

**Zeitschrift:** Archives des sciences [1948-1980]  
**Herausgeber:** Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève  
**Band:** 14 (1961)  
**Heft:** 3

**Artikel:** Sur l'évaporation d'un amas stellaire à deux populations différentes  
**Autor:** Bouvier, P.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-739579>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 15.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# SUR L'ÉVAPORATION D'UN AMAS STELLAIRE A DEUX POPULATIONS DIFFÉRENTES

PAR

**P. BOUVIER**

---

## *Résumé.*

On considère un amas formé de deux populations d'étoiles de masse différente, l'une des populations étant numériquement prépondérante; on reprend les hypothèses de départ de King (1960), soit creux rectangulaire de potentiel et isotropie des vitesses. Le taux d'évasion en fonction de la masse est alors calculé à partir d'un système de deux équations de Fokker-Planck. Discussion et comparaison des résultats.

## *Abstract.*

A star cluster containing two different stellar populations is considered here, one of these populations being very much larger than the other. By making the same basic assumptions as King (1960), i.e. rectangular potential well and isotropic velocity distribution, the rate of escape is obtained, as a function of mass, from a system of two Fokker-Planck equations. Results are discussed and compared to some similar ones previously found by others.

1. Nous examinons ici le problème d'un amas stellaire ayant la symétrie sphérique et composé de deux populations distinctes d'étoiles de masses respectives  $m_1, m_2$ . A chacune des populations est associée, dans l'espace de phase à six dimensions, une fonction de distribution

$$f_s = f_s(\vec{x}, \vec{v}, t) \quad s = 1, 2$$

où  $\vec{x}$  symbolise les trois coordonnées de position,  $\vec{v}$  les trois coordonnées de vitesse et  $t$  le temps.

Les fonctions  $f_s$  subiront cependant des fluctuations au cours du temps sous l'effet des rencontres ou interactions de choc entre étoiles de l'amas et comme ces interactions sont régies par la seule attraction de gravitation, l'on se trouve ici dans les conditions (Jeans) où l'effet cumulé des chocs faibles l'emporte sur celui des rares chocs à proximité immédiate. En tout point de l'amas, chaque fonction de distribution des vitesses varie alors d'une manière quasicontinue, selon une équation de Fokker-Planck. Nous allons faire ici deux hypothèses restrictives afin de simplifier la forme explicite des équations:

1° le potentiel est supposé constant à l'intérieur de l'amas,

2° les distributions sont isotropes en les vitesses.

Il en résulte que les fonctions  $f_s$  ne dépendent plus que des deux variables  $v$  (module de la vitesse) et  $t$ .

La forme de l'équation de Fokker-Planck a été modifiée par Rosenbluth et al. [3] dans le cas général de distributions de vitesses quelconques; si l'on tient compte de 2°, l'équation revêt une forme plus simple déjà utilisée par plusieurs auteurs [1], [2] et dont nous ferons usage dans le présent problème où il nous faut écrire le système suivant de deux équations aux dérivées partielles

$$(1) \quad \frac{\partial f_1}{\partial t} = \frac{4\pi}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \Gamma_{11} \left( \mathcal{A}_v[f_1] f_1 + \mathcal{B}_v[f_1] \frac{\partial f_1}{\partial v} \right) + \right. \\ \left. + \Gamma_{21} \left( \frac{m_1}{m_2} \mathcal{A}_v[f_2] f_1 + \mathcal{B}_v[f_2] \frac{\partial f_1}{\partial v} \right) \right\}$$

$$(2) \quad \frac{\partial f_2}{\partial t} = \frac{4\pi}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \Gamma_{12} \left( \frac{m_2}{m_1} \mathcal{A}_v[f_1] f_2 + \mathcal{B}_v[f_1] \frac{\partial f_2}{\partial v} \right) + \right. \\ \left. + \Gamma_{22} \left( \mathcal{A}_v[f_2] \frac{\partial f_2}{\partial v} + \mathcal{B}_v[f_2] \frac{\partial f_2}{\partial v} \right) \right\}$$

