)\, X^n + \cdots + (-1)^n M_1 M_2 \ldots M_n = O$$

[1] *R.T.*, § 26.4.

nous tirons de là une relation entre les racines $X_\alpha$ de (2.1) et les racines $\mu_j$ à savoir

$$\frac{M_1 M_2 \dots M_n}{X_1 X_2 \dots X_n} = 1 - \omega \tag{2.2}$$

Le problème d'intérêt physique majeur, lorsque $\omega < 1$, est le plus souvent celui de la réflexion diffuse; l'intensité diffusée par réflexion à la surface $\tau = 0$ de l'atmosphère vaut:

$$\begin{aligned} I_n^{\text{refl.}}(0, \mu) &= \frac{\omega}{4} F \left\{ \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{x_\alpha L_\alpha}{\mu + x_\alpha} + \frac{\gamma \mu_0}{\mu + \mu_0} \right\} \\ &= \frac{\omega}{4} F \frac{\mu_0}{\mu + \mu_0} H_n(\mu_0) H_n(\mu) \end{aligned}$$

si l'intensité incidente forme avec la normale aux plans de stratification l'angle $\cos^{-1} \mu_0$.

La fonction-source s'écrit ici:

$$\mathcal{J}_n(\tau) = \frac{\omega}{4} F \left\{ \sum_{\alpha=1}^{n} L_\alpha e^{-\frac{\tau}{x_\alpha}} + \gamma e^{-\frac{\tau}{\mu_0}} \right\} \tag{2.3}$$

Son rôle physique est moins important qu'il n'était dans le problème à flux net constant, mais ceci ne nous empêche pas de rechercher la forme exacte de (2.3) quand $n \longrightarrow \infty$, par la même méthode qu'au § 1.

En particulier, la constante $\gamma$ s'obtient immédiatement en écrivant

$$\gamma \mu_0 = \text{résidu en } \mu = -\mu_0 \text{ de la fonction } \frac{\mu_0}{\mu + \mu_0} H(\mu_0) H(\mu).$$

$$= \mu_0 H(\mu_0) H(-\mu_0) = \frac{\mu_0}{T(\mu_0^2)}$$

Parmi les $n$ racines positives de (2.1), l'une d'entre elles, soit $x_n$, peut devenir, contrairement aux autres, supérieure à l'unité. En exprimant alors la somme $\sum_1^n L_\alpha e^{-\frac{\tau}{x_\alpha}}$ comme une intégrale complexe, nous devrons ajouter à une intégrale prise sur le contour entourant les points $-x_1, \dots, -x_{n-1}$ et excluant l'origine, le résidu relatif au pôle isolé $\mu = - x_n$. Nous n'allons pas reproduire ce calcul ici, car il se révèle identique à celui qu'avait effectué V. Kourganoff pour le problème, mathématiquement équivalent, de la formation des raies d'absorption [1] selon Eddington et Milne; nous nous bornerons à quelques remarques.

Démontrons que $(1 - \omega)^{-1}$ est une limite supérieure des racines de (2.1). En effet, les $a_j$ étant tous $\geqslant 0$ et tels que $\sum_1^n a_j = 1$, les $\mu_j^2$ étant d'autre part tous $< 1$, nous pouvons écrire l'inégalité

$$1 - \omega \sum_1^n \frac{a_j}{1 - \frac{\mu_j^2}{x^2}} > 1 - \omega \sum_1^n \frac{a_j}{1 - \frac{1}{x^2}} = 1 - \frac{\omega}{1 - \frac{1}{x^2}}$$

Or la valeur $\xi^2 = (1 - \omega)^{-1}$ annule le second membre de cette inégalité, de sorte qu'elle en rend positif le premier membre $T_n(\xi^2)$. Cependant, la fonction (2.1) est monotone croissante au-delà du dernier de ses pôles (soit $\mu_n$) et jusqu'à l'infini; elle passe, dans cet intervalle $(\mu_n, \infty)$ de la valeur $- \infty$ à la valeur positive $1 - \omega$, de sorte qu'elle ne s'annulera plus, avant même que $x^2$ n'atteigne la valeur $\xi^2$.

Il résulte de là et de la relation (2.2), que nous aurons

$$\frac{M_1 M_2 \dots M_n}{X_1 X_2 \dots X_{n-1}} < 1$$

inégalité qui est à rapprocher du cas où le premier membre vaut 1/3, lorsque $\omega = 1$.

