Construction élémentaire des polygones réguliers à 17 côtés au moyen des cercles inscrits aux étoilés

Autor(en): **Rossier, Paul**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Archives des sciences [1948-1980]**

Band (Jahr): **10 (1957)**

Heft 4

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-738719

Séance du 19 décembre 1957

Paul Rossier. — *Construction élémentaire des polygones réguliers à 17 côtés au moyen des cercles inscrits aux étoilés.*

1. — Soit un polygone régulier convexe à un nombre premier $2n + 1$ de côtés, inscrit dans un cercle de rayon-unité et ses divers étoilés. Numérotons ses sommets 0, 1, 2, 3, ... $2n$. Appelons c_j le côté de l'étoilé d'espèce j (dont le parcours fait tourner j fois autour du centre) et a_j le rayon de son cercle inscrit. Pour faire bref, nous dirons rayon a_j pour rayon du cercle inscrit dans l'étoilé d'espèce j.

Il y a n rayons a_j, distincts de $a_0 = 1$. Comme toujours, dans la théorie des polygones réguliers étoilés, deux rayons a_j et a_k dont les indices diffèrent d'un multiple de $2n + 1$ sont égaux; enfin on a $a_j = a_{2n+1-j}$. Dans la suite, nous supposons que l'indice j est ramené à une valeur au plus égale à n au moyen des relations précédentes.

De deux rayons a_j différents, le plus court a l'indice le plus élevé.

2. — Attribuons un signe aux rayons comme suit: projetons les sommets du polygone sur le diamètre passant par le sommet 0; les abscisses des n projections, comptées positivement du centre vers 0, sont les valeurs relatives des rayons. Ceux-ci sont positifs ou négatifs selon que l'indice est pair ou impair.

3. — La résultante des $2n + 1$ vecteurs issus du centre et ayant leurs extrémités aux sommets du polygone est nulle; en effet, cette composition conduit à un polygone semblable au donné, donc fermé. Projetons sur l'axe précédent et comptons une fois chaque rayon a_j; il vient

$$\sum a_j = -\frac{1}{2}, \qquad (j = 1, 2 \cdots n) . \tag{I}$$

4. — Les rayons a_j sont liés par un théorème d'addition. Pour le voir, menons le diamètre qui passe par le sommet p et

le côté du polygone dont les extrémités sont les sommets $p + q$ et $p - q$. Ce côté appartient à l'étoilé d'espèce $2q$; il est perpendiculaire au diamètre ci-dessus; il le coupe à la distance a_{2q} du centre. Appelons a' la projection de ce segment sur le diamètre par 0. Menons le côté de l'étoilé d'espèce $2p$ passant par le sommet p. On obtient une paire de triangles semblables qui donne

$$a' = a_j a_k ,$$

où, pour alléger l'écriture, on a posé $j = 2p$ et $k = 2q$.

Déterminons la hauteur h du triangle rectangle suivant: l'hypoténuse est portée par la perpendiculaire abaissée du sommet $p + q$ sur le diamètre par 0, un sommet est le sommet $p + q$ du polygone, un côté est sur le diamètre par p et le dernier côté passe par les sommets $p + q$ et $p - q$. Ce triangle est semblable aux précédents et l'on a

$$4h = c_j c_k .$$

Projetons les sommets $p + q$ et $p - q$ sur l'axe; il vient

$$a_{j \pm k} = a_j a_k \mp \frac{c_j c_k}{4} .$$

En additionnant ces deux expressions, on trouve

$$2 a_j a_k = a_{j+k} + a_{j-k} . \qquad \text{(II)}$$

Si $j = k$, cette formule devient

$$a_{2j} = 2 a_j^2 - 1 . \qquad \text{(II')}$$

Aucune difficulté de signe ne se présente si tous les sommets considérés appartiennent au premier quadrant. On vérifie facilement que les relations II sont valables en tenant compte des signes des a_j, tels que nous les avons fixés.

5. — Passons aux applications. Pour le triangle, l'équation I a seule un sens puisqu'il n'existe pas de triangle étoilé. Elle détermine la figure.

Dans le cas du pentagone, I et II′ suffisent. On obtient une équation quadratique dont la solution est immédiate.

Passons au polygone de 17 côtés ($n = 8$).

Appliquons successivement l'équation II′ en partant de $j = 1$; on est conduit à a_2, a_4 et à a_8. En continuant, on obtient la même suite de rayons. En partant de $j = 3$, on trouve les quatre seules valeurs a_6, a_5 et a_7. L'équation II′ permet donc de former deux classes de quatre rayons.

En appliquant deux fois la formule II′, on détermine a_{4j} en fonction de a_j. On trouve une relation biquadratique dont la forme importe peu. Opérons comme ci-dessus. Les rayons se groupent en quatre paires a_1 et a_4, a_2 et a_8, a_3 et a_5, a_6 et a_7. Cette classification suggère de déterminer des fonctions simples des rayons de chaque classe quaternaire, puis des paires. Posons donc

$$x_1 = a_1 + a_2 + a_4 + a_8 \qquad \text{et} \qquad x_2 = a_3 + a_6 + a_5 + a_7 \, .$$

L'équation I donne

$$x_1 + x_2 = -\frac{1}{2} \cdot$$

Le produit $x_1 x_2$ est composé de 16 produits de deux rayons; la formule II permet de l'exprimer par la demi-somme de 32 rayons. On voit facilement que chacun d'eux intervient le même nombre de fois, soit 4; ce produit est donc égal au double de la somme des huit rayons, soit à -1 et on peut former une équation quadratique dont les sommes x_1 et x_2 sont les racines. Ces sommes sont constructibles au compas. Puisque le produit est négatif, les deux racines sont de signes opposés; dans x_2, le seul terme positif est a_6, de valeur absolue moindre que celle de a_3 (ou de a_5); donc x_2 est la racine négative et x_1, la positive.