$\mathcal{A}_v$  et  $\mathcal{B}_v$  sont les fonctionnelles linéaires

$$\mathcal{A}_v[f] = \int_0^v v^2 f dv \\ \mathcal{B}_v[f] = \frac{1}{3v} \int_0^v v^4 f dv + \frac{v^2}{3} \int_v^\infty v f dv$$

fonctions de  $v$ . En outre,  $G$  étant la constante de la gravitation,

$$\Gamma_{sr} = 4\pi G^2 m_s^2 \text{Log } \alpha_{sr} \quad \begin{array}{l} s = 1, 2 \\ r = 1, 2 \end{array}$$

où  $\alpha_{sr}$  est un rapport de longueurs caractéristique d'une rencontre entre une étoile  $s$  et une étoile  $r$ ; nous considérons par la suite  $\text{Log } \alpha_{sr}$  comme pratiquement constant et égal à une valeur moyenne commune quels que soient  $s, r$ . Donc

$$(3) \quad \Gamma_{sr} = \Gamma_s = 4\pi G^2 m_s^2 \text{Log } \alpha.$$

La vitesse quadratique moyenne est définie par addition des énergies cinétiques des deux populations:

$$(4) \quad \langle v^2 \rangle = \xi_1 \langle v^2 \rangle_1 + \xi_2 \langle v^2 \rangle_2$$

$\langle v^2 \rangle_s^{\frac{1}{2}}$  étant la vitesse quadratique moyenne des étoiles  $s$  seulement et les coefficients

$$\xi_1 = \frac{M_1}{M_1 + M_2}, \quad \xi_2 = \frac{M_2}{M_1 + M_2}$$

mesurant les masses relatives, variables au cours du temps.

Quant à la vitesse d'évasion, elle se déduit de la relation

$$v_e^2 = 4 \langle v^2 \rangle.$$

2. Lorsque la masse  $M_1$  de la population 1 est très supérieure à celle de la population 2, on a  $\xi_1 \simeq 1$ ,  $\xi_2 \simeq 0$  et la vitesse d'évasion est pratiquement déterminée par la seule population 1

$$(5) \quad v_e^2 = 4 \langle v^2 \rangle_1.$$

C'est ce qui arrive quand les étoiles 1 sont beaucoup plus nombreuses que les autres; on ne retient alors dans les équations (1), (2) que les chocs 1 — 1 et les chocs 2 — 1 respectivement, de sorte que

$$(6) \quad \frac{1}{4\pi \Gamma_1} \frac{\partial f_1}{\partial t} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left( \mathcal{A}_v[f_1] f_1 + \mathcal{B}_v[f_1] \frac{\partial f_1}{\partial v} \right)$$

$$(7) \quad \frac{1}{4\pi \Gamma_1} \frac{\partial f_2}{\partial t} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{m_2}{m_1} \mathcal{A}_v[f_1] f_2 + \mathcal{B}_v[f_1] \frac{\partial f_2}{\partial v} \right).$$

Traitant le problème d'une seule population, King [2] est parti de l'équation (6) et en a cherché une solution de la forme

$$(8) \quad f_1(v, t) = h_1(t) g_1(u)$$

où

$$v(t) = a(t) u.$$

La séparation des variables devient possible à condition que l'on puisse écrire

$$\frac{a'}{a} = q_1 \frac{h_1'}{h_1}$$

$q_1$  étant une constante. Il en résulte d'abord

$$(9) \quad h_1' = -4\pi \Gamma_1 \mu_1 h_1^2$$

où  $\mu_1$  est une autre constante. Tenant compte ensuite de (5) qui nous donne

$$u_e^2 = 4 \langle u^2 \rangle,$$

l'équation en  $u$  s'écrit

$$(10) \quad \frac{1}{u^2} \frac{d}{du} \left\{ B_u[g_1] \frac{dg_1}{du} + \left( A_u[g_1] - \frac{3}{2} \lambda_1 u^3 \right) g_1 \right\} + \lambda_1 g_1 = 0$$

avec

$$A_u[g_1] = \int_0^u u^2 g_1 du$$

$$B_u[g_1] = \frac{1}{3u} \int_0^u u^4 g_1 du + \frac{u^2}{3} \int_u^{u_e} u g_1 du$$

$$(11a) \quad \lambda_1 = (1 + 3q_1) \mu_1 = -\frac{1}{4\pi \Gamma_1 h_1} \frac{N_1'}{N_1}$$

$$(11b) \quad q_1 \mu_1 = \frac{3}{2} \lambda_1$$

$N_1$  étant la concentration des étoiles 1.