## 3. Cas général de la diffusion Rayleigh-Thomson avec flux net constant.

Ce problème, qui a été résolu complètement par S. Chandrasekhar en ce qui concerne les lois d'assombrissement [2], nous

[1] V. Kourganoff, *Ap. J.*, 113 (1951), 419.
[2] *R.T.*, § 68.

met en présence de deux intensités, $I_l(\tau, \mu)$ et $I_r(\tau, \mu)$ relatives aux radiations polarisées dans des directions respectivement parallèle et perpendiculaire au plan méridien contenant la direction d'émission. A la surface de l'atmosphère, nous avons en $n$-ième approximation les valeurs

$$I_l(0,\mu) = \frac{3}{8}F\left\{\mu + Q + (1-\mu^2)\sum_{\beta=1}^{n-1}\frac{\xi_\beta L_\beta}{\mu+\xi_\beta} + \sum_{\alpha=1}^{n}\frac{M_\alpha}{x_\alpha}(x_\alpha - \mu)\right\} \tag{3.1}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{3}{8}F\frac{q}{\sqrt{2}}H_l(\mu)$$

$$I_r(0,\mu) = \frac{3}{8}F\left\{\mu + Q - \sum_{\alpha=1}^{n}\frac{M_\alpha}{x_\alpha}\frac{1-x_\alpha^2}{\mu+x_\alpha}\right\} \tag{3.2}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{3}{8}F\frac{\mu+c}{\sqrt{2}}H_r(\mu)$$

où $q$, $c$, Q sont des constantes à exprimer finalement en termes des moments des fonctions $H_l(\mu)$, $H_r(\mu)$, lesquelles seront solutions d'équations intégrales du type (1.4) d'Ambarzumian-Chandrasekhar avec

$$\psi_l(\mu) = \frac{3}{4}(1-\mu^2), \text{ respectivement } \psi_r(\mu) = \frac{3}{8}(1-\mu^2).$$

Dans les formules (3.1) et (3.2), les $L_\beta$ et $M_\alpha$ sont des constantes arbitraires, les $\xi_\beta$ sont les $n-1$ racines positives de l'équation

$$T_l(\mu^2) = 1 - \frac{3}{2}\mu^2\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j(1-\mu_j^2)}{\mu^2-\mu_j^2} = 0 \tag{3.3}$$

ces racines, séparées par les pôles $\mu_j$, sont toutes $< 1$ ($a_j \geqslant 0$). Quant aux $x_\alpha$, qui sont les racines positives de

$$T_r(\mu^2) = 1 - \frac{3}{4}\mu^2\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j(1-\mu_j^2)}{\mu^2-\mu_j^2} = 0 \tag{3.4}$$

les $n-1$ plus petites d'entre elles sont, pour la même raison que tout à l'heure, inférieures à 1 et il en va de même pour la dernière, soit $x_n$, contrairement au cas de la fonction (2.1), puisqu'ici $T_r(\mu^2)$ est croissante monotone de $T_r(1) = \frac{1}{4}$ à $T_r(\infty) = \frac{1}{2}$.

Les fonctions-source ont pour expression

$$\mathcal{J}_j(\tau, \mu) = \frac{3}{8} F \left\{ \tau + Q + (1 - \mu^2) \sum_{\beta=1}^{n-1} L_\beta e^{-\frac{\tau}{\xi_\beta}} + \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{M_\alpha}{x_\alpha^2} (x_\alpha^2 - \mu^2) e^{-\frac{\tau}{x_\alpha}} \right\}$$

$$\mathcal{J}_r(\tau, \mu) = \frac{3}{8} F \left\{ \tau + Q - \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{M_\alpha}{x_\alpha^2} (1 - x_\alpha^2) e^{-\frac{\tau}{x_\alpha}} \right\}$$

Procédant comme § 1, nous mettrons leurs valeurs exactes sous la forme

$$\mathcal{J}_l(\tau, \mu) = \frac{3}{8} F \left\{ \tau + Q + \frac{1 - \mu^2}{2\pi i} \int_{c_1} \varphi_{ll}(z)\, dz + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi i} \int_{c_2} \varphi'_{lr}(z)\, dz + \frac{\mu^2}{2\pi i} \int_{c_2} \varphi''_{lr}(z)\, dz \right\}$$

$$\mathcal{J}_r(\tau, \mu) = \frac{3}{8} F \left\{ \tau + Q + \frac{1}{2\pi i} \int_{c_2} \varphi_{rr}(z)\, dz \right\}$$

où

$$\varphi_{ll}(\mu) = -\frac{q}{\sqrt{2}} \frac{e^{\frac{\tau}{\mu}}}{\mu(1 - \mu^2)} H_l(\mu)$$

$$\varphi'_{lr}(\mu) = \frac{\mu + c}{\sqrt{2}} \frac{\mu e^{\frac{\tau}{\mu}}}{1 - \mu^2} H_r(\mu)$$

$$\varphi''_{lr}(\mu) = -\frac{\mu + c}{\sqrt{2}} \frac{e^{\frac{\tau}{\mu}}}{\mu(1 - \mu^2)} H_r(\mu)$$

$$\varphi_{rr}(\mu) = -\frac{\mu + c}{\sqrt{2}} \frac{e^{\frac{\tau}{\mu}}}{\mu} H_r(\mu)$$

