

# Aires et théorème de Pythagore en géométrie affine

Autor(en): **Rossier, P.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Archives des sciences [1948-1980]**

Band (Jahr): **16 (1963)**

Heft 1

PDF erstellt am: **23.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-739335>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# AIRES ET THÉORÈME DE PYTHAGORE EN GÉOMÉTRIE AFFINE

PAR

**P. ROSSIER**

---

## § 1. *Introduction*

Dans les ouvrages de géométrie, la théorie des aires planes est généralement traitée du point de vue métrique. Par exemple, on prouve que dans un triangle, le produit d'un côté par la hauteur correspondante est indépendant du choix du côté et on construit la notion d'aire sur cette propriété. Plus tard, dans l'étude de l'affinité, on énonce le théorème suivant: les rapports d'aires sont conservés par l'affinité. Or la géométrie affine a pour objet l'étude des propriétés invariantes dans cette transformation, de la précédente en particulier. Il est donc judicieux d'élaborer une théorie des aires qui ne fait appel qu'aux axiomes de la géométrie affine à l'exclusion des propriétés métriques, de la similitude notamment.

Dans les traités classiques, on trouve souvent un chapitre intitulé « comparaison des aires » de caractère affiné et cela naturellement sans le dire puisque la distinction entre les deux géométries n'y est pas faite.

L'application du théorème de la conservation des rapports d'aires dans l'affinité conduit à diverses généralisations de quelques théorèmes classiques. Nous nous proposons de retrouver ces énoncés en nous appuyant exclusivement sur les méthodes de la géométrie affine. Nous considérons celle-ci comme une géométrie projective plane dans laquelle a été distinguée la droite impropre du plan, lieu des intersections de droites parallèles.

L'extension à la géométrie affine du théorème de Pythagore nous conduira à un énoncé de celui-ci indépendant de la notion d'aire et à quelques remarques sur la nature de cette proposition.

Rappelons sommairement les principales notions de la géométrie affine dont nous ferons usage. Le tracé de parallèles est possible; deux figures liées par une translation sont affinement congruentes; la notion de rapport de deux segments portés par des droites parallèles ou confondues a un sens et le théorème dit de Thalès est valable: si deux droites concourantes sont coupées par deux parallèles, les rapports des paires de segments ainsi déterminés sur ces droites sont égaux et ce rapport

est égal à celui des segments portés par les deux parallèles. Les coordonnées dites obliques sont souvent d'un usage commode.

Terminons par une remarque de terminologie. Souvent on appelle relation d'équivalence une relation réflexive, symétrique et transitive alors que les géomètres appellent équivalence des figures l'égalité de leurs aires. Cette équivalence géométrique est une relation d'équivalence logique, d'où possibilité de truismes apparents. Dans la suite le mot équivalent sera pris dans le sens classique en géométrie.

## PREMIÈRE PARTIE

### THÉORIE AFFINE DES AIRES PLANES

#### § 2. *Axiomes des aires et premières propriétés*

A toute portion finie de plan est attachée une notion, l'aire, caractérisée par les propriétés suivantes.

Deux aires peuvent être égales. L'égalité des aires est réflexive ( $A = A$ ), symétrique ( $A = B$  implique  $B = A$ ) et transitive ( $A = B$  et  $B = C$  impliquent  $A = C$ ).

Deux figures affinement congruentes ont même aire.

Le partage d'une figure possédant une aire en deux parties par une sécante rectiligne ou curviligne conduit à deux figures possédant des aires telles que la somme des aires des figures partielles est égale à l'aire de la figure totale.

Notre propos n'est pas de discuter l'indépendance ou la compatibilité de ces axiomes mais bien d'en tirer quelques applications.

Additionnons les aires de  $p$  figures affinement congruentes juxtaposées par des segments communs de leurs contours. L'aire de la figure totale est égale à  $p$  fois celle d'une des figures composantes. Si deux figures sont décomposées comme ci-dessus l'une en  $p$  figures, l'autre en  $q$  figures et si ces figures partielles sont congruentes entre elles, le rapport des aires des deux figures primitives est  $\frac{p}{q}$ . Ce

rapport est conservé si l'une des figures subit une transformation conservant les aires. Admettons en outre un axiome de continuité étendant cette notion de rapport des aires au cas d'incommensurabilité, par intervention d'une suite appropriée d'approximations convergentes. Ainsi est acquise la notion de rapport de deux aires. Les constructions de cette nature sont si fréquentes qu'il est inutile d'insister.

#### § 3. *Aires des parallélogrammes*

Soient  $ABCD$  et  $ABC'D'$  deux parallélogrammes ayant un côté commun  $AB$  et dont les côtés  $AD$  et  $AD'$  sont portés par la même droite. Supposons l'existence

d'une partie aliquote  $AE$  de  $AD$  et  $AD'$  telle que  $AD = p \cdot AE$  et  $AD' = q \cdot AE$ . Graduons la droite  $AD$  à partir de  $A$  en choisissant  $AE$  comme unité et menons par les points de division les parallèles à  $AB$ . Les deux parallélogrammes donnés sont décomposés en  $p$  et  $q$  parallélogrammes congruents et le rapport des aires des deux parallélogrammes est  $\frac{p}{q}$ . Un passage à la limite approprié permet de passer au cas où les côtés considérés sont incommensurables.