Normalisant les  $u$  à  $\langle u^2 \rangle = 1$ , la solution de (10) soumise aux conditions initiales

$$g_1(0) = 1, \quad \left( \frac{dg_1}{du} \right)_{u=0} = 0$$

est obtenue numériquement; elle a été tabulée dans [2] (p. 124), la valeur propre  $\lambda_1$  ayant été fixée à 0,004283 par la condition supplémentaire

$$g_1(2) = 0.$$

Ce calcul est toutefois insuffisant en raison du caractère sommaire des hypothèses de départ; la dépendance spatiale de  $f_1$  ainsi que la contraction de l'amas consécutive à l'évaporation ont été négligées. Il en résulte entre autres une valeur négative de  $\mu_1$  telle qu'on la déduit de (11 a) et (11 b) après élimination de  $q_1\mu_1$  et ceci nous conduit d'après (9) à une fonction  $f_1$  croissante au cours du temps.

King s'est efforcé d'introduire la contraction après coup, mais cette tentative n'est pas vraiment satisfaisante.

3. Sans modifier les hypothèses faites au n° 1, admettons cependant pour (7) également une solution du type (8) soit

$$(12) \quad f_2(v, t) = h_2(t) g_2(u)$$

Elle permettra la séparation des variables  $t, u$  si,  $q_2$  étant une constante, l'on a

$$\frac{a'}{a} = q_2 \frac{h_2'}{h_2}$$

alors

$$(13) \quad h_2' = -4\pi\Gamma_1\mu_2 h_1 h_2$$

( $\mu_2$ , constante).

Rappelant que des définitions du nombre d'étoiles  $s$  par unité de volume

$$N_s = 4\pi h_s a^3 \int_0^{ue} u^2 g_s(u) du = 4\pi h_s a^3 A_{ue} [g_s]$$

et de la densité d'énergie cinétique des étoiles  $s$

$$T_s = 2\pi m_s h_s a^5 \int_0^{ue} u^4 g_s(u) du$$

l'on tire les relations

$$\frac{N'_s}{N_s} = \frac{h'_s}{h_s} + 3 \frac{a'}{a}$$

$$\frac{T'_s}{T_s} = \frac{h'_s}{h_s} + 5 \frac{a'}{a}$$

dont la première donne le taux d'évaporation de la population  $s$ , nous vérifions que

$$(14 a) \quad \lambda_2 = (1 + 3q_2) \mu_2 = - \frac{1}{4\pi \Gamma_1 h_1} \frac{N'_2}{N_2}$$

$$(14 b) \quad q_2 \mu_2 = - \frac{1}{4\pi \Gamma_1 h_1} \frac{a'}{a} \simeq \frac{3}{2} \lambda_1$$

ayant tenu compte de (5).

Il reste finalement l'équation différentielle homogène suivante pour  $g_2(u)$ :

$$(15) \quad \frac{1}{u^2} \frac{d}{du} \left\{ B_u[g_1] \frac{dg_2}{du} + \left( \frac{m_2}{m_1} A_u[g_1] - \frac{3}{2} \lambda_1 u^3 \right) g_2 \right\} + \lambda_2 g_2 = 0$$

avec les conditions initiales

$$g_2(0) = 1, \quad \left( \frac{dg_2}{du} \right)_{u=0} = 0$$

et la condition supplémentaire

$$g_2(2) = 0$$

qui déterminera  $\lambda_2$  pour une valeur donnée, pas trop grande, du rapport  $m_2/m_1$ .

4. La résolution numérique de l'équation (15) a été effectuée à l'aide de la calculatrice Ferranti « Mercury » du C.E.R.N., en adoptant pour  $g_1(u)$  la solution de (10) tabulée à cinq décimales par King dans [2] et en donnant au rapport

$$\mu = \frac{m_2}{m_1}$$

les valeurs successives 0.0 0.1 0.2 ... 1.5. Etant donné que, d'après (11 a) et (14 a), nous avons

$$(16) \quad \frac{N'_2/N_2}{N'_1/N_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

la figure 1 qui représente (courbe en trait plein) la variation avec  $\mu$  des valeurs propres  $\lambda_2$  nous apprend que le taux d'évasion est fonction monotone décroissante de la masse.

