

**Zeitschrift:** Archives des sciences [1948-1980]  
**Herausgeber:** Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève  
**Band:** 14 (1961)  
**Heft:** 10: Colloque Ampère

**Artikel:** Propriétés statistiques du bruit de fond en résonance magnétique nucléaire  
**Autor:** Bonnet, G.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-739636>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 15.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Propriétés statistiques du bruit de fond en résonance magnétique nucléaire

par G. BONNET

Centre d'Etudes Nucléaires de Grenoble, France

---

## *Zusammenfassung.*

Statistische Verteilungsschwankungen eines Kernspinssystemes erscheinen bei der Detektion der NMR-Effekte, wie eine zusätzliche Geräuschquelle (Hintergrund). Unter Beachtung der mikroskopischen und phänomenologischen Gesichtspunkte, wird diese Erscheinung im allgemeinen Rahmen eines äquivalenten elektrischen Modelles betrachtet. Es gestattet die Bestimmung der spektralen Dichte, das voraussichtliche Vorhandensein einer « Geräuschlinie », deren Einfluss sonst nur in bestimmten Fällen erkennbar sein wird.

## *Résumé.*

Les fluctuations statistiques de répartition des populations d'un ensemble de spins nucléaires apparaissent comme la source d'un bruit de fond, lors de la détection des effets de R.M.N. Ce phénomène, étudié sous l'aspect microscopique et phénoménologique, entre dans le cadre général d'un modèle électrique équivalent. L'étude de la densité spectrale permet de prévoir l'existence d'une « raie de bruit », dont l'influence n'est perceptible que dans des cas bien déterminés.

Pour l'étude du bruit de fond entachant les montages à R.M.N., on se contente habituellement de ne considérer que les fluctuations thermiques localisées dans le réseau électrique de détection [1]. Il semble cependant que, dans certains cas, cette approximation apparaisse comme insuffisante et appelle une analyse plus détaillée des divers processus stochastiques en présence.

## 1. POINT DE VUE MICROSCOPIQUE

Il apparaît en particulier que les actions d'échange entre un très grand nombre de noyaux et le réseau électrique destiné à mettre en évidence les phénomènes de résonance (le détecteur), doivent nécessairement revêtir un aspect statistique. Ceci conduit à envisager des fluctuations, dont la traduction sera une source supplémentaire de bruit de fond apparaissant au niveau du détecteur.

Précisons ce point de vue: nous allons considérer le système formé par l'ensemble de  $N$  noyaux identiques — de spin  $I$  et rapport gyromagnétique  $\gamma$  — contenus dans un échantillon de volume  $\tau$ , et un champ magnétique fixe évanescent, d'intensité  $H$  et de direction  $\vec{u}$  quelconque.

On peut assimiler chaque noyau à un système individuel faiblement couplé aux autres noyaux et au milieu ambiant, de telle façon qu'on puisse parler de son état quantique propre, et l'on sait que l'ensemble des  $N$  spins obéit à une statistique classique maxwellienne [2].

Soit  $X_m$  la variable aléatoire associée à la population peuplant l'état  $|m\rangle$ . On pourra ignorer les conditions de liaison et considérer les  $X_m$  comme indépendants en prenant pour leur distribution une loi asymptotique, de seconde fonction caractéristique

$$\psi_m(v) = \frac{N}{2I+1} \exp \left[ \frac{m\beta H}{IkT_s} \right] \cdot (e^{iv} - 1)$$

qui est celle d'une loi de Poisson [3] ( $T_s$  température des spins,  $\beta = \gamma \hbar I$  moment magnétique).

Il est facile d'en déduire la seconde caractéristique  $\psi(v)$  de la variable aléatoire représentant l'intensité d'aimantation dans la direction  $\vec{u}$ , soit

$$M_u = \frac{1}{\tau} \sum_{m=-I}^{m=+I} \frac{m\beta}{I} X_m$$

ce qui donne:

$$\psi(v) = \frac{N}{2I+1} \sum_{-I}^{+I} \exp \left[ \frac{m\beta H}{IkT_s} \right] \cdot \left[ \exp \left( i \frac{m\beta}{\tau I} v \right) - 1 \right]$$

Cette relation permet de retrouver la valeur moyenne (\*)

$$m_u = E[M_u] = -i \left( \frac{\partial \psi}{\partial v} \right)_0 \equiv \mu_0 \chi_0 H$$

qui définit classiquement la susceptibilité statique  $\chi_0$  de Langevin. Elle fournit pour la variance

$$E[(M_u - m_u)^2] = - \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} \right)_0 = \frac{N\beta^2}{\tau^2 I^2 (2I+1)} \sum_{-I}^{+I} \exp \left[ \frac{m\beta H}{IkT_s} \right]$$

laquelle, pour  $H \rightarrow 0$ , a ainsi pour limite ( $m_u \rightarrow 0$ ):