Soient deux parallélogrammes ayant leurs côtés respectivement parallèles. Deux applications du théorème précédent montrent que le rapport des aires de deux parallélogrammes ayant leurs côtés homologues parallèles est égal au produit des rapports de leurs côtés; en particulier, le rapport des aires de deux parallélogrammes homothétiques est égal au carré de leur rapport d'homothétie.

Soient  $ABCD$  et  $AB'C'D'$  deux parallélogrammes ayant un sommet commun  $A$  ainsi que les supports des deux côtés passant par  $A$ ; supposons parallèles les droites  $B'D$  et  $BD'$ . Le théorème de Thalès donne  $\frac{AB}{AB'} = \frac{AD'}{AD}$ . Ces deux parallélogrammes ont donc même aire.

Ce théorème conduit à celui appelé du gnomon par les Anciens: dans un parallélogramme  $ABCD$ , soit  $E$  un point de la diagonale  $AC$ . Les parallèles par  $E$  aux côtés du parallélogramme donné déterminent deux parallélogrammes  $BFEG$  et  $DF'EG'$  ne contenant pas la diagonale  $AC$ ; ces deux parallélogrammes sont équivalents car le rapport de leurs aires est égal au produit des rapports de leurs côtés parallèles et le théorème de Thalès montre que ces deux rapports sont inverses.

Soient  $ABCD$  et  $ABC'D'$  deux parallélogrammes ayant un côté commun  $AB$  et dont les côtés  $CD$  et  $C'D'$  sont portés par la même droite. Supposons l'existence du trapèze  $ABC'D'$  commun aux deux parallélogrammes (ou du triangle  $ABC$  si  $C$  et  $D'$  sont confondus). Les deux triangles  $ADD'$  et  $BCC'$  sont congruents. Les deux parallélogrammes ont donc même aire. Le cas où les deux segments  $CD$  et  $C'D'$  sont sans point commun se traite de même par soustraction de triangles congruents.

Sur les côtés  $AB$  et  $AC$  d'un triangle construisons deux parallélogrammes quelconques  $ABDE$  et  $ACFG$ . Soit  $H$  l'intersection des droites  $DE$  et  $FG$  respectivement parallèles à  $AB$  et  $AC$ . Sur  $BC$ , construisons le parallélogramme  $BCJK$  dont les côtés  $BK$  et  $CJ$  sont parallèles et équipollents (donc congruents) à  $AH$ ; l'aire de ce parallélogramme est égale à la somme des aires des deux premiers. Pour le voir, il suffit de faire glisser le côté  $DE$  du parallélogramme  $ABDE$  sur lui-même de façon à amener  $E$  en  $H$  puis d'amener  $A$  sur  $BC$  par un glissement de  $AH$  sur lui-même. En opérant de même sur le parallélogramme  $ACFG$ , on construit deux parallélogrammes adjacents tels que la somme de leurs aires est celle du parallélogramme  $BCJK$ . Ce théorème est dû à Pappus.

#### §4. Conservation des aires par symétrie, aire du triangle

Soient un arc de courbe, un axe et une direction de symétrie. Construisons l'arc symétrique de l'arc donné et soient  $A$  et  $A'$  deux points correspondants dans cette construction. Par  $A$  et  $A'$ , menons deux parallèles à l'axe et traçons une droite voisine de  $AA'$  parallèle à la direction de symétrie. Nous déterminons ainsi deux parallélogrammes congruents ayant un côté commun sur l'axe de symétrie. Par un passage à la limite approprié, on est conduit à l'égalité des aires limitées par les deux courbes symétriques, l'axe et deux droites parallèles à la direction de symétrie. On étend la propriété aux figures symétriques par décomposition en figures adjacentes sur l'axe.

Une diagonale d'un parallélogramme partage celui-ci en deux triangles symétriques donc équivalents. Donc l'aire d'un triangle est égale à la moitié de celle du parallélogramme construit sur deux quelconques de ses côtés.

L'aire d'un triangle ne varie pas si un de ses sommets subit une translation parallèle au côté opposé. Sur ce théorème repose la transformation d'un polygone en un polygone équivalent ayant un côtés de moins que le polygone donné, par translation d'un sommet parallèlement à la diagonale passant par les deux sommets adjacents à celui qui est déplacé et enfin celle d'un polygone en un triangle équivalent.

On démontre souvent le théorème du gnomon (§ 3) en se basant sur la décomposition du parallélogramme en deux triangles équivalents au moyen d'une diagonale et en soustrayant des deux triangles ainsi construits deux triangles respectivement équivalents. La démonstration donnée plus haut ne fait pas appel à l'équivalence par symétrie.

Par un point intérieur à un triangle, menons des parallèles aux côtés; le triangle est partagé en trois parallélogrammes et trois triangles opposés deux à deux. Le produit des trois rapports de l'aire d'un de ces parallélogrammes à celle du triangle opposé est égal à 8. Pour démontrer cette proposition, choisissons un des sommets du triangle comme origine d'un système de coordonnées dont les axes sont les côtés passant par lui; prenons les sommets comme points unités sur ces axes. Soient  $x$  et  $y$  les coordonnées du point choisi. La parallèle au troisième côté passant par ce point coupe les axes aux points d'abscisses  $x + y$ . De là, on tire les valeurs suivantes des rapports des aires:

$2xy : (1 - x - y)^2$ ,  $2x(1 - x - y) : y^2$  et  $2y(1 - x - y) : x^2$ . Leur produit est bien 8.