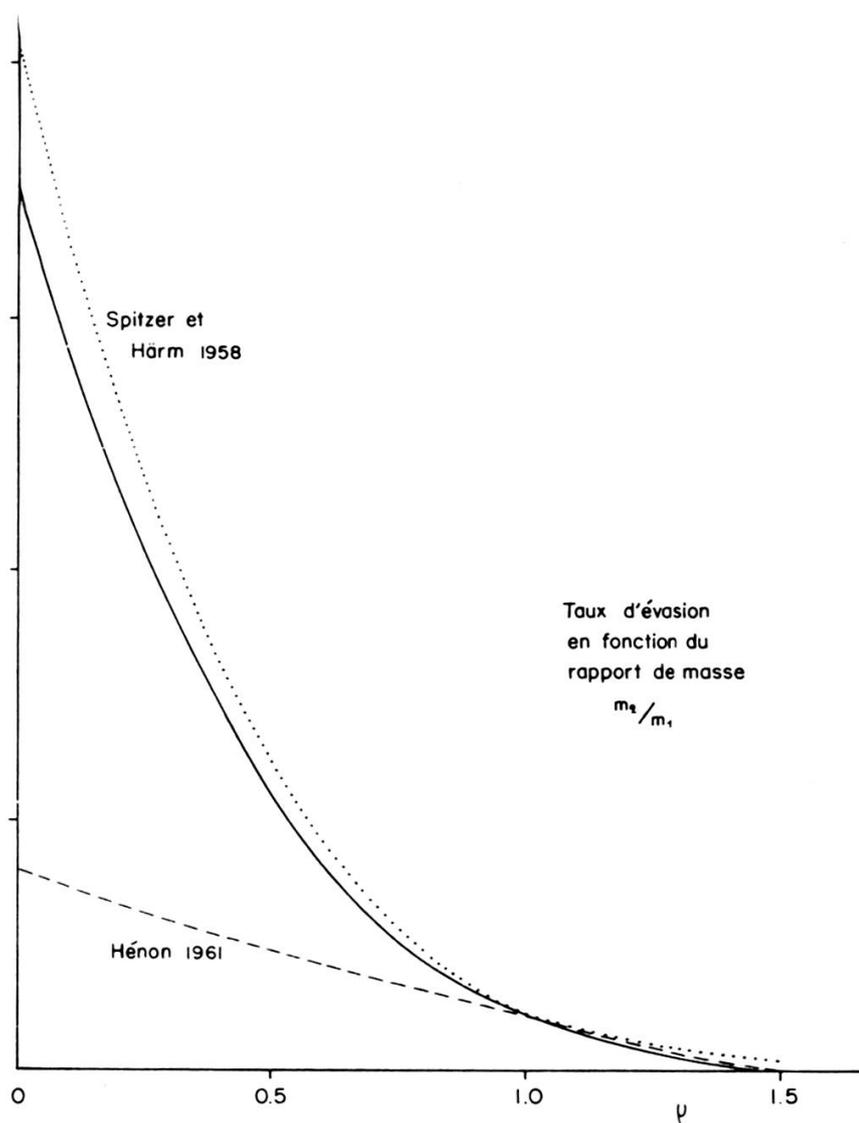


Fig. 1

Cette courbe des  $\lambda_2 = \lambda_2(\mu)$  vient se placer entre des courbes analogues (en pointillé) obtenues, en traitant le problème un peu différem-

ment, d'un côté par Spitzer et Härm [4] et de l'autre par Hénon [1]; elle nous fournit en particulier un taux d'évasion des étoiles de masse nulle environ 15 fois supérieur à celui des masses  $m_1$ .

Lorsque  $\mu$  s'élève à 1.5, le taux d'évasion devient pratiquement nul; d'ailleurs  $\lambda_2(1.5)$  est alors d'un ordre comparable ( $10^{-5}$ ) à celui des erreurs sur les valeurs données pour  $g_1(u)$ .

Les fonctions propres  $g_2(u)$  sont toujours, pour  $u$  variant de 0 à  $u_e$ , des fonctions monotones décroissantes de 1 à 0, la carence des étoiles rapides étant d'autant plus marquée que leur masse est grande (fig. 2). Au voisinage de  $u = 0$ , on a sensiblement

$$g_2(\mu) = e^{-\mu u^2}$$

de sorte que la distribution des vitesses des étoiles lentes est à peu près maxwellienne.