Le contour $C_1$ englobera tous les pôles $-\xi_\beta$ de $I_l(0, \mu)$ et le contour $C_2$ tous les pôles $-x_\alpha$ de $I_r(0, \mu)$; tous deux doivent exclure les points 0 et — 1. Comme précédemment, nous éliminons $H_l(\mu)$ et $H_r(\mu)$ non définies en (0, — 1) à l'aide des identités

$$H_l(\mu)\, H_l(-\mu) = \frac{1}{T_l(\mu^2)}, \quad H_r(\mu)\, H_r(-\mu) = \frac{1}{T_r(\mu^2)}$$

où les fonctions T désignent maintenant les déterminations particulières uniformes

$$(0 < \theta' < 2\pi, \qquad 0 < -\theta'' < 2\pi)$$

$$T_l(\mu^2) = 1 - \frac{3}{2}\mu^2 + \frac{3}{4}\mu(1-\mu^2)\left\{\log\left|\frac{1-\mu}{1+\mu}\right| + i(\theta'' - \theta' + \pi)\right\}$$

$$T_r(\mu^2) = 1 - \frac{3}{4}\mu^2 + \frac{3}{8}\mu(1-\mu^2)\left\{\log\left|\frac{1-\mu}{1+\mu}\right| + i(\theta'' - \theta' + \pi)\right\}$$

qui sont réelles sur l'axe réel en dehors de l'intervalle (— 1, + 1).

Isolant les singularités 0 et — 1 dans des cercles de rayons $\varepsilon$, respectivement $\eta$ suffisamment petits, nous adoptons pour $C_1$ et $C_2$ un contour longeant le bord supérieur de la coupure (0, — 1) de $-\varepsilon$ à $-1+\eta$, traversant cette coupure (l'argument de $\log(1+\mu)$ passe alors de façon discontinue de 0 à $2\pi$, tandis que celui de $\log(1-\mu)$ reste nul) et revenant à $-\varepsilon$ par le bord inférieur.

On trouve un résultat de la forme

$$\mathcal{J}_l(\tau,\mu) = \frac{3}{8}F\left\{\tau + Q - \frac{3q}{4\sqrt{2}}(1-\mu^2)\int_0^1 \frac{e^{-\frac{\tau}{u}}\,du}{H_l(u)\,Z_l(u)} + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{8\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{e^{-\frac{\tau}{u}}(c-u)(u^2-\mu^2)}{H_r(u)\,Z_r(u)}\,du\right\}$$

$$\mathcal{J}_r(\tau,\mu) = \frac{3}{8}F\left\{\tau + Q - \frac{3}{8\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{e^{-\frac{\tau}{u}}(c-u)(1-u^2)}{H_r(u)\,Z_r(u)}\,du\right\}$$

où

$$Z_l(u) = \left[1 - \frac{3}{2}u^2 + \frac{3}{4}u(1-u^2)\log\frac{1-u}{1+u}\right]^2 + \left(\frac{3\pi}{4}\right)^2 u^2(1-u^2)^2$$

$$Z_r(u) = \left[1 - \frac{3}{4}u^2 + \frac{3}{8}u(1-u^2)\log\frac{1-u}{1+u}\right]^2 + \left(\frac{3\pi}{8}\right)^2 u^2(1-u^2)^2$$

Les constantes $q$ et $c$, qui apparaissent dans les lois d'assombrissement, ont d'après Chandrasekhar les valeurs [1]

$$q = 2\frac{4(A_1 + 2\alpha_1) - 3A_0\alpha_1 + A_1\alpha_0)}{3(A_1^2 + 2\alpha_1^2)}$$

$$c = \frac{8(A_1 - \alpha_1) + 3(2\alpha_0\alpha_1 - A_0 A_1)}{3(A_1^2 + 2\alpha_1^2)}$$

en fonction des moments d'ordre 1 et 2, $\alpha_1$ et $\alpha_2$ de $H_l(\mu)$, $A_1$ et $A_2$ de $H_r(\mu)$.

Pour obtenir la valeur exacte de la constante Q, nous multiplions les deux membres de (3.2) où $\mu = \mu_i$ par $a_i(1-\mu_i^2)$ et sommons sur $i$ de $-n$ à $+n$. Tenant compte de l'équation (3.4) et de ce que

$$I_r(0, \mu_i < 0) \equiv 0, \qquad \sum_{i=-n}^{+n} a_i(1-\mu_i^2) = \frac{4}{3}$$

nous trouvons sans peine

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(1-\mu_j^2)\, I_r(0,\mu_j) = F\left\{\frac{1}{2}Q - \sum_{\alpha=1}^{n} M_\alpha \frac{1-x_\alpha^2}{x_\alpha^2}\right\}$$

et, passant finalement à la limite $n \longrightarrow \infty$, après quelques réductions,

$$Q = \frac{3}{4\sqrt{2}}(A_3 + cA_2 - A_1 - cA_0) + c\sqrt{2}$$

ce qui achève de résoudre le problème.

[1] *R.T.*, éq. (99), ch. X.