Dans les ouvrages de géométrie élémentaire où l'on traite ce problème, la distinction n'est pas faite entre l'aire et le nombre qui la mesure, relativement à une certaine unité. Cela permet de parler du produit de deux aires, en réalité du produit des nombres qui mesurent ces aires; alors le théorème peut être énoncé comme suit: le rapport du produit des aires des parallélogrammes à celui des aires des triangles est égal à 8.

Soit  $O$  un point intérieur à un triangle  $ABC$  et  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  les intersections de chaque côté avec les droites  $OA$ ,  $OB$  et  $OC$ . La somme des rapports  $\frac{OA'}{AA'}$ ,  $\frac{OB'}{BB'}$  et  $\frac{OC'}{CC'}$  est l'unité car ces rapports sont ceux des aires des triangles  $OBC$ ,  $OAC$  et  $OAB$  à celle du triangle total et la somme des aires des triangles partiels est l'aire du grand triangle. Par un choix approprié de signes, le théorème peut être étendu au cas où  $O$  est extérieur au triangle.

### § 5. Conservation des rapports d'aires par affinité

Soient deux parallélogrammes de côtés respectivement parallèles; le rapport de leurs aires est égal au produit des rapports de leurs côtés parallèles. Transformons la figure par une affinité; les rapports des segments parallèles sont conservés, donc aussi le rapport des aires des deux parallélogrammes. La propriété s'étend aux autres figures par décomposition appropriée en parallélogrammes. Donc l'affinité conserve les rapports d'aires.

Dans une affinité homolocale, il existe toujours au moins un point uni propre et deux impropres, réels ou imaginaires. Le faisceau de droites ayant le point uni propre comme sommet a deux rayons unis; si ces rayons sont réels, il est possible de construire sur les deux figures correspondantes des parallélogrammes correspondants ayant leurs côtés homologues parallèles. Dans ce cas, il est possible de déterminer le rapport des aires de deux figures correspondantes dans une affinité.

L'homothétie, l'affinité perspective et la symétrie sont deux cas particuliers de l'affinité précédente. Les rapports de deux aires correspondantes sont alors le carré du rapport d'homothétie, le rapport d'affinité ou l'unité.

### § 6. Rappel de quelques propriétés des coniques à centre

Dans une conique à centre, on appelle cordes supplémentaires deux cordes issues d'un point de la courbe et qui coupent celle-ci aux extrémités d'un diamètre. Les directions de deux cordes supplémentaires sont conjuguées par rapport à la conique et réciproquement, deux cordes se coupant sur la conique et dont les directions sont conjuguées par rapport à celle-ci coupent la courbe aux extrémités d'un diamètre.

Rapportée à un système d'axes porté par deux diamètres conjugués (donc ayant le centre de la courbe comme origine), l'équation d'une conique ne comporte que deux termes carrés et un terme invariable. Pour le voir, il suffit, dans l'équation générale d'une conique en coordonnées projectives de vérifier que l'équation est satisfaite si l'on change le signe d'une quelconque des coordonnées d'un point de la courbe.

Si l'on choisit comme points-unités sur les deux axes l'une des intersections avec la courbe, l'équation devient  $x^2 + y^2 = 1$  dans le cas des ellipses et  $x^2 - y^2 = 1$  dans celui des hyperboles; l'équation de l'hyperbole conjuguée est  $-x^2 + y^2 = 1$ .

Par un point d'une ellipse, menons deux cordes supplémentaires; l'équation de la courbe montre que la somme des carrés des rapports des longueurs de ces cordes à celles des diamètres qui leur sont parallèles est l'unité. Dans le cas des hyperboles, c'est la différence de ces carrés qui est égale à l'unité; le terme positif est celui relatif au diamètre qui coupe la courbe en des points réels et l'autre concerne un diamètre de l'hyperbole conjuguée.

### § 7. Aire d'une ellipse

Pour alléger le langage, appelons parallélogramme régulièrement circonscrit à une ellipse tout parallélogramme dont les côtés sont tangents à l'ellipse et dont deux côtés adjacents ont des directions conjuguées par rapport à l'ellipse.<sup>1</sup>

Toute ellipse et un de ses parallélogrammes régulièrement circonscrits sont symétriques par rapport à un diamètre de l'ellipse parallèle à un côté du parallélogramme. Donc les diamètres d'une ellipse partagent celle-ci en deux figures équivalentes et l'aire de la portion d'ellipse comprise entre deux demi-diamètres conjugués est égale au quart de celle de l'ellipse entière. Dans la figure précédente, les triangles curvilignes ayant comme côtés deux demi-côtés du parallélogramme circonscrit et l'arc d'ellipse compris entre eux sont équivalents.

Soient deux ellipses et deux parallélogrammes qui leur sont régulièrement circonscrits. Trois de leurs paires de sommets homologues établissent une affinité dans le plan. Dans cette collinéation, les quatrièmes sommets des parallélogrammes, les milieux des côtés des parallélogrammes, ces côtés se correspondent, donc aussi les deux ellipses. Le rapport de l'aire d'une ellipse à son parallélogramme circonscrit est le même sur les deux figures. En particulier, choisissons deux parallélogrammes régulièrement circonscrits à la même ellipse; le rapport de l'aire d'une ellipse à l'un de ses parallélogrammes régulièrement circonscrits est constant et tous les parallélogrammes régulièrement circonscrits à une ellipse ont même aire.