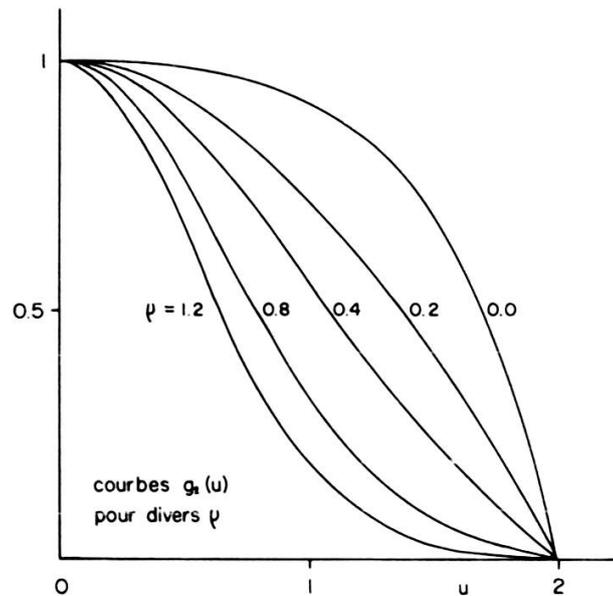


Fig. 2

Comparons les pentes des courbes de la figure 2 pour la valeur critique  $u = u_e$  en intégrant les deux membres de (6) ou (7) sur les vitesses de 0 à  $v_e$ ; nous trouvons

$$\frac{dN_s}{dt} = N'_s = (4\pi)^2 \Gamma_1 \mathcal{B}_{v_e} [f_1] \left( \frac{\partial f_s}{\partial v} \right)_{v=v_e} \quad s = 1, 2$$

soit, en invoquant les transformations (8) et (12),

$$N'_s = (4\pi)^2 \Gamma_1 \frac{h_1 h_s}{a^2} B_{ue}[g_1] \left( \frac{dg_s}{du} \right)_{u=ue}$$

d'où le taux relatif d'évasion des étoiles  $s$

$$\frac{N'_s}{N_s} = 4\pi \Gamma_1 \frac{h_1 B_{ue}[g_1]}{a^5 A_{ue}[g_s]} \left( \frac{dg_s}{du} \right)_{u=ue}$$

Tenant compte de (16) nous obtenons pour le rapport des pentes à  $u = u_e$ ,

$$(17) \quad \frac{(dg_2/du)_{u=ue}}{(dg_1/du)_{u=ue}} = \frac{A_{ue}[g_2] \lambda_2}{A_{ue}[g_1] \lambda_1}$$

égalité dont le second membre est effectivement supérieur à l'unité si  $m_2 < m_1$ , inférieur à un si  $m_2 > m_1$ .

En rapportant les fonctions  $g_2(u) = g(u; \mu)$  aux répartitions gaussiennes correspondantes  $\gamma(u; \mu) = e^{-\mu u^2}$ , nous sommes conduits à une famille de courbes représentant le produit  $g(u; \mu) e^{\mu u^2}$ . Pour toute valeur donnée de  $u$  nous avons,

$$\frac{\partial g}{\partial \mu} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\gamma}{d\mu} < 0$$

de plus, ici

$$\frac{\partial(g/\gamma)}{\partial \mu} < 0$$

comme chez Hénon [1] mais contrairement à Spitzer et Härm [4]. La variation relative  $dg/g$  de  $g$  pour un accroissement  $d\mu$  à  $u$  fixe est inférieure à  $-u^2 d\mu$  (fig. 3).