\*  $E[X]$  signifie « espérance mathématique de la variable aléatoire  $X$  », et  $\mu_0$  est la perméabilité du vide.

$$E [M_u^2] = \frac{1}{\tau^2} \frac{N\beta^2 (I+1)}{3I} \equiv \frac{1}{\tau} \mu_0 \chi_0 kT_s \quad (1)$$

Or, l'observation s'effectue par l'intermédiaire du réseau détecteur, ce qui introduit une direction de quantification suivant son axe. Par suite les résultats précédents sont valables pour la projection de l'aimantation sur cet axe et en champ nul. Et comme les opérateurs liés aux projections sur deux axes différents ne commutent pas, ces relations subsistent en cas d'application d'un champ permanent perturbateur dans une direction différente de  $\vec{u}$ .

Pour compléter l'étude des fluctuations, il resterait à introduire la variable temporelle, par l'intermédiaire des durées de vie, ce qui nécessiterait de détailler les processus de relaxation.

Il faudrait, d'autre part, envisager l'interaction entre le rayonnement issu du détecteur et l'ensemble des spins. Il s'avère alors préférable, pour la commodité des raisonnements, de poursuivre selon le point de vue macroscopique.

## 2. POINT DE VUE MACROSCOPIQUE

Dans la représentation phénoménologique de F. Bloch, on aura à considérer les fluctuations de position et de norme du vecteur intensité d'aimantation  $\vec{M}$  représenté par ses trois composantes  $m^k$ , en présence d'un champ permanent dirigé suivant l'axe  $\vec{e}_3$ . Nous commencerons par négliger l'influence du rayonnement cohérent.

Si l'on tient compte du comportement gyroscopique de  $\vec{M}$ , il apparaît que la covariance croisée  $E[m^1(t) \cdot m^2(t+\theta)]$  des composantes transverses  $m^1$  et  $m^2$  possède au moins un maximum pour  $\theta$  voisin de  $\frac{\pi}{2\omega_0}$ , avec  $\omega_0 = \gamma H_0$ . Celles-ci ne sont donc pas indépendantes et on attribuera au système une énergie de fluctuation égale à  $kT_s$  seulement.

En coordonnées polaires ( $M, \varphi$ ) — avec  $M^2 = \text{nor } \vec{M} = \delta_{jk} m^j m^k$  et  $\cos \varphi = \frac{m^3}{M}$  — l'énergie potentielle de l'échantillon de volume  $\tau$  dans le champ  $H_0 \vec{e}_3$  s'écrit, si  $x$  est la variable centrée ( $x = M - E[M] = M - M_0$ ):

$$W = - [M_0 + x] H_0 \cos \varphi \cdot \tau$$

En utilisant un développement limité au second ordre par rapport à  $x$  et  $\varphi$ , il est facile de déterminer l'énergie moyenne de fluctuation

$$E[W + M_0 H_0 \tau] = -\tau H_0 E[x] + \frac{1}{2} \tau H_0 M_0 E[\varphi^2] + \dots \equiv kT_s$$

d'où:

$$E[\varphi^2] = \frac{2kT_s}{\tau M_0 H_0} \quad (2)$$

Or, on sait que, dans un repère tournant à la vitesse angulaire  $\omega_0$ , les processus de relaxation spin-spin assurent une décroissance exponentielle de la composante transversale de l'aimantation, avec une constante de temps  $T_2$ . Il est alors facile d'en déduire la moyenne temporelle de la covariance de la composante  $m^1$  dans le repère fixe, soit en limitant au second ordre:

$$\overline{E[m^1(t) m^1(t+\theta)]} = \frac{kT_s}{\tau} \mu_0 \chi_0 \cdot e^{-\frac{|\theta|}{T_2}} \cos \omega_0 \theta \quad (3)$$

avec toujours  $\chi_0 = \frac{M_0}{\mu_0 H_0}$ , résultat qui complète la relation (1).

### 3. BRUIT DE FOND

La connaissance de la fonction de corrélation des fluctuations de l'aimantation projetée suivant l'axe  $\vec{e}_1$  de la bobine détectrice permettrait, de façon formelle, de calculer la f.é.m. d'induction qui en découle et la tension de bruit qui apparaît aux bornes du détecteur. Il faudrait superposer cette dernière au bruit d'agitation thermique dans le circuit, sans oublier de tenir compte de la réaction du détecteur sur les spins, ce qui est assez complexe.