Dans une ellipse, découpons des bandes infiniment étroites à bords parallèles. Rapportons l'ellipse à une paire de diamètres conjugués dont l'un est parallèle à la direction de ces bandes; employons la représentation paramétrique  $x = a \cos \varphi$ ,  $y = b \sin \varphi$ . L'aire d'une de ces bandes de largeur  $dx$  est  $2 b \sin \varphi dx = 2 ab \sin^2 \varphi d\varphi$ . Une intégration montre que l'aire de l'ellipse est proportionnelle à  $\pi ab$  alors que celle d'un parallélogramme régulièrement circonscrit est  $4 ab$ . Le rapport de l'aire d'une ellipse à celle d'un parallélogramme régulièrement circonscrit est  $\frac{\pi}{4}$ .

<sup>1</sup> En géométrie métrique, les parallélogrammes régulièrement circonscrits à un cercle sont des carrés.

Soit donné un système d'axes et leurs unités. Menons l'ellipse d'équation  $x^2 + y^2 = 1$ , l'ellipse unité. Choisissons un nouveau système d'axes dont les directions sont conjuguées par rapport à l'ellipse unité et sur eux, prenons comme points unités deux des intersections des nouveaux axes avec l'ellipse. Les aires d'une même figure déterminées en prenant comme unité d'aire un parallélogramme de côtés parallèles aux axes et de côtés unités seront égales dans les deux systèmes. Ainsi il est judicieux de choisir comme unité d'aire le quart de l'aire de tout parallélogramme régulièrement circonscrit à l'ellipse unité.

### § 8. Applications

#### a) Lunule elliptique d'Hippocrate <sup>1</sup>

Soient une ellipse de centre  $O$  et un de ses parallélogrammes régulièrement circonscrits dont deux côtés adjacents sont tangents à la courbe en  $A$  et  $B$ . Choisissons les deux demi-diamètres  $OA$  et  $OB$  comme unités; l'équation de l'ellipse est  $x^2 + y^2 = 1$ . Une diagonale du parallélogramme passe par le point de coordonnées  $x = 1, y = 1$ ; son équation est  $x = y$ . Les coordonnées de l'une de ses intersections avec l'ellipse sont  $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Le parallélogramme circonscrit et celui ayant pour sommets les intersections des diagonales avec l'ellipse sont homothétiques; le rapport d'homothétie est  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Dans le parallélogramme inscrit, inscrivons l'ellipse homothétique à la première et inscrivons-lui le parallélogramme analogue au second. Appelons  $C$  et  $D$  les intersections de la petite ellipse avec la diagonale parallèle à  $AB$ . Le troisième parallélogramme est homothétique au premier et le rapport d'homothétie est  $\frac{1}{2}$ . Ce parallélogramme est congruent à celui porté par les axes et deux côtés du premier, dont  $AB$  est une diagonale. Faisons subir au troisième parallélogramme la translation qui conduit  $C$  en  $A$  donc  $D$  en  $B$  et un de ses sommets en un sommet  $E$  du premier parallélogramme, opposé au centre  $O$ . Le quart  $AFB$  de l'ellipse primitive et la demi-ellipse  $AEB$  constituent une lunule elliptique d'Hippocrate  $AFBE$ . L'aire de la demi-ellipse  $AEB$  est égale à celle du quart de l'ellipse primitive  $OAFB$  et les deux triangles  $OAB$  et  $ABE$  sont équivalents; l'aire du segment elliptique  $AEB$  est donc égale à la somme des aires des deux segments limités par  $AE$  et  $BE$ . Ajoutons et soustrayons ces aires égales de celle du triangle  $ABE$ : l'aire de la lunule elliptique est égale à celle du triangle  $AEB$ .

<sup>1</sup> Hippocrate a étudié la lunule limitée par un quart de cercle et le demi-cercle ayant comme diamètre la corde de ce quart de cercle et il a montré que l'aire de la lunule est égale à la moitié de celle du carré attaché au quart de cercle. Les lunules liées au triangle rectangle souvent appelées « d'Hippocrate » n'ont pas été examinées par lui.



b) *Salinon d'Archimède*

Partageons un segment  $AB$  en trois segments partiels  $AC$ ,  $CD$  et  $DB$ , le premier et le troisième étant congruents entre eux:  $AC = BD = p$ ,  $CD = q$ . Le milieu  $M$  de  $AB$  est aussi celui de  $CD$ . Traçons une ellipse ayant  $AB$  comme diamètre et soit  $EF$  son diamètre conjugué à  $AB$ . Menons encore trois demi-ellipses ayant respectivement  $AC$ ,  $CD$  et  $DB$  comme diamètres et homothétiques, les deux extrêmes à  $AEB$ , la médiane à  $AFB$ . La figure curviligne  $AEBDCA$  est le salinon elliptique d'Archimède.

Soit  $G$  l'intersection de la demi-ellipse de diamètre  $CD$  avec le diamètre  $EF$ .  $MG$  est le demi-diamètre de cette demi-ellipse conjugué à  $CD$ . Menons encore l'ellipse homothétique à  $AEBF$  et qui a  $EG$  comme diamètre. Ce diamètre est conjugué à la direction de  $AB$ . Déterminons le diamètre de cette ellipse parallèle à  $AB$ . L'homothétie entre les ellipses donne  $p + q$  pour ce diamètre. L'aire de l'ellipse de diamètre  $EG$  est proportionnelle à  $2(p + q)^2$ .