5. Faisons ici trois remarques:

a) Au cas où la population majoritaire 1 constitue un réservoir invariable en équilibre maxwellien, servant uniquement à échanger de l'énergie par interactions de choc avec les étoiles de la population 2 minoritaire, nous serons amenés à poser  $h_1(t) = c_1$ ,  $c_1$  étant une cons-

tante. Il en résulte, par (9) et (11 a),  $\lambda_1 = 0$  et la relation (14 a) s'intègre immédiatement, si  $\Gamma_1$  est regardé comme constant, en donnant une baisse exponentielle de la concentration des étoiles 2:

$$N_2(t) = N_2(0) e^{-4\pi \Gamma_1 c_1 \lambda_2 t}$$

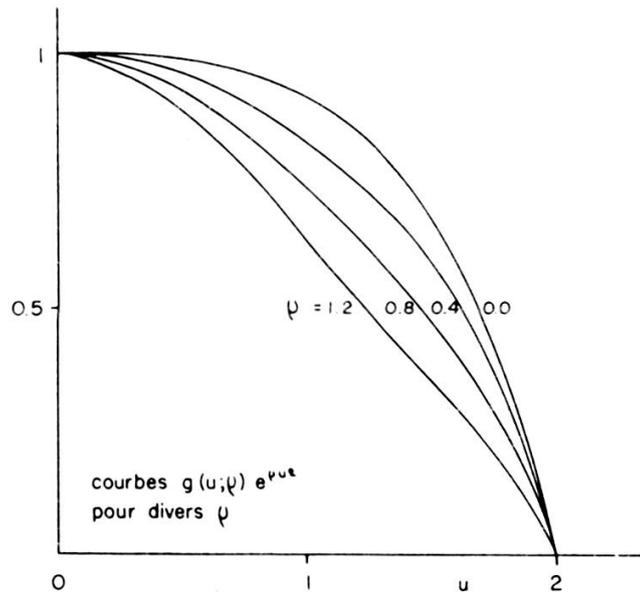


Fig. 3

Comme la distribution  $f_1$  est ici proportionnelle à  $e^{-j^2 v^2}$  où  $j$  est un paramètre constant, nous aurons en conséquence

$$a(t) = \frac{1}{j} \quad g_1(u) = e^{-u^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \varphi'(u)$$

où  $\varphi(u)$  est la fonction des erreurs. On vérifie alors facilement que

$$A_u[g_1] = \frac{\sqrt{\pi}}{4} (\varphi - u\varphi')$$

$$B_u[g_1] = \frac{\sqrt{\pi}}{8} \frac{\varphi - u\varphi'}{u}$$

de sorte que l'équation (15) se réduit à celle dont se sont servis Spitzer et Härm [4], soit

$$(18) \quad \frac{1}{u^2} \frac{d}{du} \left\{ \frac{\varphi - u\varphi'}{u} \left( \frac{dg_2}{du} + 2 \frac{m_2}{m_1} u g_2 \right) \right\} + \lambda_2^* g_2 = 0$$

avec  $\lambda_2^* = \frac{8}{\sqrt{\pi}} \lambda_2 .$

b) Lorsque le rapport  $m_2/m_1$  devient assez élevé, la masse totale  $M_2$  de la population minoritaire n'est plus forcément négligeable et l'on devra tenir compte du terme en  $\xi_2$  de (4), ce qui nous ramène au problème général décrit par les équations (1) et (2). La séparation des variables  $t, u$  n'est plus possible; si nous soumettons en effet le système (1), (2) aux transformations (8) et (12), nous verrons qu'en plus des relations

$$\frac{a'}{a} = q_1 \frac{h_1'}{h_1} \quad \frac{a'}{a} = q_2 \frac{h_2'}{h_2}$$

nous devons nécessairement imposer la condition

$$q_1 = q_2$$

Par suite,

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{h_2 A_{ue}[g_2]}{h_1 A_{ue}[g_1]} = \text{const.}$$

d'où résultent la constance dans le temps des coefficients  $\xi_1, \xi_2$  en (4) et l'égalité des taux d'évasion

$$\frac{N_2'}{N_2} = \frac{N_1'}{N_1}$$

laquelle nous assure que la composition du mélange des deux populations ne change pas. Cette situation est certainement irréaliste mais souligne bien les limites des possibilités des transformations (8) et (12) de type homologique.

c) En intégrant sur les vitesses de 0 à  $v_e$  chacune des équations (1) et (2), nous relierons les taux d'évasion aux pentes des distributions  $f_1, f_2$  pour  $v = v_e$  à tout instant, obtenant notamment

$$\frac{N_2'/N_2}{N_1'/N_1} = \frac{\mathcal{A}_{ve}[f_1] (\partial f_2 / \partial v)_{v=ve}}{\mathcal{A}_{ve}[f_2] (\partial f_1 / \partial v)_{v=ve}}$$

et, avec  $s = 1, 2$ ;  $N = N_1 + N_2$ ,

$$\frac{N'_s/N_s}{N'/N} = \frac{\mathcal{A}_{ve}[f_1 + f_2]}{\mathcal{A}_{ve}[f_s]} \frac{(\partial f_s / \partial v)_{v=ve}}{(\partial (f_1 + f_2) / \partial v)_{v=ve}}$$

relations vraies quelle que soit la proportion du mélange des deux populations.

