

Zeitschrift: Archives des sciences [1948-1980]
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 14 (1961)
Heft: 1

Artikel: Jean-Louis Bertrand et le théorème de Desargues sur les triangles perspectifs
Autor: Rossier, Paul
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-739566>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 05.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Paul Rossier. — *Jean-Louis Bertrand et le théorème de Desargues sur les triangles perspectifs.*

Rappelons ce théorème: si les côtés homologues de deux triangles se coupent en trois points alignés, les trois droites déterminées par les paires de sommets homologues sont concourantes. La propriété est immédiate si les deux triangles ne sont pas coplanaires; les côtés homologues se coupent alors sur l'arête du dièdre formé par les plans des triangles; les paires de côtés homologues déterminent les faces d'un trièdre dont les arêtes passent respectivement par les sommets homologues.

Actuellement, pour démontrer le théorème dans le cas des triangles coplanaires, on fait usage du théorème de l'espace. Est-il possible de le démontrer en géométrie plane sans recours à l'espace et par les moyens de la géométrie projective, comme ci-dessus? Hilbert¹ a démontré que la réponse est négative; pour cela, on construit un modèle de géométrie plane dans lequel certaines « pseudo-droites » satisfont aux axiomes projectifs et où la proposition est fausse².

Jean-Louis Bertrand³ (1843-1923) enseigna la géométrie à la Faculté des Sciences de Genève; il publia son cours de 1871-1872⁴. Dans cet ouvrage, on trouve la démonstration du théorème suivant⁵:

« Lorsque deux figures dont tous les points se correspondent deux à deux [...] sont placées de telle manière qu'une droite AB joignant deux points d'une figure et la droite A_1B_1 menée par les points correspondants se coupent sur une droite s , ces deux figures sont planes et perspectives. »

L'auteur démontre tout d'abord qu'à toute droite correspond une droite puis, dans le cas des figures non coplanaires, il utilise

¹ HILBERT, *Grundlagen der Geometrie*, §23.

² Cf. P. ROSSIER, La géométrie et la théorie de la connaissance, *Archives des Sciences*, vol. I, 1948, p. 477.

³ Ne pas le confondre avec Louis Bertrand (1731-1812), professeur à Genève de 1761 à 1795.

⁴ L. BERTRAND, professeur agrégé à la Faculté des Sciences et Lettres de Genève, *Géométrie de position ou Géométrie supérieure*, Paris, 1873.

⁵ *Loc. cit.*, p. 17.

un trièdre comme nous l'avons montré plus haut. Dans le cas des figures coplanaires, Bertrand opère comme suit ¹:

« Soient encore AA_1 et BB_1 deux paires de points correspondants; soit A_2 le point d'intersection de AA_1 avec s . La droite correspondante de AA_2 doit rencontrer celle-ci sur s , donc en A_2 et ensuite passer par le point A_1 correspondant de A ; ainsi A_2A_1 correspond à A_2A . Nous en pouvons dire autant de B_2B_1 et B_2B . Les deux droites A_2A , B_2B se rencontrent quelque part en un point S . Puisque S appartient à A_2A et à B_2B , son point correspondant doit être à la fois sur A_2A_1 et sur B_2B_1 ; en d'autres termes, S est en même temps son point correspondant. Dès lors, si l'on prend une troisième paire quelconque de points correspondants CC_1 , on prouve que CC_1 passe par S en observant que les droites SC et SC_1 se correspondent et doivent avoir en outre, d'après l'hypothèse un même point commun sur s .

» Les deux figures sont donc en perspective. »

Cette démonstration ne fait aucun appel à l'espace; elle implique comme corollaire que le correspondant d'un triangle est lié à celui-ci par une perspective. On a là, semble-t-il, une démonstration du théorème de Desargues basée sur la géométrie projective plane. Il y a donc contradiction avec la démonstration, donnée une trentaine d'années après les travaux de Bertrand, de l'impossibilité citée plus haut.

Le paradoxe s'explique comme suit: les hypothèses mises à la base des deux démonstrations ne sont pas les mêmes et Bertrand requiert beaucoup plus que Desargues. En effet, ce dernier pose seulement que les trois points d'intersection des côtés homologues sont alignés. Bertrand, au contraire, postule une correspondance ponctuelle, plane, homolocale, bi-univoque dans laquelle les deux droites passant l'une par une paire de points et l'autre par la paire de points correspondants se coupent sur une droite fixe. Il admet donc, sans la démontrer, l'existence d'une telle correspondance. Or, pour prouver cette existence, le moyen le plus simple est de projeter dans le plan de la figure, à partir de deux centres différents, un plan oblique sur le plan précédent. Cette preuve fait usage de l'espace; le théorème de Hilbert affirme la nécessité de ce recours

¹ P. 18.

à l'espace. Ainsi, implicitement, Bertrand fait usage de l'espace dans la démonstration de son théorème.

Précisons qu'à l'époque considérée, le problème de l'axiomatisation de la géométrie n'était pas posé avec la netteté qu'il a prise depuis; c'est à peine deux ans auparavant que Beltrami avait montré la compatibilité logique de la géométrie lobatchevskienne plane. D'ailleurs, dans la préface de son ouvrage, Bertrand dit qu'il s'est inspiré de Chasles et l'on sait que ce dernier s'est peu préoccupé d'assurer les fondements de sa science. L'insuffisance que nous signalons dans l'ouvrage de Bertrand est le fait d'une époque; c'est un quart de siècle plus tard que Hilbert s'intéressa, avec le succès que l'on sait, aux fondements de la géométrie.

Séance du 16 mars 1961

P. Bouvier et A. Duriaux. — *Configuration de l'amas galactique Praesepe*¹.

L'amas de Praesepe se prête bien à une étude détaillée: assez proche du soleil (158 parsecs), il contient près de 200 étoiles connues parmi lesquelles nous en avons sélectionné 188 dont l'appartenance à l'amas a été établie par plusieurs auteurs.

L'aspect de l'amas nous incite à postuler une bonne symétrie sphérique. Celle-ci est importante; elle est un premier argument en faveur d'un état d'équilibre de l'amas car en son absence, il ne peut y avoir d'équilibre. Comparé aux Hyades et aux Pléiades, Praesepe semble bien présenter une symétrie sphérique assez bonne, meilleure en tout cas, que celle des deux amas cités.

A partir du point généralement admis comme centre de l'amas, nous avons tracé des couronnes concentriques de largeur égale (10' d'arc) et nous avons évalué la concentration des étoiles dans chacune de ces couronnes. Cette fonction de la distance a pu être approchée de façon très satisfaisante par une fonction continue

¹ Cette communication et la suivante mettent en relief certains aspects d'un travail actuellement sous presse dans les *Archives des Sciences* et où l'on trouvera toutes les références.