L'aire du salinon est proportionnelle à

$$(2p + q)^2 - 2p^2 + q^2 = 2(p + q)^2 .$$

L'aire du salinon est donc égale à celle de l'ellipse de diamètre  $EG$ .

c) *Théorème de l'Huillier*

Soient une ellipse  $ADBE$  de diamètre  $AB$ ,  $C$  un point de ce diamètre,  $AE'C$  et  $CD'B$  deux demi-ellipses homothétiques aux demi-ellipses  $AEB$  et  $ADB$ ,  $k$  le rapport  $\frac{AC}{AB}$ . L'aire limitée par les trois demi-ellipses est proportionnelle à

$$AB^2 + AC^2 - CB^2 = AB^2 (1 + k^2 - [1 - k]^2) = AB^2 \cdot 2k .$$

Autrement dit, le rapport de l'aire de la figure considérée à celle de l'ellipse  $ADBE$  est égal à celui de  $AC$  à  $AB$ .

La propriété démontrée par L'Huillier est le cas particulier où l'ellipse donnée est un cercle.

§ 9. *Digression sur quelques ellipses liées à un triangle*

Soit  $ABC$  un triangle quelconque; construisons une ellipse qui passe par ses trois sommets et a le côté  $BC$  comme diamètre, ellipse que nous appellerons principale. Il existe une infinité de telles ellipses; elles appartiennent à un faisceau de coniques.

Traçons les deux ellipses homothétiques à la précédente et qui ont les côtés  $AB$  et  $AC$  comme diamètres, les deux ellipses secondaires.

Les deux directions des côtés  $AB$  et  $AC$  du triangle  $ABC$  sont conjuguées par rapport aux trois ellipses puisque  $BC$  est un diamètre de l'une d'elles.  $AB$  est un

diamètre de l'une des ellipses secondaires; celle-ci est donc tangente à  $AC$  en  $A$ . Les deux ellipses secondaires sont respectivement tangentes à  $AC$  et à  $AB$ ; elles sont contenues l'une entre  $AB$  et sa parallèle par  $C$ , l'autre entre  $AC$  et sa parallèle par  $B$ ; toutes deux coupent donc le côté  $BC$  du triangle. Soit  $D$  l'intersection de  $BC$  avec l'ellipse secondaire de diamètre  $AB$ ; les directions de  $BC$  et de  $AD$  sont conjuguées par rapport à elle, donc aussi par rapport à l'ellipse secondaire de diamètre  $AC$ . Les deux ellipses secondaires se coupent donc sur  $BC$ .

Réciproquement, traçons deux ellipses ayant respectivement  $AB$  et  $AC$  comme diamètres, tangentes l'une à  $AB$ , l'autre à  $AC$  et qui se coupent en un point  $D$  du côté  $BC$ . Elles sont déterminées. Les directions de  $AD$  et de  $BC$  sont conjuguées par rapport à chacune d'elles, ainsi que celles de  $AC$  et  $AB$ . Elles ont deux paires distinctes de diamètres conjugués parallèles; ces ellipses sont homothétiques entre elles. Construisons l'ellipse homothétique aux précédentes qui a  $BC$  comme diamètre. Les directions  $AB$  et  $AC$  sont conjuguées par rapport aux trois ellipses;  $BC$  étant un diamètre, le triangle  $ABC$  est inscrit à cette troisième ellipse; celle-ci passe par  $A$ . Les directions de  $AD$  et de  $BC$  sont conjuguées par rapport aux trois ellipses.

Soient  $a$  et  $b$  les demi-diamètres de l'ellipse principale, le premier parallèle à  $BC$ , le second à  $AD$ . La relation entre cordes supplémentaires donne

$$\left(\frac{BD - a}{a}\right)^2 + \left(\frac{AD}{b}\right)^2 = 1$$

ou, après réduction

$$\left(\frac{AD}{b}\right)^2 = \left(\frac{BD}{a}\right) \cdot \left(\frac{DC}{a}\right).$$

Le carré du rapport d'une corde d'une ellipse au diamètre qui lui est parallèle est égal au produit des rapports au diamètre des segments qu'elle détermine sur le diamètre conjugué à la corde.

Cette propriété est la généralisation affine du théorème de la hauteur d'un triangle rectangle.

Examinons quelques cas particuliers. Si  $D$  est le milieu de  $BC$ ,  $AD$  est le diamètre conjugué de  $BC$  et la tangente en  $A$  à l'ellipse principale est parallèle à  $BC$ .

Si, ce qui n'a aucun sens en géométrie affine,  $AD$  est une hauteur du triangle,  $BC$  est un axe de l'ellipse principale.

Si  $D$  est confondu avec l'un des points  $B$  ou  $C$ , l'ellipse principale dégénère en le support du côté  $AB$  et sa parallèle par  $C$  ou en celui de  $AC$  et sa parallèle par  $B$ . La troisième paire de droites du faisceau de coniques auquel appartient l'ellipse principale est constituée par  $BC$  et sa parallèle par  $A$ . Ces cas de dégénérescence sont sans intérêt.