6. Les considérations vues plus haut permettent d'aborder le problème d'un amas à deux populations dont les masses des étoiles respectives  $m_1, m_2$  diffèrent très peu.

Nous écrivons donc

$$\frac{m_2}{m_1} = 1 - \varepsilon$$

où  $\varepsilon$  est un nombre positif très inférieur à 1, par conséquent,  $\frac{m_1}{m_2} = 1 + \varepsilon$

et d'après (3)  $\Gamma_2 = \Gamma_1 (1 - 2\varepsilon)$  en négligeant les termes en  $\varepsilon^2$ .

Les équations (1) et (2) deviennent alors

$$(19) \quad \frac{\partial f_1}{\partial t} = \frac{4\pi\Gamma_1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \mathcal{A}[f_1 + f_2]f_1 + \mathcal{B}[f_1 + f_2] \frac{\partial f_1}{\partial v} + \varepsilon \mathcal{A}[f_2]f_1 \right\}$$

$$(20) \quad \frac{\partial f_2}{\partial t} = \frac{4\pi\Gamma_1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \mathcal{A}[f_1 + f_2]f_2 + \mathcal{B}[f_1 + f_2] \frac{\partial f_2}{\partial v} - \varepsilon \left( 3\mathcal{A}[f_1]f_2 + 2\mathcal{A}[f_2]f_2 + 2\mathcal{B}[f_1 + f_2] \frac{\partial f_2}{\partial v} \right) \right\}$$

d'où par addition et soustraction

$$(21) \quad \frac{\partial (f_1 + f_2)}{\partial t} = \frac{4\pi\Gamma_1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \mathcal{A}[f_1 + f_2](f_1 + f_2) + \mathcal{B}[f_1 + f_2] \frac{\partial (f_1 + f_2)}{\partial v} + \varepsilon(\dots) \right\}$$

$$(22) \quad \frac{\partial (f_1 - f_2)}{\partial t} = \frac{4\pi\Gamma_1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \mathcal{A}[f_1 + f_2](f_1 - f_2) + \mathcal{B}[f_1 + f_2] \frac{\partial (f_1 - f_2)}{\partial v} + \varepsilon(\dots) \right\}$$

(21) est, au terme en  $\varepsilon$  près de la forme (6); posons donc

$$(23) \quad f_1 + f_2 = f + \varepsilon\varphi$$

où  $f$  satisfait l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{4\pi\Gamma_1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \mathcal{A}[f]f + \mathcal{B}[f] \frac{\partial f}{\partial v} \right\}$$

équivalente à (6) et admettant en particulier (n° 2) une solution du type

$$(24 a) \quad f = h(t)g(u)$$

$$(24 b) \quad v = a(t)u$$

En substituant (23) dans l'une des équations (19, (20), (22) nous obtenons, à des termes en  $\varepsilon$  près, des équations de la forme (7) pour  $f_1, f_2, f_1 - f_2$ . Essayons pour  $f_1 - f_2$  l'expression

$$(25) \quad f_1 - f_2 = \eta(t)\zeta(u) + \varepsilon\psi$$

alors les distributions  $f_s$  auront, à cause de (23), (24 a), (25) la forme

$$h(t)g(u) \pm \eta(t)\zeta(u) + \varepsilon(\varphi \pm \psi)$$

La transformation (25) permet la séparation des variables  $t, u$  dans l'équation (22) sous des conditions déjà rencontrées au n° 3;  $\zeta(u)$  satisfera une équation analogue à (15), à partir d'une valeur  $\zeta(0)$  arbitraire positive tandis que la dépendance temporelle de  $f_1 - f_2$  est donnée par une relation de la forme

$$(26) \quad \eta' = -4\pi\Gamma_1 h\nu\eta$$

où les signes de  $\eta(t)$  et de la constante  $\nu$  ne sont pas déterminés.

