

Zeitschrift: Archives des sciences [1948-1980]
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 8 (1955)
Heft: 4

Artikel: Les axiomes de la géométrie multidimensionnelle
Autor: Rossier, Paul
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-739865>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 28.06.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

2. EXER, B., Communication personnelle.
- e. FOLLIS, R. H. JR., M. BERTHRONG, « Histochemical studies on cartilage and bone. I. The normal pattern ». *Bull. John Hopk. Hosp.*, 85, 281, 1949.
4. GARDNER, W. U., C. A. PFEIFFER, « Influence of estrogens and androgens on the skeletal system ». *Physiol. Rev.*, 23, 139, 1943.
5. GODART, H., « Les mucopolysaccharides de l'os folliculinique ». *Bull. Assoc. Anat.*, janvier 1953.
6. LISON, L., *Histochimie et Cytochimie animales*. Gauthier-Villars, éd. 1953.
7. MARTIN, E., C. PFISTER, G. RIOTTON, « Oestrogènes et os ». *Bull. Acad. suisse Sciences méd.*, 5, 233, 1949.
8. MEYER, Karl, « The chemistry and biology of mucopolysaccharides and glycoproteins ». *Cold Springs Harbor Symposia on Quantitative Biology*, 6, 91, 1938.
9. THIERY, G., « Le myxome de Sanarelli. Maladie infectieuse du collagène. Etude histochimique ». *Revue de Pathologie comparée*, 53, 537, 1953.
10. URIST, M. R., A. M. BUDY, F. C. McLEAN, « Endosteal Bone formation in estrogen treated mice ». *J. Bone Joint Surg.*, 32-A, 143, 1950.

Séance du 1^{er} décembre 1955

573.011.

Paul Rossier. — *Les axiomes de la géométrie multidimensionnelle.*

Dans ses *Grundlagen der Geometrie*, Hilbert classe les axiomes de la géométrie élémentaire en cinq groupes:

I: Appartenance, II: Ordre, III: Congruence, IV: Parallélisme et V: Continuité et intégrité.

Cet ensemble d'axiomes est précédé d'une brève introduction destinée à préciser l'objet de la géométrie: l'étude des propriétés de trois catégories d'objets nommés points, droites et plans; ces termes n'acquièrent un sens que par l'énoncé des axiomes.

La limitation à trois du nombre des objets fondamentaux considérés et le choix des axiomes donne à cette géométrie le caractère tridimensionnel: trois conditions, convenablement choisies, déterminent un point ou un plan.

Proposons-nous d'examiner comment doit être modifié le système hilbertien pour constituer la base d'une géométrie

multidimensionnelle, à n dimensions; n est un entier positif fini, mais non borné, pratiquement supérieur à trois.

Dans son analyse, Hilbert distingue dans chaque groupe trois types d'axiomes que nous qualifierons de linéaires, plans et spatiaux. Les premiers concernent les relations entre les points et les droites, les deuxièmes sont relatifs aux points, droites et plans; les derniers font en outre intervenir l'espace. Par exemple, le premier axiome d'appartenance: « deux points distincts déterminent une droite » est linéaire; l'axiome d'ordre dit de Pasch est plan: « dans un plan, si une droite coupe un côté d'un triangle hors d'un sommet, elle coupe un second côté ou passe par le sommet opposé »; l'axiome affirmant que « deux plans ayant un point commun en ont au moins deux » est spatial.

Nous appellerons axiomes de tridimensionnalité ou axiomes dimensionnels ceux qui fixent à trois le nombre des dimensions, soit des paramètres qui déterminent un point. Aucun axiome linéaire ou plan n'est dimensionnel puisque ces axiomes sont valables tant pour la géométrie plane que pour celle de l'espace.

Un premier axiome de tridimensionnalité saute aux yeux; c'est l'axiome d'intégrité: « au système des points, droites et plans, il est impossible d'adjoindre d'autres notions, de telle sorte que dans la géométrie ainsi constituée tous les axiomes précédents soient vérifiés ». La géométrie quadridimensionnelle, par exemple, possède une quatrième notion fondamentale, l'hyperplan, lieu tridimensionnel de points tel que le plan déterminé par deux quelconques d'entre eux appartienne au lieu. Cette notion est exclue par l'axiome d'intégrité. Au fond, cet axiome ne fait qu'explicitier et préciser l'introduction.