On obtiendra une représentation plus claire en utilisant le formalisme unique d'un modèle électrique, équivalent aux effets de R.M.N. dans tous les cas de non-saturation et que nous avons proposé antérieurement [4].

Ce modèle a la forme d'un réseau à deux mailles (fig. 1): la première est celle-là même qui constitue le réseau détecteur, la seconde représente l'ensemble des spins en présence du champ permanent et comporte: une inductance  $L_2$  égale à celle,  $L_1$ , de la bobine détectrice, une résistance

$$R_2 = \frac{2L_2}{T_2} \text{ et une capacité telle que sa pulsation propre soit égale à } \omega_0 =$$

$\gamma H_0$ . La surtension de cette maille vaut donc  $Q_2 = 1/2 \omega_0 T_2$ . L'interaction spin-circuit est représentée par une inductance mutuelle, correspondant à un coefficient de couplage

$$z = \sqrt{4\pi\eta\chi_0}$$

et la relation de correspondance entre  $i_2$ , courant de la maille de spins, et  $m^1$ , aimantation projetée, est

$$i_2 = \frac{m^1}{\mu_0 K} \sqrt{\frac{4\pi\eta}{\chi_0}} \quad (4)$$

( $\eta$  coefficient de remplissage,  $K$  constante de champ de la bobine détectrice).

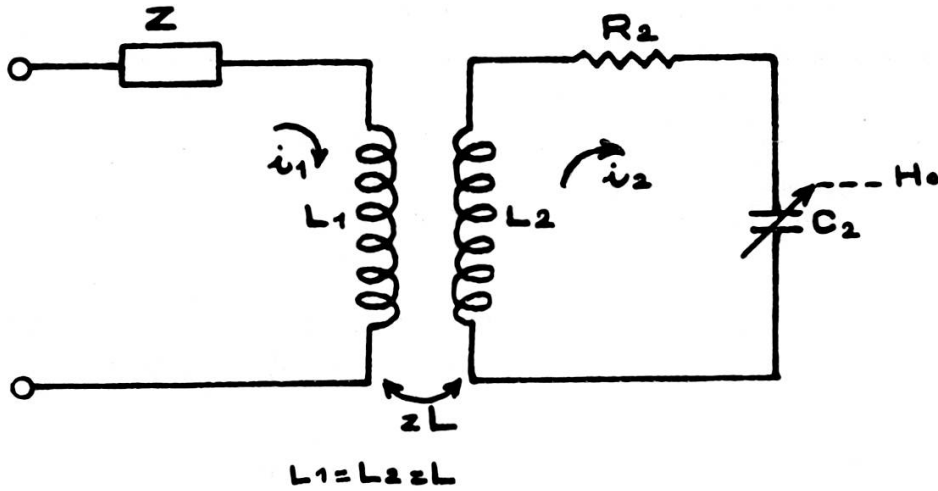


Fig. 1.

Modèle équivalent. Cas général.

Or, on peut constater que ce modèle est apte à traduire quantitativement non seulement les effets cohérents de résonance nucléaire, mais également les effets de fluctuations que nous venons d'étudier. C'est d'ailleurs une conséquence des lois tout à fait générales de la Mécanique Statistique (cf. Kennely), selon lesquelles un modèle électrique pourra représenter les phénomènes de fluctuations si l'on associe à chacune des résistances  $R_j$  qu'il contient, portée à la température  $T_j$ , une f.é.m. aléatoire dont la densité spectrale est donnée par la relation de Nyquist:  $\gamma(\omega) = \frac{kT_j}{\pi} R_j$  (pour une distribution de l'énergie sur l'axe des pulsations entre  $-\infty$  et  $+\infty$ ).

Si l'on applique cette relation à la résistance  $R_2$  de la maille de spins en la considérant provisoirement comme isolée, c'est-à-dire en utilisant un circuit détecteur ouvert, pour lequel la condition  $i_1 = 0$  conduit à un rayonnement nul, on obtiendra

$$E[(i_2)^2] = \frac{kT_s}{L_2}, \text{ d'où selon (4): } E[(m^1)^2] = \frac{\mu_0^2 K^2}{4\pi\eta L} kT_s \chi_0$$

et comme la géométrie du montage fait que  $\frac{\mu_0^2 K^2}{4\pi\eta L} = \frac{\mu_0}{\tau}$ , on retrouve bien la relation (1) qui aurait pu être ainsi obtenue directement, mais au détriment de la connaissance de la nature physique des causes de fluctuations. Il serait tout aussi aisé de retrouver la fonction de corrélation (3).