Cependant, si la population minoritaire s'évapore plus rapidement que la population majoritaire,  $\eta$  varie de façon monotone et conserve un signe constant si  $\nu < 0$ ; après un temps assez long, la population minoritaire tendra à ne plus constituer qu'une faible fraction des étoiles de l'amas et nous nous retrouverons dans les conditions du n° 2. De toute manière, on se gardera de tirer des conclusions sur l'évolution à partir de (26) puisque l'influence de la structure de l'amas a été négligée dès le début.

7. Revenons à un amas à une seule population de masse totale  $M$ , où la structure est encore définie par un potentiel constant à l'intérieur; si cet amas est soumis à une action extérieure, il faudra tenir compte d'un potentiel extérieur variable avec la distance au centre afin de pouvoir définir la distance moyenne (dite rayon de stabilité  $r_s$  de l'amas), où l'action extérieure l'emporte sur le champ produit par l'amas.\*

Désignons par  $R$  la distance de l'amas au centre galactique et par  $M_g$  la masse totale de la Galaxie; nous savons [5] que le rayon de stabilité est donné en moyenne par

$$(27) \quad r_s = R \left( \frac{M}{2M_p} \right)^{1/3}$$

D'autre part si  $v_e(r)$  est la vitesse d'évasion depuis une distance  $r$  du centre de l'amas jusqu'à l'infini et si  $v_s$  est la vitesse minimum à communiquer à une étoile placée au centre pour qu'elle s'éloigne à une distance  $r_s$ , nous aurons:

$$v_e^2(0) = v_e^2(r_s) + v_s^2$$

où

$$v_e^2(r_s) = 2G \frac{M}{r_s}$$

donc, en invoquant (27),

$$(28) \quad v_e^2(r_s) = K M^{2/3} \quad K, \text{ const.}$$

Cette relation, vraie à un instant  $t_0$  ne le sera généralement plus à un instant ultérieur  $t$  si nous lui appliquons la transformation homologique du type (24 a), (24 b), car tout se passe comme si l'amas était étendu jusqu'au rayon  $r = r_s$  de sorte que le potentiel n'est plus constant partout à l'intérieur.

Toutefois, dans le cas spécial où l'évaporation est négligeable,  $h(t) = h(t_0)$ ,  $a(t) = a(t_0)$  et la relation (28) est invariante par le changement d'échelle  $v = au$ . Cela reste approximativement vrai si l'amas est formé de deux populations dont l'une, soit la population 1, prépondérante et déterminant pratiquement à elle seule la masse totale  $M$ , ne s'évapore pas:  $h_1(t) = \text{const.}$  La distribution des vitesses de la population minoritaire 2 est alors régie par l'équation (18); intro-

\* Dans ce n° 7, l'indice  $s$  se réfère à la stabilité et ne saurait être confondu avec l'indice  $s = 1,2$  rencontré plus haut.

duisant ici la vitesse  $v_s$  au lieu de  $v_e$ , les valeurs propres de (18) qui dépendront des deux paramètres  $m_2/m_1$  et  $R/r_s$  seront déterminées par

$$\text{la condition } g_2(u_s) = 0 \quad \text{où} \quad u_s = \sqrt{6} \left(1 - \frac{R}{r_s}\right)^{1/2}.$$

Ce travail s'inscrit dans un programme subventionné par le Fonds National de la Recherche Scientifique. Je tiens à remercier en outre le Dr S. Koelbig, de la section « Données et Documents » du C.E.R.N., pour son aide efficace dans l'élaboration du programme de calcul sur machine électronique.

Observatoire de Genève, février 1962.

#### BIBLIOGRAPHIE

1. HÉNON, M. *Ann. Astr.*, t. **24**, 369 (1961).
  2. KING, I. *A. J.* **65**, 122 (1960).
  3. ROSENBLUTH, M. N., MACDONALD, W. M., JUDD, D. L. *Phys. Rev.* **107**, 1 (1957).
  4. SPITZER, L., HARM, R., *Ap. J.* **127**, 544 (1958).
  5. VON HOERNER, S. *Z. f. A.* **44** (1958), p. 231.
-