Continuons de même en faisant la somme des deux rayons des paires citées plus haut. Convenablement prises deux à deux, ces sommes ont pour total les racines x de l'équation précédente. Grâce à la formule II, le produit de deux sommes binaires appariées comme nous venons de le faire, s'exprime encore au moyen de la somme des rayons. Les quatre sommes binaires sont les racines de deux équations quadratiques de terme connu égal à $-\frac{1}{4}$ et dont le coefficient du terme linéaire est l'un des x. Comme ci-dessus, une discussion de signes permet l'attribution exacte des racines aux sommes cherchées.

Enfin, le théorème II donne, par exemple,

$$2\,a_1 a_4 = a_3 + a_5 .$$

Cette somme est l'une de celles que nous venons de déterminer, comme aussi le total des deux facteurs a_1 et a_4. Ces deux rayons sont encore déterminés par une équation quadratique de coefficients connus. Il en est de même pour toute autre paire de rayons.

Ainsi est obtenue une théorie de la construction du polygone à 17 côtés qui ne fait appel qu'aux éléments de la géométrie.

6. — Au fond, l'exposé précédent est l'adaptation aux méthodes d'Euclide de la théorie de Gauss, en remplaçant les composantes réelles des racines imaginaires de l'unité par les rayons, auxquelles elles sont égales. Cependant l'attribution de signes à ces rayons, nécessaire pour la généralité de la formule II, n'est pas habituelle chez les anciens. Les grandeurs considérées par Gauss dans les étapes de la solution de l'équation de division du cercle sont des sommes diverses de rayons, relatifs à des étoilés d'espèces doubles ou quadruples les unes des autres. Cela montre que l'étude d'un polygone régulier est inséparable de celle de ses étoilés.

7. — La formule II′, la seule nécessaire dans le cas du pentagone, peut être démontrée en appliquant le théorème de Pythagore à trois triangles rectangles; l'un a c_{2j} comme hypoténuse et $\frac{1}{2}c_j$ pour l'une des cathètes; les autres ont pour cathètes le rayon a_j, respectivement a_{2j}, et le demi-côté correspondant. L'élimination des côtés conduit à II′.

8. — Nous avons déjà donné une solution du problème des polygones réguliers peu différente de celle exposée ici, basée sur des propriétés des fonctions trigonométriques [1]. Parfois, l'em-

[1] Paul ROSSIER, « Théorie élémentaire de la construction des polygones réguliers de 3, 5, 7, 13, 17 et 19 côtés, au compas et au trisecteur ». *Archives*, vol. 10, fasc. 1, p. 100, 1957.

ploi de la trigonométrie masque un recours caché et nécessaire aux imaginaires; l'exemple du cas irréductible des équations cubiques est classique. Ici, il n'en est rien, puisque la solution peut être exposée sans faire usage de ces fonctions.

Le théorème II est un cas particulier d'une propriété additive des cosinus et sa démonstration est identique à celle de cette proposition, mais elle ne fait appel qu'à la similitude.

Le procédé des rayons exposé ici pourrait être employé pour l'étude d'autres polygones réguliers que ceux à 3, 5 et 17 côtés, par exemple celle de ceux qui sont constructibles au trisecteur. L'intérêt de ces considérations est diminué du fait que la trisection de l'angle exige le recours à des propriétés ou à des courbes qui, comme la trigonométrie, débordent du domaine strict de la géométrie élémentaire.

P. Bouvier. — *Stabilité des amas stellaires ouverts en présence de matière interstellaire diffuse.*

On sait que la matière interstellaire disséminée sous forme de gaz et de poussières à travers la Galaxie dont elle représente une fraction appréciable de la masse totale, a tendance à s'agglomérer en nuages d'inégale grosseur situés de préférence à peu de distance du plan galactique. Certains de ces nuages, parmi les plus gros, ont une masse qu'on estime à près de 10.000 fois celle du Soleil. C'est aussi au voisinage du plan galactique que l'on rencontre les amas ouverts ou galactiques, formés d'étoiles au nombre de quelques dizaines à quelques milliers et où figurent souvent des étoiles très chaudes (supergéantes bleues).

Il paraît alors naturel d'examiner de plus près l'interaction s'exerçant entre un amas galactique et un gros nuage de matière diffuse situé non loin de l'amas; ceci nous conduit à reprendre une étude entreprise autrefois par B.-J. Bok (1934) et par H. Mineur (1939) sur la stabilité des amas dans le champ général gravitationnel de la Galaxie; il conviendra d'y adjoindre le champ perturbateur du nuage.

Nous avons traité ce problème en donnant au nuage une forme allongée et en le situant d'abord sur le même rayon issu