Il suffit maintenant, cette vérification faite, d'utiliser les méthodes de calcul habituelles aux réseaux électriques.

On pourra traiter facilement, dans ce formalisme, les interactions spin-réseau par rayonnement cohérent et, comme le modèle équivalent n'est soumis à aucune restriction concernant la nature active ou passive du détecteur, ou sa complexité, le calcul des bruits pourra s'appliquer à tous les cas d'espèce: spectrographie hertzienne d'absorption, régimes transitoires de précession libre, oscillateurs nucléaires, etc. [5].

Nous ne retiendrons ici, à titre d'exemple, que le cas simple d'un détecteur passif ayant une pulsation propre  $\omega_0$  voisine de celle de Larmor et une surtension  $Q_1$  (fig. 2).

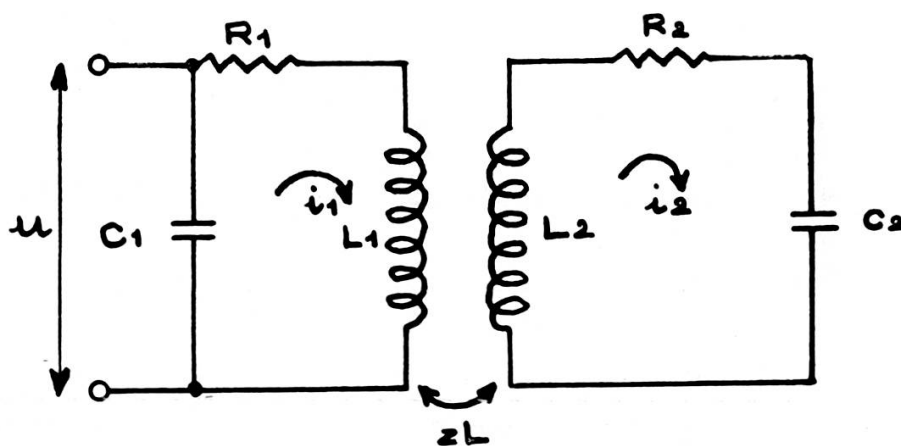


Fig. 2.

Modèle équivalent d'un détecteur passif simple.

En utilisant le concept de « surtension critique »

$$Q_* = [4\pi\eta |\gamma M_0 | T_2]^{-1}$$

qui correspond au couplage critique entre les deux mailles,  $z^2 Q_* Q_2 = 1$ , on obtient pour la fonction de corrélation de la tension de bruit aux bornes de la capacité d'accord  $C_1$  \*

\*  $T$  est ici la température du détecteur. La notion de température de spins est contenue implicitement dans  $Q_*$ .

$$E[u(t)u(t+\theta)] = \frac{kT}{C_1} \left[ e^{-\frac{\omega_0}{2Q_1}|\theta|} \cos \omega_1 \theta + \frac{Q_1^2}{\frac{1}{2} \omega_0 T_2 Q_*} \frac{1}{1 + \left[ 2Q_1 \frac{\omega_0 - \omega_1}{\omega_1} \right]^2} e^{-\frac{|\theta|}{T_2}} \cos \omega_0 \theta \right]$$

Elle comprend deux composantes: la première est celle que fournirait le circuit détecteur isolé, la seconde représente la contribution des spins, et l'on voit que sa mémoire statistique est considérable devant celle du circuit électrique  $\left( T_2 \gg \frac{2Q_1}{\omega_0} \right)$ .

Lorsque l'on considère la densité spectrale d'énergie de cette tension de bruit

$$\gamma(\omega) = \frac{kT}{\pi} Q_1 L_1 \omega_1 \frac{1}{1 + \left[ \frac{2Q_1}{\omega_1} (|\omega| - \omega_1) \right]^2} \left\{ 1 + \frac{Q_1}{Q_*} \frac{1}{1 + [T_2(|\omega| - \omega_0)]^2} \right\}$$

