Zeitschrift: Archives des sciences [1948-1980]

Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève

Band: 9 (1956)

Heft: 2

Artikel: Sur la construction des polygones réguliers

Autor: Rossier, Paul

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-738971

A cette séance, M. Marc Vuagnat a présenté un rapport sur le Symposium de l'Union internationale de Cristallographie et sur la 3e Réunion internationale sur la réactivité des solides, à Madrid.

Séance du 21 Juin 1956

Paul Rossier. — *Sur la construction des polygones réguliers.*

Soit un polygone régulier à un nombre impair $2n + 1$ de côtés. Joignons un sommet aux extrémités du côté opposé. On forme ainsi un triangle isocèle d'angles $2\varphi = \frac{\pi}{2n+1}$ et $\psi = \frac{n\,\pi}{2n+1}$. L'axe de symétrie de ce triangle le décompose en deux triangles rectangles d'angles φ et $\psi = n\varphi$. Ces angles sont complémentaires. On a donc

$$\operatorname{tg} \varphi \,.\, \operatorname{tg} 2n\,\varphi = 1 \,.$$

La tangente de $2n\varphi$ est une fonction rationnelle de $x = \operatorname{tg} \varphi$. Ainsi la construction des polygones réguliers est ramenée à la solution d'une équation algébrique. Sans aucun recours à l'imaginaire et en ne nous appuyant que sur les éléments, nous retrouvons ainsi un premier résultat de Gauss.

Sous cette forme, la théorie des polygones réguliers ne présente aucune difficulté dans les deux cas connus des anciens. Pour le triangle, $n = 1$ et l'équation est

$$x \frac{2x}{1 - x^2} = 1 \quad \text{ou} \quad 3x^2 = 1 \,.$$

Dans le cas du pentagone, $n = 2$; l'expression de la tangente de 4φ est (avec $\operatorname{tg} \varphi = x$),

$$\operatorname{tg} 4\varphi = \frac{4x\,(1 - x^2)}{1 - 6x^2 + x^4} \,.$$

Toutes réductions faites, il vient

$$5x^4 - 10x^2 + 1 = 0 \,.$$

Cette équation biquadratique est justiciable du compas. Avec $n = 3$, on atteint l'heptagone. On a alors

$$\operatorname{tg} 6\varphi = \frac{6x - 20x^3 + 6x^5}{1 - 15x^2 + 15x^4 - x^6} .$$

L'équation de l'heptagone devient, en posant $x^2 = y$,

$$7y^3 - 35y^2 + 21y - 1 = 0 .$$

Pour démontrer la non-constructibilité de l'heptagone au compas, il faut prouver l'irréductibilité de cette équation. Si elle était réductible, le premier membre pourrait s'écrire, avec des coefficients entiers,

$$(ay + 1)(by^2 + cy - 1) = 0 .$$

La comparaison des coefficients donne

$$ab = 7 ; \quad ac + b = -35 ; \quad -a + c = 21 .$$

Eliminons b et c, il vient

$$a^3 + 21a^2 + 35a + 7 = 0 .$$

Cette équation ne possède aucune racine rationnelle; l'équation de l'heptagone est donc irréductible et la construction de ce polygone est impossible au compas.

Pour l'ennéagone, $n = 4$ et

$$\operatorname{tg} 8\varphi = \frac{8x(1 - x^2)(1 - 6x^2 + x^4)}{1 - 28x^2 + 70x^4 - 28x^6 + x^8} .$$

L'équation de l'ennéagone devient, avec $x^2 = y$,

$$9y^4 - 84y^3 + 12y^2 - 36y + 1 = 0 .$$

Elle est réductible, car le premier membre est égal à

$$(1 - 3y)(1 - 33y + 27y^2 - 3y^3) .$$

Le premier facteur donne le triangle équilatéral. On vérifie comme plus haut que le second facteur est irréductible. La construction de l'ennéagone est donc impossible au compas.

On retrouve ainsi des résultats classiques en n'ayant recours qu'aux formules de la trigonométrie élémentaire. Trois cas fort intéressants seraient évidemment ceux des polygones de 17, 257 et 65.537 côtés, dont Gauss a montré la constructibilité au compas. On est conduit alors à des équations de degrés 8, 128 et 32.768 dont les coefficients sont eux-mêmes de grands nombres (des milliers dans le cas de 17). Il est certain que ces équations sont solubles par racines carrées, mais la démonstration directe de cette propriété, sans recours à l'imaginaire, semble devoir présenter quelques difficultés.

Par contre, en recourant à l'imaginaire, on ramène facilement la théorie précédente à celle de Gauss. Posons $e^{i\varphi} = u$. On a

$$\operatorname{tg} 2n\varphi \operatorname{tg}\varphi \equiv \frac{u^{4n} - 1}{i\,(u^{4n} + 1)} \cdot \frac{u^2 - 1}{i\,(u^2 + 1)} = 1$$

Une seconde substitution $u^2 = - z$ donne

$$z^{2n+1} + 1 = 0 \,.$$

C'est l'équation de Gauss de la division du cercle.

Paul Rossier. — *Théorème de Kempe et constructions au compas.*

Le théorème de Kempe affirme l'existence d'un système articulé permettant de décrire tout arc fini d'une courbe algébrique quelconque et donne le moyen de déterminer ce système. Pour le démontrer, on pose

$$\begin{aligned} x &= a \cos \alpha + b \cos \beta \\ y &= a \sin \alpha + b \sin \beta \end{aligned}$$

et on met facilement l'équation de la courbe sous la forme

$$1) \quad \sum \mathrm{L}_j \cos \left(r_j\,\alpha \pm s_j\,\beta + \varepsilon_j \frac{\pi}{2}\right) = 0 \,.$$

Les L_j sont des constantes positives, les r_j et les s_j des entiers positifs et ε_j l'un des nombres 0, 1, 2 ou 3. Les termes de la somme sont en nombre fini. Cette équation a la signification suivante: la composition de vecteurs de longueurs fixes, L_j, faisant les angls $\gamma_j = r_j\,\alpha \pm s_j\,\beta + \varepsilon\,\frac{\pi}{2}$ avec l'axe des x donne