Les axiomes d'ordre sont tous linéaires, sauf l'axiome de Pasch, qui est plan. De même les axiomes de congruence sont linéaires ou plans. L'axiome des parallèles est plan; l'axiome de continuité distinct de l'axiome d'intégrité, c'est-à-dire l'axiome d'Archimède affirmant que « tout segment est inférieur à un segment multiple entier mais non borné d'un segment quelconque donné » est linéaire.

L'effort de généralisation, pour passer de la géométrie ordinaire à la géométrie multidimensionnelle doit donc porter

sur l'introduction, l'axiome d'intégrité et les axiomes d'appartenance.

En géométrie multidimensionnelle à n dimensions, l'introduction pourrait avoir la teneur suivante: Concevons n sortes d'êtres que nous appellerons espaces linéaires à 0, 1, 2, ... $n - 1$ dimensions. Le sens précis à donner à ces termes résultera des axiomes. Souvent, pour abrégé, on omet l'adjectif linéaire et on appelle points, droites, plans et hyperplans les espaces à 0, 1, 2 et $n - 1$ dimensions. Entre ces espaces, il existe des relations exprimées par les termes synonymes « être sur », « passer par », « appartenir », « couper »... Dans la suite, k est un entier positif, inférieur ou égal à n .

Les espaces linéaires ci-dessus sont les éléments de l'hyper-espace.

Les axiomes d'appartenance se réduisent alors aux suivants.

A. *Dans tout espace à k dimensions, il existe au moins $k + 1$ points n'appartenant pas tous à un espace à $k - 1$ dimensions.*

Un tel système de points est appelé un *simplexe* de $k + 1$ points.

B. *Un simplexe de $k + 1$ points détermine un espace à k dimensions.*

C. *Tout simplexe de $k + 1$ points appartenant à un espace à k dimensions détermine cet espace.*

D. *Si un espace $\mathcal{A}$ à k dimensions possède un simplexe de $k + 1$ points appartenant à un espace $\mathcal{B}$ à plus de k dimensions, tout point de $\mathcal{A}$ appartient à $\mathcal{B}$.*

On dit alors que l'espace $\mathcal{A}$ appartient à $\mathcal{B}$.

E. *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ deux espaces à k et k' dimensions; si $k + k'$ est égal ou supérieur à n , il existe un espace à au moins $k + k' - n$ dimensions qui appartient à $\mathcal{A}$ et à $\mathcal{A}'$.*

Cet espace est appelé l'*intersection* de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$.

Avec l'axiome d'intégrité, cet axiome E est le seul où apparaisse le nombre n . Il constitue l'axiome de dimensionnalité.

Les axiomes précédents contiennent comme cas particuliers les axiomes d'appartenance de Hilbert, à une exception près. Pour le voir, faisons $n = 3$ et citons les axiomes d'appartenance en indiquant sommairement leurs relations avec les axiomes A, B, C, D et E.

- I₁. Deux points déterminent une droite (B, $k = 1$).
- I₂. Deux points distincts d'une droite déterminent cette droite (C, $k = 1$).
- I₃. Sur une droite, il y a au moins deux points et sur un plan, il y a au moins trois points non alignés (A, $k = 1$ et $k = 2$).
- I₄. Trois points non alignés déterminent un plan (B, $k = 2$).
- I₅. Trois points non alignés d'un plan déterminent ce plan (C, $k = 2$).
- I₆. Si deux points d'une droite appartiennent à un plan, tous les points de cette droite appartiennent à ce plan (D, $k = 1$).
- I₈. Dans l'espace, il y a au moins quatre points non coplanaires (A, $k = 3$).

L'axiome de dimensionnalité I₇ exige un examen plus approfondi. Voici son énoncé: Si deux plans ont un point commun, ils en ont au moins deux. En vertu de I₆, on en conclut immédiatement que deux plans ayant un point commun ont une droite commune. Mais deux plans parallèles n'ont aucun point commun. L'application de l'axiome de dimensionnalité E conduit à l'énoncé suivant: deux plans de l'espace tridimensionnel ont toujours une droite commune. Le cas du parallélisme semble exclu.

La contradiction disparaît si au lieu de définir négativement le parallélisme comme la relation de deux droites coplanaires ne possédant pas d'intersection, on a recours à une proposition affirmative en introduisant avec Desargues un hyperplan privilégié, l'hyperplan impropre. L'hyperespace est alors dit *arguésien*. Sont parallèles deux droites qui possèdent une intersection contenue dans l'hyperplan impropre. La forme de la théorie du parallélisme est quelque peu modifiée, mais le fond en reste le même que dans la géométrie élémentaire classique.