§ 10. *Application à l'arbélon elliptique*

Soit une demi-ellipse limitée par un de ses diamètres  $BC$ . Par un point  $D$  de ce diamètre, menons la parallèle au diamètre conjugué de  $BC$ ; elle coupe la demi-ellipse en  $A$ . Traçons les deux demi-ellipses homothétiques à la première situées du même côté de  $BC$  que celle-ci et ayant  $BD$  et  $DC$  comme diamètres. La figure limitée par ces trois demi-ellipses est l'arbélon elliptique d'Archimède.

La figure obtenue est la même que celle du § précédent. Par conséquent, si  $a$  et  $b$  sont les demi-axes de la grande demi-ellipse, la relation précédente entre  $AD$ ,  $BC$  et  $CD$  est valable.

L'aire de l'arbélon est proportionnelle à

$$\left(\frac{BD + DC}{a}\right)^2 - \left(\frac{BD}{a}\right)^2 - \left(\frac{DC}{a}\right)^2 = 2\left(\frac{BD}{a}\right) \cdot \left(\frac{DC}{a}\right).$$

L'aire de l'ellipse homothétique aux précédentes de diamètre  $AD$  est proportionnelle au double du carré du rapport à  $a$  de son diamètre  $x$  parallèle à  $BC$ . L'homothétie donne

$$\frac{x}{a} = \frac{AD}{b}.$$

L'aire de cette ellipse est proportionnelle à

$$2\left(\frac{x}{a}\right)^2 = 2\left(\frac{AD}{b}\right)^2$$

Le théorème précédent montre l'équivalence de l'arbélon et de l'ellipse de diamètre  $AD$ .

§ 11. *Théorème de Pythagore*

Pour alléger la suite, dans la figure du § 9, il est commode de choisir comme segments unités sur  $BC$  la moitié de la longueur de ce côté du triangle  $ABC$  et, sur le diamètre de l'ellipse principale conjugué à  $AB$ , le demi-diamètre de cette ellipse. La relation relative au carré de  $AD$  devient

$$AD^2 = BD \cdot DC. \quad (1)$$

Appelons  $\lambda$  et  $\mu$  les deux rapports d'homothétie entre l'ellipse principale et les deux ellipses secondaires de diamètre  $AB$  et  $AC$ . Les rapports des aires de ces ellipses à celle de l'ellipse principale sont respectivement  $\lambda^2$  et  $\mu^2$ .

Appliquée à l'ellipse secondaire construite sur  $AB$ , la relation entre cordes supplémentaires (§ 6) donne

$$\left(\frac{BD}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{AD}{2\lambda}\right)^2 = 1 \text{ ou} \quad (2)$$

$$BD^2 = 4\lambda^2 - AD^2 \text{ et de même}$$

$$DC^2 = 4\mu^2 - AD^2. \quad (3)$$

Remplaçons  $AD^2$  par sa valeur, tenons compte de  $BD + DC = 2$  et additionnons les deux équations obtenues. Après division par 4, il vient

$$\lambda^2 + \mu^2 = 1$$

Par conséquent la somme des aires des deux ellipses secondaires est égale à l'aire de l'ellipse principale. Le théorème de Pythagore est le cas particulier métrique où l'ellipse principale est un cercle. L'énoncé de ce théorème en géométrie affine est donc le suivant: à un triangle  $ABC$ , circoncrivons une ellipse ayant  $BC$  comme diamètre; son aire est égale à la somme des aires des deux ellipses homothétiques à la précédente et ayant  $AB$  et  $AC$  comme diamètres.

On peut éviter l'emploi des aires: à un triangle  $ABC$ , circoncrivons une ellipse ayant  $BC$  comme diamètre, traçons les deux ellipses homothétiques à la précédente et ayant  $AB$  et  $AC$  comme diamètres; dans ces ellipses, menons trois diamètres parallèles entre eux. La somme des carrés de ces diamètres des deux dernières ellipses est égale au carré de celui de la première ellipse.

Dans le cas métrique où la première ellipse est un cercle, tous les diamètres sont congruents entre eux et l'on obtient l'énoncé classique du théorème de Pythagore.

De l'ellipse principale ne retenons que l'arc  $BAC$  et des deux ellipses secondaires, les moitiés limitées à  $AB$  et  $AC$  qui ne contiennent pas  $D$ . La somme des aires de ces dernières est égale à l'aire de la demi-ellipse principale. En retranchant les aires de deux segments elliptiques appropriés, on voit que la somme des aires des deux lunules restantes est égale à celle du triangle. Ainsi est étendue à la géométrie affine et aux triangles quelconques la propriété des lunules liées au triangle rectangle, lunules dites parfois d'Hippocrate.

En tenant compte de la valeur de  $AD^2 = BD \cdot DC$  l'équation 3) relative à  $BD$  peut être écrite

$$BD(BD + DC) = 4\lambda^2 \text{ ou } BD = 4\lambda^2 \text{ et de même, } DC = 4\mu^2.$$

Autrement dit, le rapport des aires des ellipses secondaires est égal à celui des deux segments qu'elles déterminent sur le troisième côté du triangle. On reconnaît ici un lemme qui apparaît dans une démonstration classique du théorème de Pythagore.

