Théorie élémentaire de la construction des polygones réguliers de 3, 5, 7, 13, 17 et 19 côtés : au compas et au trisecteur

Autor(en): **Rossier, Paul**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Archives des sciences [1948-1980]**

Band (Jahr): **10 (1957)**

Heft 1

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-738690

Séance du 21 février 1957

Paul Rossier. — *Théorie élémentaire de la construction des polygones réguliers de 3, 5, 7, 13, 17 et 19 côtés, au compas et au trisecteur.*

En se basant sur des propriétés de théorie des nombres et sur celles des équations du type

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1 = 0 ,$$

Gauss a montré que la construction d'un polygone régulier d'un nombre premier n de côtés se ramène à la décomposition du nombre $n - 1$ en facteurs premiers et à la solution d'autant d'équations algébriques qu'il y a de facteurs dans ce nombre; le degré de chacune de ces équations est égal au facteur considéré. Les procédés de Gauss s'écartent beaucoup des méthodes élémentaires, d'autant plus que, dans les cas considérés, toutes les racines de l'équation ci-dessus sont complexes.

Nous nous proposons de montrer qu'une équation équivalente à celle de Gauss peut être obtenue par des procédés élémentaires. Le théorème d'addition du cosinus permet de montrer que le compas suffit dans les cas où n vaut 3, 5 et 17, tandis que le trisecteur d'angles donne, avec le compas, les polygones de 7, 13 et 19 côtés.

Soient C le centre, 0, 1, 2, ... $n - 1$ les sommets d'un polygone régulier de n côtés. La résultante des vecteur C0, C1, ... C$n - 1$ est nulle. En effet, si cette somme n'était pas nulle, elle tournerait de $1/n$ de tour en faisant tourner la figure de cet angle. Projetons ces vecteurs sur le rayon C0. Posons $\alpha = 2\pi/n$. Il vient

$$\sum \cos j\alpha = 0 \qquad (j = 0, 1, \dots, n - 1) .$$

Mais $\cos (n - j)\alpha = \cos j\alpha$. On a donc

$$\sum \cos j\alpha = -\frac{1}{2} \qquad \left(j = 1, 2, \dots \frac{n-1}{2}\right) .$$

Cette équation est équivalente à celle de Gauss, car on montre en trigonométrie que cos $j\alpha$ est une fonction entière de cos α. L'équation est bien algébrique.

Examinons les cas particuliers les plus simples. Le cas de $n = 3$ est immédiat:

$$\cos \alpha = -\frac{1}{2} \cdot$$

Pour $n = 5$, en tenant compte de $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 - 1$, il vient

$$4 \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha - 1 = 0 .$$

Ces expressions sont évidemment constructibles au compas. Faisons $n = 7$. Il vient, en remplaçant cos 3α et cos 2α par leurs expressions en fonction de cos α,

$$8 \cos^3 \alpha + 4 \cos^2 \alpha - 4 \cos \alpha - 1 = 0 . \qquad (1)$$

Au lieu de α, on pourrait déterminer 2α. Il viendrait alors $\cos 6\alpha + \cos 3\alpha + \cos 2\alpha = -\frac{1}{2}$. Cette équation est identique à l'équation de départ. L'équation (1) a toutes ses racines réelles, puisque deux le sont. Or on peut résoudre graphiquement toutes les équations cubiques dont les racines sont réelles au moyen du compas et d'un trisecteur. L'heptagone est donc constructible au moyen de ces deux appareils.

L'équation fondamentale correspondant à $n = 13$ est

$$\cos \alpha + \cos 2 \alpha + \ldots + \cos 6 \alpha = -\frac{1}{2} \cdot$$

Posons

$$x_1 = \cos \alpha + \cos 3 \alpha + \cos 4 \alpha ,$$

$$x_2 = \cos 2 \alpha + \cos 6 \alpha + \cos 5 \alpha .$$

Au signe ou à un tour près, chaque angle de chacune de ces sommes est le triple du précédent et ceux d'une ligne le double de ceux de l'autre.