La généralisation à l'espace multidimensionnel de la théorie du parallélisme est immédiate, tant que l'on n'envisage que les relations d'une droite avec un espace quelconque. L'étude du parallélisme de deux espaces est moins simple. Prenons l'exemple de deux plans. Deux plans sécants de l'espace tridimensionnel possèdent deux faisceaux de droites parallèles à leur intersection; du point de vue de la géométrie multidimen-

sionnelle, ils possèdent un parallélisme partiel. Dans l'espace quadridimensionnel, deux plans ont comme intersection un point: si celui-ci est impropre, il y a de nouveau parallélisme partiel et les deux plans possèdent encore deux faisceaux parallèles de droites parallèles; ces deux plans ne possèdent pas d'intersection propre.

En élaborant la théorie du parallélisme de l'espace arguésien tri ou multidimensionnel, on constate une simplicité de l'exposé plus grande que dans la théorie classique.

Pour compléter l'ensemble des axiomes de la géométrie multidimensionnelle, il suffit d'étendre l'axiome d'intégrité:

F. *Il est impossible d'adjoindre une notion nouvelle au système des espaces linéaires à moins de n dimensions de telle sorte que les axiomes des cinq groupes soient tous vérifiés.*

Pour être complète, l'étude d'un système d'axiomes exige que l'on en montre l'indépendance et la compatibilité. L'étude de l'indépendance exige une analyse poussée car, suivant que l'on admet en bloc tous les axiomes d'un système ou qu'on les admet successivement, le système global peut être surabondant tandis que les systèmes obtenus par adjonction successive des divers axiomes ou des divers groupes d'axiomes ne le sont pas. La chose, reconnue par Hilbert et ses collaborateurs pour la géométrie tridimensionnelle, doit être étendue au cas multidimensionnel.

Par exemple, en géométrie tridimensionnelle, si l'on admet les axiomes spatiaux d'appartenance, il suffit de postuler l'existence d'au moins un point dans un plan. En géométrie plane, les axiomes d'ordre permettent de limiter à un point l'existence prévue par l'axiome I_3 sur une droite. Ces propriétés tiennent-elles au fait que la droite est l'hyperplan de la géométrie plane et le plan celui de la géométrie de l'espace? La bidimensionnalité présente-t-elle des caractères spécifiques comme le font pressentir diverses recherches? Ce sont là des questions délicates non résolues à notre connaissance.

D'ailleurs, il ne sied pas d'attribuer à l'indépendance d'un système d'axiomes une importance exagérée. La découverte d'une relation nouvelle permettant de réduire la base axiomatique d'une science ne modifie en rien l'édifice logique déjà

établi en ce qui concerne l'énoncé des théorèmes; seuls quelques procédés de démonstration peuvent être allégés ou alourdis.

Reste le problème essentiel de la compatibilité des axiomes de dimensionnalité avec l'ensemble des autres axiomes. On sait que le problème est insoluble de justifier la cohérence logique d'une science déductive; par contre, par la méthode de l'isomorphisme, on peut montrer la solidarité logique de deux sciences: l'existence d'une contradiction dans l'une implique une existence pareille dans l'autre. Si cette seconde science est bien connue, on a de bonnes raisons de croire à la compatibilité de la première, sans que cette conviction soit à l'abri de toute critique.

Dans le cas de la géométrie multidimensionnelle, l'application de cette méthode est facile. Une géométrie métrique élémentaire telle que celle dont nous avons esquissé la base permet l'élaboration d'une géométrie analytique et l'analyse peut alors être considérée comme garantissant la compatibilité de la géométrie. On peut encore lier la géométrie multidimensionnelle à la géométrie classique et cela de plusieurs façons.

Pour fixer les idées, examinons le cas de la quadridimensionnalité. Dans l'espace correspondant, un point est déterminé par quatre coordonnées cartésiennes, rectangulaires ou pas. Aux hyperplans, plans et droites correspondent des systèmes de une, deux ou trois équations linéaires liant ces coordonnées. Introduisons des coordonnées homogènes. Un point de l'espace arguésien est déterminé par quatre rapports de cinq nombres, pas tous nuls.