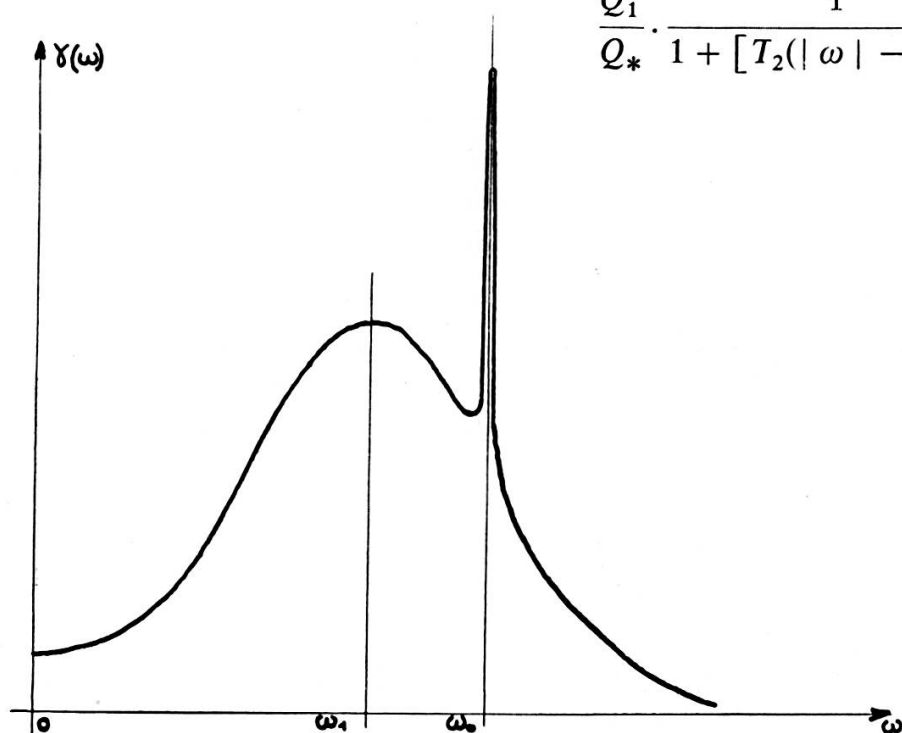


Fig. 3.  
Densité spectrale et raie de bruit.



on constate que l'influence du système de spins se traduit par un facteur qui ne diffère de l'unité que dans une bande spectrale très étroite, de largeur  $\sim 2/T_2$  autour de la fréquence de Larmor: il y a une « raie de bruit » tout à fait comparable à la raie d'absorption qui apparaît en spectrographie hertzienne.

#### 4. CONCLUSIONS

La comparaison des puissances de bruit fournies par le réseau détecteur,

$W_e = \frac{\omega_1}{Q_1} kT$  et par le système de spins

$$W_s = \frac{2}{T_2} kT \frac{Q_1}{Q_*} \frac{1}{1 + \left[ 2Q_1 \frac{\omega_0 - \omega_1}{\omega_1} \right]^2} \approx \frac{2}{T_2} kT \frac{Q_1}{Q_*}$$

montre que la contribution de ce dernier au bruit *global* est négligeable dans tous les cas, le rapport  $W_s/W_e$  étant de l'ordre de  $10^{-2}$ . Par suite, si les effets de R.M.N. sont observés à travers un filtre de bande passante très large devant  $1/T_2$ , le supplément de bruit dû à l'influence des spins sera tout à fait négligeable et il sera justifié de n'en pas tenir compte.

Au contraire, si le filtre est très sélectif et centré sur  $\omega_0$ , l'énergie de bruit fournie par les spins dans sa bande passante sera dans le rapport  $Q_1/Q_*$  avec la contribution du détecteur. Elle risque ainsi de devenir comparable à cette dernière, dans le cas où un procédé adéquat aura polarisé les noyaux avec un taux suffisant pour que  $Q_*$  soit de l'ordre de  $Q_1$  (champs élevés, polarisation dynamique, prépolarisation, etc.).

L'auteur tient à exprimer sa gratitude au professeur Soutif pour ses encouragements et ses conseils. Il est redevable envers les professeurs Blanc-Lapierre et Ayant de nombreuses suggestions et les en remercie vivement.

#### BIBLIOGRAPHIE

1. BLOEMBERGEN, N., E. M. PURCELL and R. V. POUND, *Phys. Rev.*, **73**, 679 (1948).
2. ABRAGAM, A. *The Principles of Nuclear Magnetism*, Clarendon, Oxford (1961).
3. BLANC-LAPIERRE, A., P. CASAL et A. TORTRAT. *Méthodes Mathématiques de la Mécanique Statistique*. Masson, Paris (1959).
4. BONNET, G., *J. Phys. Radium*, **22**, 204 (1961).
5. BONNET, G., Thèse, Grenoble (1961).