On a évidemment

$$x_1 + x_2 = -\frac{1}{2} \cdot$$

Formons $x_1 \,.\, x_2$ et appliquons la formule

$$2 \cos p \cos q = \cos (p + q) + \cos (p - q) .$$

On obtient un polynôme de 18 termes en $a_j \cos j\alpha$. Si l'on remplace α par 2α ou 3α, les x se permutent ou ne varient pas.

On a donc $a_j = a_{2j} = a_{3j}$ et tous les coefficients a_j sont égaux entre eux. Il y a six cosinus et dix-huit termes. Il vient donc

$$x_1 x_2 = 3 \sum \cos j\alpha = -\frac{3}{2} \qquad (j = 1, 2, \ldots 6) .$$

La somme et le produit des deux x sont connus; ils sont constructibles au compas.

Formons l'équation qui a $\cos \alpha$, $\cos 3\alpha$ et $\cos 4\alpha$ pour racines, soit

$$Y^3 + AY^2 + BY + C = 0 .$$

On a

$$A = -x_1 .$$

Un calcul facile montre que B, égal à la somme des produits des racines deux à deux, vaut la moitié de la somme des six $\cos j\alpha$; donc

$$B = -\frac{1}{4} \cdot$$

Le calcul de C est un peu plus compliqué. On a

$$-C = \cos \alpha (\cos 3\alpha \cdot \cos 4\alpha) = \frac{1}{2} \cos \alpha (\cos \alpha + \cos 6\alpha) =$$

$$= \frac{1}{4} (1 + \cos^2 \alpha + \cos 5\alpha + \cos 6\alpha)$$

$$= \frac{1}{4} (1 + \cos^2 3\alpha + \cos 2\alpha + \cos 5\alpha)$$

$$= \frac{1}{4} (1 + \cos^2 4\alpha + \cos 2\alpha + \cos 6\alpha) .$$

Additionnons ces trois expressions. On voit apparaître la somme des carrés des trois racines de l'équation cherchée. D'après une formule due à Newton, cette somme est exprimable en fonction de A et B. Tous calculs faits, on trouve

$$C = -\frac{7}{24} + \frac{x_1^2}{12} + \frac{x_2}{6} \cdot$$

L'équation est déterminée; ses trois racines sont réelles; elle est justiciable du trisecteur. Donc le polygone de 13 côtés est constructible avec un compas et un trisecteur.

Avec $n = 17$, posons

$$x_1 = \cos \alpha + \cos 2 \alpha + \cos 4 \alpha + \cos 8 \alpha$$

$$x_2 = \cos 3 \alpha + \cos 6 \alpha + \cos 5 \alpha + \cos 7 \alpha .$$

Chaque angle de chaque somme est double du précédent et si l'on multiplie par trois chacun des angles de l'une des sommes on trouve un angle de l'autre (au signe ou à un tour près). On a

$$x_1 + x_2 = -\frac{1}{2} \cdot$$

Un calcul de même type que celui relatif à $n = 13$ montre que $x_1 x_2$ est un polynôme de 32 termes à coefficients égaux entre eux en $\cos j\alpha$. Il vient ainsi

$$x_1 x_2 = -1 ,$$

d'où une construction de x_1 et x_2 au compas.

Posons ensuite

$$y_1 = \cos \alpha + \cos 4 \alpha ,$$

$$y_2 = \cos 2 \alpha + \cos 8 \alpha ,$$

$$y_3 = \cos 3 \alpha + \cos 5 \alpha ,$$

$$y_4 = \cos 6 \alpha + \cos 7 \alpha .$$

On a $y_1 + y_2 = x_1$ et $y_3 + y_4 = x_2$.

Comme plus haut, on voit que $y_1 \cdot y_2$ et $y_3 \cdot y_4$ valent la moitié de la somme des cosinus de l'équation fondamentale, soit $-\frac{1}{4}$. On en conclut les quatre y par une construction du même type que celle qui a donné les x.

Il vient enfin

$$\cos \alpha \,.\, \cos 4\alpha \equiv \frac{1}{2} (\cos 3\alpha + \cos 5\alpha) = \frac{y_3}{2} \cdot$$

Une troisième application de la même construction donne $\cos \alpha$.