Dans l'espace ordinaire, considérons cinq sphères indépendantes d'équations

$$S_i \equiv a_i (x^2 + y^2 + z^2) + b_i x + c_i y + d_i z + e_i = 0 .$$

Algébriquement, l'indépendance des sphères est exprimée par la non nullité du déterminant des coefficients.

L'équation d'une sphère quelconque $S = 0$ peut être mise sous la forme

$$S \equiv \sum p_j S_j = 0 .$$

Les cinq p_j sont les solutions d'un système d'équations linéaires obtenu par identification des coefficients des deux membres de l'identité ci-dessus. Considérons ces cinq nombres comme coordonnées homogènes d'un point de l'espace quadridimensionnel. Il y a correspondance biunivoque sans exception entre les points de cet espace arguésien et les sphères de l'espace tridimensionnel. A une droite, un plan ou un hyperplan de l'hyperespace correspondent un faisceau linéaire de sphères, ou un réseau à deux ou trois paramètres; à toute propriété des points, droites, plans et hyperplans correspond une propriété des sphères ou des systèmes de sphères de l'espace tridimensionnel. Une contradiction de la géométrie quadridimensionnelle en impliquerait une de la géométrie des sphères.

En liant de la même façon les hypersphères de l'espace à $n - 1$ dimensions aux points de l'espace à n dimensions, et en appliquant la méthode d'induction complète, on rend solidaires la compatibilité de la géométrie à n dimensions et celle de notre espace ordinaire.

On peut encore établir directement la solidarité logique de la géométrie plane et de la géométrie à n dimensions en choisissant dans le plan une variété à n dimensions permettant l'établissement d'une correspondance biunivoque avec les points de l'hyperespace considéré. Par exemple, considérons l'équation tangentielle homogène de toutes les paraboles du plan

$$P \equiv au^2 + bv^2 + cw^2 + duv + e vw = 0 .$$

La parabole dépend de cinq paramètres homogènes. Considérons cinq paraboles indépendantes $P_j = 0$. L'équation d'une parabole quelconque $P = 0$ peut être écrite sous la forme

$$P \equiv \Sigma q_j P_j = 0 .$$

En prenant les cinq q_j comme coordonnées homogènes d'un point de l'espace quadridimensionnel, on vérifie comme plus haut la solidarité logique de la géométrie de cet hyperespace avec celle des paraboles du plan.

La généralisation à n dimensions est facile; on choisit par exemple des courbes algébriques planes auxquelles on impose

éventuellement une ou plusieurs conditions appropriées. Ainsi, dans l'exemple précédent, ont été choisies les paraboles du plan considérées comme des coniques tangentielles, tangentes à la droite impropre.

On peut se rendre indépendant de ce choix de conditions supplémentaires. En effet, les propositions de la géométrie à n dimensions font partie intégrante de celles de la géométrie à p dimensions, si p est supérieur à n . Les courbes algébriques planes d'ordre m constituent une variété à $p = \frac{m(m+3)}{2}$ dimensions. Pour démontrer la solidarité logique de la géométrie à n dimensions avec la géométrie plane, choisissons le plus petit nombre m tel que p soit égal ou supérieur à n .

L'équation générale homogène d'une courbe algébrique d'ordre m est

$$\sum a_{jkl} x^j y^k z^l = 0, \text{ avec } j + k + l = m.$$

Choisissons $p + 1$ de ces courbes indépendantes, c'est-à-dire telles que le déterminant des coefficients ne soit pas nul. L'équation d'une courbe quelconque d'ordre m peut être exprimée linéairement au moyen des équations des courbes choisies. On établit ainsi la solidarité logique de la géométrie plane avec celle de l'espace à p dimensions, ce qui implique le cas de celle à n dimensions.

Comme en géométrie tridimensionnelle, la géométrie métrique élémentaire à n dimensions est celle dont la base axiomatique est la plus étendue. Les géométries affines ou projectives dont les axiomes sont moins nombreux sont évidemment compatibles, si la précédente l'est.

La géométrie multidimensionnelle paraît s'écarter beaucoup de la géométrie traditionnelle. Cela tient au fait que les images intuitives lui font défaut. En réalité, la modification apportée à l'édifice classique est minime: à part la liste des notions fondamentales et l'axiome d'intégrité qui lui est lié, un seul axiome, celui de dimensionnalité, est modifié. L'étude de la compatibilité est facile. La comparaison avec la géométrie non euclidienne, plus ancienne en date, montre combien était plus difficile la mise au point de cette dernière.