§ 12. *Barycentre*

Sur une figure possédant une aire  $A$ , soient  $x$  et  $y$  les coordonnées affines d'un élément d'aire  $ds$ . Le barycentre de cette figure est le point de coordonnées  $x_0, y_0$  données par les équations

$$Ax_0 = \int_F x ds \quad \text{et} \quad Ay_0 = \int_F y ds .$$

Les intégrales sont étendues à la figure entière.

Si l'origine du système de coordonnées est au barycentre, les deux intégrales ci-dessus sont nulles.

Le barycentre est indépendant de la direction des axes. Pour le montrer, l'origine ayant été prise au barycentre déterminé par un premier système d'axes, menons par ce point un nouvel axe des  $y'$ . Sur lui, comme point unité, choisissons l'intersection avec la parallèle à l'axe des  $x$  qui passe par le point unité de l'ancien axe des  $y$ . Les ordonnées  $y$  ne sont pas modifiées; le théorème de Thalès montre que la relation entre les anciennes et les nouvelles abscisses est  $x' = x - my$  où  $m$  est une constante. L'intégrale de détermination du barycentre relative à  $x'$  se réduit à la somme des deux intégrales nulles précédentes. Le barycentre est donc bien indépendant du système de coordonnées choisi.

Si une figure possède un axe de symétrie, le barycentre appartient à cet axe et si elle a un centre de symétrie, ce point est le barycentre.

§ 13. *Moments d'inertie*

Soit une figure possédant une aire  $A$  rapportée à un système de coordonnées affines  $x, y$ . Le moment d'inertie de cette figure relatif à l'axe des  $x$  est l'intégrale  $\int_F y^2 ds$ , où  $ds$  est une aire infinitésimale d'ordonnée  $y$ ; l'intégrale est étendue à toute la figure.

Une translation de tout ou partie de la figure parallèlement à l'axe des  $x$  ne modifie pas le moment d'inertie précédent. Ce moment est indépendant de la direction de l'axe des ordonnées à condition que les points unités des deux axes des ordonnées, l'ancien et le nouveau appartiennent à une parallèle à l'axe des abscisses. En effet, dans ce cas, les ordonnées ancienne et nouvelle d'un élément d'aire sont égales.

Transportons l'axe des  $x$  parallèlement à lui-même et faisons passer sa nouvelle position par le barycentre; soit  $a$  l'ordonnée de ce point. La relation entre les deux ordonnées d'un point est  $y = a + y'$ . Le moment d'inertie est

$$I_x = \int_F y'^2 ds + 2a \int_F y' ds + a^2 A .$$

La seconde intégrale est nulle puisque le nouvel axe passe par le barycentre. Le moment  $\int_F y' ds$  est appelé moment central relatif à la direction de l'axe considéré.

L'équation ci-dessus montre que le théorème de Huygens-Steiner est valable en géométrie affine: le moment d'inertie par rapport à une aire est égal à la somme du moment central correspondant et du produit de l'aire de la figure par le carré de la distance du barycentre à l'axe.

#### § 14. *Symétrisation*

Soient une figure fermée, un axe et une direction. Une parallèle à la direction coupe sur la figure des segments dont la longueur totale est finie. Sur cette droite, de part et d'autre de son intersection avec l'axe, portons la moitié de la longueur totale précédente. Faisons varier la transversale. Le lieu des points obtenus est la transformée de la figure donnée par symétrisation selon l'axe et la direction choisis.

L'axe et la direction ci-dessus sont axe et direction de symétrie de la figure obtenue.

Le barycentre de la figure après symétrisation appartient à l'axe de symétrie. Avec le barycentre de la figure initiale, il détermine une parallèle à la direction de symétrisation.

Coupons la figure par deux droites infiniment voisines parallèles à la direction de symétrisation. Le moment d'inertie du trapèze infinitésimal découpé par rapport à l'axe de symétrisation est  $dI_c + a^2 ds$  où  $dI_c$  est le moment central de ce trapèze et  $a$  la distance à l'axe du barycentre du trapèze. Le second terme n'est jamais négatif et n'est nul que si le barycentre appartient à l'axe de symétrisation. Ainsi, la symétrisation diminue le moment d'inertie relativement à l'axe de symétrisation. Au contraire, le moment d'inertie relatif à un axe parallèle à la direction de symétrisation ne varie pas lors de la symétrisation. Le calcul précédent conduit à une généralisation du théorème de Huygens-Steiner: la différence entre les moments d'inertie d'une figure avant et après symétrisation autour de l'axe par rapport auquel est déterminé le moment est égale à l'intégrale  $\int a^2 ds$ , où  $a$  est la distance à l'axe de l'élément d'aire  $ds$ .

## DEUXIÈME PARTIE

### THÉORÈME DE PYTHAGORE

#### § 15. *Quelques hyperboles liées à un triangle*

Au § 9, nous avons étudié une extension du théorème de Pythagore liée à trois ellipses homothétiques en relation avec un triangle. Nous allons voir que l'une des constructions indiquées à ce propos ne conduit pas toujours à des coniques homothétiques. Nous savons déjà que sur la figure précédente, pour que les coniques

envisagées soient des hyperboles, il faut que le point  $D$  soit extérieur au segment  $BC$ . Nous allons voir que la condition est suffisante.