Dans le cas $n = 19$, on a

$$\sum \cos j\alpha = -\frac{1}{2} \quad (j = 1, 2, \dots 9) \cdot$$

On pose

$$x_1 = \cos \alpha + \cos 7\alpha + \cos 8\alpha ,$$
$$x_2 = \cos 2\alpha + \cos 5\alpha + \cos 3\alpha ,$$
$$x_3 = \cos 4\alpha + \cos 9\alpha + \cos 6\alpha .$$

Comme plus haut, on calcule les coefficients de l'équation dont les trois x sont les racines. On trouve sans difficulté

$$x^3 + \frac{1}{2} x^2 - \frac{3}{2} x - \frac{7}{4} = 0 \cdot$$

Cette équation est soluble graphiquement au trisecteur, car ses racines sont réelles.

Déterminons enfin les coefficients de l'équation

$$Y^3 + AY^2 + BY + C = 0 ,$$

qui a pour racines cos α, cos 7α et cos 8α. On a $A = - x_1$. Un calcul simple donne $B = -\frac{1}{4} - \frac{x^2}{2}$. Quant à C, sa détermination est analogue à celle faite à propos de $n = 13$. En additionnant trois expressions différentes du produit des trois racines, on voit apparaître la somme des carrés des trois racines et x_2. Il vient enfin

$$C = -\frac{1}{3} (x_1^2 + 2x_2 + \frac{1}{2}).$$

L'équation en Y est justiciable du compas et du trisecteur, car elle a ses trois racines réelles.

La forme donnée ici à la théorie de quelques polygones réguliers a les avantages suivants: pour les polygones de 3, 5 et 17 côtés, elle ne fait appel qu'à des théorèmes élémentaires; pour ceux de 7, 13 et 19 côtés, elle exige en outre le théorème de la constructibilité au trisecteur et au compas des racines d'une équation cubique à racines réelles et une forme réduite du théorème des fonctions symétriques des racines d'une équation algébrique; il apparaît immédiatement que les racines de ces équations sont réelles; elle donne explicitement les équations à résoudre. On pourrait l'étendre aux polygones à nombres premiers de côtés de la forme $2^p 3^q + 1$, tels que 37, 73, 97, 109, 577, 1153, 18439. Par les méthodes élémentaires, les calculs sont très lourds. Elle a le grave inconvénient de manquer de généralité, qualité qui est l'apanage de la théorie de Gauss.

Cependant, l'équation fondamentale F est générale et toutes ses racines sont réelles. C'est elle que l'on obtient en cherchant les parties réelles des solutions de celle de Gauss. Dans la théorie de Gauss, le passage par l'imaginaire permet une grande généralité, ce qui est fréquent dans les problèmes algébriques.

Ch.-Albert Baud et Peter W. Morgenthaler. — *Etude microradiographique de tissus osseux primaires (à propos de la mandibule préhistorique de Farincourt, Haute-Marne).*

La microradiographie constitue un moyen d'apprécier quantitativement le degré de minéralisation dans des coupes de tissu osseux. Elle présente sur les méthodes de dosage chimique l'avantage de permettre une localisation précise des différences de concentration en substance minérale dans des territoires microscopiques.

On soumet à la microradiographie des tranches relativement minces (70-80 μ environ) obtenues par usure et polissage suivant le procédé habituel des minéralogistes, sans décalcification préalable, bien entendu. Le rayonnement X doit être choisi suffisamment mou pour qu'il soit absorbé d'une manière satisfaisante malgré la faible épaisseur de substance minérale traversée, et assez dur pour ne pas être absorbé par la matière organique. Le rayonnement K_α émis par l'anticathode de Cu d'un tube alimenté sous 30 kV, dont la longueur d'onde est de 1,54 Å, convient parfaitement. La surface sensible doit être une émulsion pratiquement sans grain, comme celle du film Lippmann de Gevaert, de façon à permettre l'observation microscopique à de forts grossissements.

Pour une étude quantitative, on radiographie en même temps que la coupe et sur le même film un étalon constitué par des feuilles d'aluminium d'épaisseur connue, superposées et légèrement décalées. Les microradiographies sont ensuite analysées au photomètre. On détermine d'abord les déflexions du photomètre pour chaque échelon d'étalon, ensuite on effectue les mesures pour le plus grand nombre possible de points sur la préparation. Les déflexions correspondant à chaque point de la coupe sont exprimées en épaisseur d'étalon.