

Sur le théorème de Pythagore en géométrie affine

Autor(en): **Rossier, Paul**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Archives des sciences [1948-1980]**

Band (Jahr): **16 (1963)**

Heft 3

PDF erstellt am: **23.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-739365>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

BIBLIOGRAPHIE

1. STAACK, H. H. and SPAUN, J. Serological diagnosis of chronic typhoid carriers by Vi haemagglutination. *Acta pathol. microbiol. scand.*, 1953, 32, 420-423.
2. WERBIN, B. Z. and KASHER, A. The rapid slide agglutination test in the diagnosis of typhoid fevers and typhus. *J. clin. pathol.*, 1961, 14, 446-447.

*Service fédéral de l'hygiène publique,
Berne
et
Institut sérothérapique et vaccinal suisse,
Berne*

Paul ROSSIER. — Sur le théorème de Pythagore en géométrie affine.

Dans notre note « Théorie affine des aires ¹ » nous avons démontré la généralisation affine suivante du théorème de Pythagore :

Si l'on circonscrit au triangle ABC une ellipse ayant un côté BC comme diamètre, l'aire de cette ellipse est égale à la somme des aires des deux ellipses homothétiques à la précédente et qui ont respectivement AB et AC comme diamètres.

La démonstration de cette proposition repose entre autre sur la notion de continuité.

Nous allons établir un théorème sur des aires de parallélogrammes, théorème qui, au fond, est identique au précédent, mais dont la démonstration ne fait appel qu'à la notion de congruence affine (par translation). Cette notion n'exige pas le recours à la continuité.

2. Par le sommet A d'un triangle ABC , menons une droite d et construisons les deux parallélogrammes $ABDE$ et $ACFG$ dont une diagonale est portée par d , dont un côté est un côté du triangle donné et dont un second côté a comme support un autre côté du triangle. Les côtés DE et FG de ces parallélogrammes sans point en un sommet du triangle donné se coupent en un point H .

L'aire du parallélogramme $BCJK$ dont un côté est le troisième côté du triangle donné et dont les côtés BK et CJ sont équipollents à AH est égale à la somme des aires des parallélogrammes $ABDE$ et $ACFG$.

Pour le démontrer, remarquons que les segments HK et HJ sont respectivement équipollents à AB et à AC , le parallélogramme $EHJL$ peut être obtenu à partir du parallélogramme $AGFC$ par la translation AE . L'aire du polygone concave $ALJHKB$

¹ *Archives des Sciences*, vol. 16, fasc. 1, p. 1.

est égale à la somme des aires des parallélogrammes considérés. Par la translation AH , transportons le triangle ABC en HKJ et, par la translation CB , le triangle CJL en BKD . Le polygone concave est transformé en le parallélogramme $BCJK$, il y a conservation des aires: le théorème est démontré.

3. Dans le cas particulier où l'angle A est droit, la démonstration ci-dessus est à peu de chose près celle du théorème de Pythagore proposée au neuvième siècle par les Indous.

4. Comme droite d , choisissons la diagonale du parallélogramme $ABHC$, construit sur le triangle ABC . Le point H de la figure précédente est la seconde extrémité de la diagonale issue de A de ce parallélogramme. La construction conduit à un parallélogramme $BCJK$ d'aire double à celle du parallélogramme $ABHC$.

Ce cas est l'analogie de celui du triangle rectangle isocèle.

5. En appliquant le théorème de l'égalité des aires des triangles ABH et ACH (équivalence dont la démonstration fait appel à un axiome de continuité), on constate que l'aire du parallélogramme $BCJK$ est le quadruple de celle du triangle ABC .

6. Faisons varier la droite d dans le faisceau de sommet A . A chacune de ces positions correspond une droite DE et une droite FG . Ces deux faisceaux sont projectifs. Le lieu du point H est donc une hyperbole dont les asymptotes sont les supports des côtés AB et AC du triangle donné. Cette hyperbole passe par le sommet opposé à A du parallélogramme construit sur les côtés AB et AC .

7. L'existence de ces généralisations affines du théorème de Pythagore montre bien le double caractère de celui-ci. Il est en premier lieu une relation entre des aires de parallélogrammes, d'ellipses ou de diamètres conjugués d'ellipses parallèles entre eux¹, relations qui sont valables, que le triangle considéré soit rectangle ou pas.

En second lieu le théorème de Pythagore est une relation entre les longueurs des côtés d'un triangle rectangle, relation qui exige la possibilité de la mesure de ces côtés au moyen d'une même unité. De ce fait, elle appartient à la géométrie métrique et est dépendante de la notion de congruence générale.

Au contraire, la première forme du théorème ne fait appel qu'à la notion de congruence affine; celle-ci exclut la rotation.

Hilbert² qualifie de « non-pythagoricienne » une géométrie dans laquelle le théorème de Pythagore n'est pas valable sous sa seconde forme. Cela n'exclut pas sa validité comme relation entre les aires. En fait, dans les géométries non-pythagoriciennes construites par Hilbert, le théorème de Pythagore sur les aires est valable pour le triangle rectangle.

¹ *Loc. cit.*

² *Grundlagen der Geometrie, Anhang II.*