Soient donc un triangle  $ABC$  et  $D$  un point de la droite  $BC$  situé sur la demi-droite ayant  $B$  comme origine et ne contenant pas  $C$ . Traçons la conique  $b$  qui passe par  $A$ , est tangente en ce point à  $AC$ , passe par  $B$  et par  $D$  et a  $AB$  comme diamètre. En  $B$ , la tangente à cette conique est parallèle à  $AC$ ; la conique est déterminée et unique.

Le point  $D$  est hors de la bande comprise entre les tangentes en  $A$  et en  $B$  à la conique  $b$ ; celle-ci est donc une hyperbole; les points  $B$  et  $D$  appartiennent à la même branche, mais non  $A$  et  $D$ .

De même, construisons la conique  $c$  qui passa par  $A$ , y est tangente à  $AB$ , passe par  $C$  et  $D$  et a  $AC$  comme diamètre; elle est aussi une hyperbole et, sur elle, les points  $A$  et  $D$  appartiennent à la même branche.

Les deux hyperboles  $b$  et  $c$  ne sont pas homothétiques car la seconde possède une tangente parallèle à  $AD$  et pas la première. Relativement à ces deux hyperboles, les directions des côtés  $AB$  et  $AC$  du triangle sont conjuguées;  $DA$  et  $DB$  sont deux cordes supplémentaires de la première;  $DA$  et  $DC$  le sont relativement à la seconde; donc les directions de  $DA$  et de  $BC$  sont conjuguées par rapport aux deux courbes et les hyperboles  $b$  et  $c$  ont mêmes points impropres. La conjuguée de l'une est donc homothétique à l'autre.

Traçons encore l'hyperbole qui a  $BC$  comme diamètre, qui passe par  $A$  et dont les tangentes en  $B$  et  $C$  sont parallèles à  $AD$ , hyperbole que nous appellerons principale. Relativement à elle, les directions  $AD$  et  $BC$  sont conjuguées ainsi que celles de  $AB$  et  $AC$ ; cette hyperbole a donc mêmes points impropres que les deux premières; elle est homothétique à  $c$  car elle possède des tangentes parallèles à  $AD$ .

### § 16. Théorème de Pythagore lié aux hyperboles

Appelons hyperboles secondaires du triangle  $ABC$  l'hyperbole  $c$  et la conjuguée de  $b$ ; soient  $\mu$  et  $\lambda$  les rapports d'homothétie entre l'hyperbole principale et les deux secondaires. Comme unités de longueur suivant  $BC$  et  $AD$ , prenons les deux demi-diamètres de l'hyperbole principale parallèles à ces directions.

Sur l'hyperbole principale, la relation entre cordes supplémentaires donne

$$(1 + BD)^2 - AD^2 = 1 \text{ ou } AD^2 = BD \cdot CD.$$

A un signe près d'un facteur du second membre, cette relation est identique à celle obtenue dans le cas des ellipses.

Sur les hyperboles secondaires, la relation entre cordes supplémentaires conduit à

$$\left(\frac{AD}{2\lambda}\right)^2 - \left(\frac{BD}{2\lambda}\right)^2 = 1, \quad \left(\frac{AD}{2\mu}\right)^2 - \left(\frac{CD}{2\mu}\right)^2 = -1$$

ou

$$BD^2 - AD^2 = -4\lambda^2 \text{ et } CD^2 - AD^2 = 4\mu^2.$$

Remplaçons  $AD^2$  par sa valeur et  $BC$  par 2; il vient

$$\mu^2 - \lambda^2 = 1$$

Les longueurs de diamètres des trois ellipses parallèles entre eux sont proportionnels à 1,  $\lambda$  et  $\mu$ . La dernière équation conduit au théorème de Pythagore: le carré d'un diamètre de l'hyperbole principale est égal à la différence suivante entre carrés de diamètres parallèles au premier: celui de l'hyperbole secondaire qui passe par deux sommets du triangle moins le carré de celui de l'hyperbole secondaire qui ne passe pas par des sommets du triangle.

On sait par ailleurs que si  $m$  est la longueur d'un diamètre d'une hyperbole,  $im$  est celle du diamètre de même support de l'hyperbole conjuguée. En introduisant cette notion dans l'énoncé du théorème, celui-ci prend même forme que dans le cas des ellipses: la somme des carrés de deux diamètres parallèles des deux hyperboles  $b$  et  $c$  est égale au carré du diamètre de même direction de l'hyperbole principale. L'un de ces carrés est négatif puisque le diamètre correspondant a une longueur imaginaire.

### § 17. Conclusion

L'habitude est de lier le théorème de Pythagore à la théorie des aires. Il n'y a rien là de nécessaire, mais bien une commodité car l'énoncé de la proposition est allégé par l'emploi de cette notion. De façon générale, le théorème est une relation entre des diamètres de certaines coniques non dégénérées. De ce fait, il est de nature affine. Sa démonstration repose essentiellement sur la relation entre cordes supplémentaires; cette propriété est obtenue à partir de l'équation des coniques rapportée à un système d'axes porté par deux diamètres conjugués. Cette équation est donnée par la géométrie projective et résulte de la définition projective des coniques. Le théorème des cordes supplémentaires n'est donc fondé que sur des propriétés projectives et affines.

En géométrie élémentaire, on établit souvent l'équation des coniques en partant d'une définition métrique et en employant le théorème de Pythagore. Cette façon de faire masque la nature des coniques, celle du théorème et leurs relations; le théorème est subordonné à la théorie des coniques et pas les coniques au théorème.

---



